MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

Otto Hölder, Carl Neumann, Max Noether

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

Otto Blumenthal
in Aachen.

75. Band.

Mit 40 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1914.

Inhalt des fünfundsiebzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Paul Gordan.

Von

Max Noether in Erlangen.

(Mit Unterstützung von Felix Klein in Göttingen und von Emmy Noether in Erlangen.)*)

Dem kurzen Gedenkworte, welches die Redaktion der Annalen ihrem treuen Freunde Paul Gordan bei seinem Hinscheiden gewidmet hat**) und das schon die wesentlichen Züge seiner Persönlichkeit wiedergibt, lassen wir hier eine *Darstellung seiner mathematischen Leistungen* folgen. Gordan schließt unmittelbar an die Reihe der großen Algebraiker, zunächst an Clebsch, an, deren Arbeit in dieser Zeitschrift gewürdigt worden ist; und sein Name ist mit ihren Blättern selbst unlöslich verbunden. So sind wir ihm schuldig, unsere Darstellung eingehend zu halten. Wir verbinden damit die Schilderung seines Lebensganges.***)

Paul Albert Gordan ist geboren zu Breslau am 27. April 1837, als Sohn des Kaufmanns David Gordan. Seine Mutter Friederike, aus der bekannten dortigen Familie Friedenthal, wurde ihm früh entrissen; sie hinterließ noch drei ältere Söhne — einer später ein höherer Staatsbeamter — und eine Tochter, alle sind vor ihrem Bruder verstorben. Paul Gordan wurde zunächst zu Hause unterrichtet und absolvierte dann die Quarta und einen Teil der Tertia des Friedrichsgymnasiums in Breslau, worauf ihn sein Vater in seinem eigenen Geschäft — einem Pelzhandel und Bankgeschäft in Breslau und Berlin — der kaufmännischen Laufbahn

---

*) Von Ersterem wurde ich in der Gesamtwürdigung, von Letzterer in der Würdigung der algebraischen Arbeiten wesentlich unterstützt.

**) Bd. 73, S. 321—322.

***) Ein Teil der bezüglichen Daten ist der Dissertation (I des am Schlusse angefügten Schriftenverzeichnisses) entnommen. Andere verdanke ich den Herren R. Sturm, dem Studiengenossen von Breslau, C. F. Geiser, einem der Opponenten bei der Berliner Disputation von 1862, J. Thomae, dem Göttinger Studiengenossen, und A. Brill, dem Gießener Kollegen; ferner L. Schlesinger solche aus Gießener Akten.

Die Nummernzitate des Aufsatzes beziehen sich auf das am Schluß folgende Schriftenverzeichnis.

zuführte. Zugleich besuchte er einige Jahre in Breslau eine Handelsschule; dann folgten zwei Jahre in einem Bankgeschäft in Genf, und wieder kurze Zeit im väterlichen Geschäft, diesmal in Berlin. Hierbei gewann jedoch bald eine früh gefaßte Neigung zur Mathematik soweit die Oberhand, daß ihn der Professor am Friedrich Wilhelm-Gymnasium und an der Kriegsschule N. H. Schellbach, der Lehrer so vieler Lehrer, erst privatim in diese Wissenschaft einführte und dann an E. Kummer verwies, der gerade 1855 aus Breslau nach Berlin zu umfassender Tätigkeit übergesiedelt war. Gordan hörte nun bei Kummer an der Universität, also in dessen erster zahlentheoretischer Periode, während mehrerer Semester, bereitete sich zugleich zum Gymnasialabsolutorium vor und erhielt nach einem mehrmonatigen Besuch des katholischen Gymnasiums zu Neisse daselbst am 19. August 1857, nach einer kleinen mathematischen Privatarbeit, das Reifezeugnis.

Jetzt folgten neun Universitätssemester bis zur Promotion: eines in Breslau, drei in Königsberg, wieder vier in Breslau, eines in Berlin. Seine Lehrer in Breslau waren außer Galle besonders Joachimsthal — bis zu dessen Tod, ein Semester vor Gordans zweitem Weggang von Breslau — und Schroeter, in Königsberg Richelot und Rosenhain; und so ist Gordan nun ganz in der Jacobischen Schule herangebildet: in Variationsrechnung, Mechanik, Elliptischen Funktionen usw., wenn er auch, wie es scheint, einige dieser Gebiete, so das letztgenannte, nur nach Abhandlungen und Vorlesungsheften zu studieren Gelegenheit hatte. In Berlin verkehrte Gordan dann mit Kronecker und hörte dessen 1861/62 zum ersten Mal gelesenes Kolleg über die Auflösung der algebraischen Gleichungen, so über die mit elliptischen Funktionen zusammenhängenden, und über den Rationalitätsbereich: Theorien und Begriffe, die für Gordan später noch von Wichtigkeit wurden.

In Breslau empfing Gordan auch das Thema zu seiner Dissertation, sie ist aus einer Arbeit „De linea geodetica" hervorgegangen, mit der er auf eine von der Fakultät gestellte Preisfrage im August 1861 den Preis erhielt*). Diese in Berlin am 1. März 1862 verteidigte Doktordissertation behandelt die geodätische Linie auf dem Erdsphäroid. Die Darstellung durch elliptische Thetas erfolgt nicht in der von Jacobi (J. f. Math. 53) gegebenen Form, sondern direkt nach den Formeln der Fundamenta. Interessanter ist die Behandlung der Variationsaufgabe selbst, bei der

*) Die Frage, an Jacobis Formeln J. f. Math. 53 anknüpfend, war von Joachimsthal 3. Aug. 1860 gestellt; das Urteil gab Schroeter ab. Es lautete anerkennend für das wissenschaftliche Streben des Verfassers, ablehnend gegenüber der Form und erklärte die Arbeit als des Preises für „nicht unwürdig" (nach dem „Bericht der Fakultäten über die von der kgl. Univ. zu Breslau gestellten Preisaufgaben", 3. Aug. 1861).

offenbar — die Literatur ist hierbei nicht angegeben — die Methode von Lagrange-Jacobi*) benutzt worden ist. Durch Rechnungen, welche lediglich dem speziellen Problem angepaßt sind, stellt Gordan fest, einmal: daß alle von einem Punkt A ausgehenden geodätischen Linien an irgend einen Punkt B der Fläche in ihrem Verlauf im allgemeinen beliebig nahe herangehen; daß aber die Eigenschaft des absoluten Minimums höchstens bis zum neuen Treffpunkt zweier Linien mit supplementärem Azimut in A gilt; sodann: daß das relative Minimum nur bis zum Schnittpunkt zweier sukzessiver Linien von A statthat. Die Jacobische zu einem gegebenen Punkt A gehörige Umhüllungskurve wird nicht behandelt.

Von den Thesen, welche Gordan bei jener Disputation — in einem Latein freilich, das Kronecker nicht gerade als klassisch anerkannte — verteidigte, seien hier zwei angeführt, die erste, weil sie seinen Anschauungen auch aus späterer Zeit entspricht, die zweite aus dem entgegengesetzten Grunde:

> „Die Methode des Unendlichkleinen ist, wie ich behaupte, nicht weniger genau, als die der Grenzen".
>
> „Es hat größeres Interesse zu untersuchen, welche Eigenschaften einer durch eine Differentialgleichung definierten Funktion innewohnen, als durch welche schon bekannte Funktionen sie ausgedrückt werden könne."

Die Funktionentheorie zog Gordan im Herbst 1862 zu Riemann. Er bekam auch die Einwilligung des Vaters, der lange an dem Sohne nur die rechnende, nicht die mathematische Begabung anerkennen wollte; und so ließ er sich in Göttingen immatrikulieren. Aber der nächste Zweck des dortigen Aufenthaltes wurde verfehlt. Zu mehr als einem kurzen Gespräch mit Riemann über dessen Flächen und einigen Wochen Kolleg über Potentialtheorie ist es nicht gekommen, da der erkrankte Forscher nach Italien abreisen mußte. Gordans Schicksalsgenosse war hierbei der einige Jahre jüngere J. Thomae, der sich nun eng an ihn anschloß. Beide hörten Dirichletsche Zahlentheorie bei E. Schering, Gordan freilich, wie überhaupt im Kolleg, nicht nachschreibend, ja halb eingeschläfert; um so lebhafter wurde er dann in der Diskussion auf den täglichen weiten Spaziergängen mit mehrmaliger Einkehr. Damals beschäftigte er sich mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen, und er führte seinen Freund in seiner eindringlichen Art in sie ein, was dann diesen zur Beschäftigung mit der Transformationstheorie der Abelschen Funktionen antrieb.

In Göttingen traf Gordan im Juni 1863 eine Aufforderung von A. Clebsch, sich in Gießen zu habilitieren. Vielleicht war die Verbindung durch die

*) J. f. Math. 17; von Jacobi in Vorlesungen behandelt.

gemeinschaftlichen Beziehungen zur Königsberger Schule, oder zu Schellbach, in dessen Seminar Clebsch 1854 tätig gewesen, entstanden: jedenfalls zögerte Gordan nicht, der Aufforderung Folge zu leisten. Seine Untersuchungen wurden mit Thomaes Hilfe sofort zusammengefaßt, am 5. Juli ging das Gesuch nach Gießen, und die Habilitation konnte schon am 29. Juli 1863 vor sich gehen. Freilich war vorher noch eine Klausurprüfung in Mathematik und Physik, und ein Kolloquium in diesen Fächern und in Philosophie zu bestehen. Am 8. September erfolgte die venia docendi.

Von den damals verteidigten zwölf Thesen stehen einige unter Göttinger Einflüssen, wie die achte:

> „Die Probleme, welche die Riemannsche Geometrie der Lage stellt, sind begrifflich einfacher, als selbst die neuere Geometrie;"

andere, über partielle Differentialgleichungen usw., stehen auf Jacobischem Boden; charakteristisch für Gordan sind nur die neunte und elfte:

> „Es ist als wesentlicher Fortschritt der Analysis anzusehen, wenn sie sich dazu erhebt, gewisse oft vorkommende Kombinationen mit eigenen Namen zu bezeichnen."
>
> „Es ist von großem Werte, selbst Bekanntes durch neue Methoden zu beweisen."

In der Habilitationsschrift (II) wird die Aufgabe, die Konstante der *linearen Transformation der elliptischen Thetafunktion* als explizite Funktion der Transformationskoeffizienten zu bestimmen, vollständig erledigt. Was Gordan zu der Aufgabe hinzog, waren wohl zunächst die Erklärungen Jacobis (in einem Briefe an Hermite von 1845*)): daß er in seinen Vorlesungen die Theorie der unendlich vielen Formen der Thetafunktion umständlich gegeben habe, und daß — wenigstens im Fall des Nullarguments — die schwierige Bestimmung der auftretenden achten Einheitswurzel entweder auf Kettenbruchentwicklung oder auf die Gaußschen Summen führe. Oder es war mindestens der (allein zitierte) Bericht Rosenhains in seiner Preisschrift von 1851, der am speziellen Fall des Übergangs vom Periodenverhältnis τ zu $\frac{1}{\tau}$ mittels Fourierscher Reihe und Umformung der Integralkoeffizienten den Gang darstellt. Leider ist die betreffende Vorlesung Jacobis nicht veröffentlicht; nur die Zerlegung der θ-Reihe in eine endliche Summe von Teilreihen ist aus der Dissertation von Schroeter bekannt. Jedenfalls hat Gordan im allgemeinen den Gang Jacobis und seine Resultate rekonstruiert. Eine Abweichung besteht vielleicht darin, daß Gordan die Integralumwandlung durch einen Grenzprozeß für einen speziellen Modul ersetzt.

---

*) J. f. Math. 32 oder Werke, Bd. 1 von 1846; s. auch J. f. Math. 36.

Gordan war es aber entgangen, daß schon fünf Jahre vorher (in den C. R. der Pariser Akademie und in Liouvilles Journal) Hermite, von denselben Anregungen ausgehend, dieselben Endresultate vollständig entwickelt hatte, nach einer Methode, die eng an Jacobi anschließt.

So bedeutend die Leistung an sich ist, man vermißt in ihr — worauf Enneper in seinem historischen Buch über die elliptischen Funktionen hinweist — den Einblick in die Quellen. Dieser Umstand hängt einmal mit Gordans durchaus synthetischer Darstellungsweise zusammen; sodann aber auch mit seiner Arbeits- und Publikationsmethode: er führte für jede Arbeit eine große Reihe von Formelheften, sehr gut geordnet, aber nur mit dem geringsten Maße von Text versehen; die weitere Textgestaltung für den Druck und die Druckkorrekturen übernahmen dann mathematische Freunde. So konnte sich aber nicht immer eine völlige Korrektheit der Fassung ergeben, und manchmal sieht man auch nicht den tieferen Untergrund, auf welchem die Überlegungen ruhen. Auch enthalten nur einige der veröffentlichten Aufsätze, darunter aber gerade die ersten, den spezifischen Stil Gordans: lauter kurze, direkte, unvermittelt nebeneinanderstehende Sätze.

Die Theorie der Transformation der elliptischen Funktionen hat Gordan vielleicht auch in der Hoffnung auf Ergebnisse interessiert, die über Hermite und Kronecker hinaus in Zusammenhängen zwischen Gleichungen allgemeiner Art und Modulargleichungen erlangt werden könnten. Jedenfalls ist er noch einmal auf sie eingegangen (1), diesmal auf die der *nichtlinearen* Transformation. Er stellt ein Produkt von r Thetafunktionen, mit verschiedenen Argumenten w_h und mit Moduln $m_h\tau$, die ganzzahlige Vielfache von τ sind, als Summe von $m_1 m_2 \cdots m_r$ Produkten von je r solchen Funktionen dar, alle mit dem Modul τ, aber mit Argumenten, die lineare Verbindungen der w_h, mit gebrochenen Zahlen als Koeffizienten, sind. Es wird so eine sehr allgemeine Formel erhalten, wenn auch nicht gerade „alle nur denkbaren Beziehungen"; auch hat Gordan die beabsichtigten Anwendungen auf Modulargleichungen nicht mitgeteilt. Die Richtung ist eine starke Verallgemeinerung der schon genannten Königsberger Dissertation Schroeters von 1854; sie ist auch erst über 20 Jahre später (von Krause, sowie von Prym-Krazer*)) weiter verfolgt worden.

In Gießen schloß sich Gordan sofort eng an Clebsch an, ein Anschluß, der bald für die Wissenschaft von hoher Bedeutung werden sollte: er führte zu dem gemeinsamen Werk über die *Theorie der Abelschen Funktionen* (III). Indessen darf man sich die Vorgeschichte des Werkes doch nicht

*) Vgl. M. Krause, Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Größe (Teubner), Bd. II (1897), S. 289.

so denken, wie es nach der Bemerkung C. Neumanns in seinem Nachruf auf Clebsch*) scheinen könnte: „daß Clebsch durch Gordan mit Riemanns Arbeiten über Abelsche Funktionen bekannt gemacht wurde“, und vielleicht auch nach der Bemerkung in dem Bericht über die Leistungen Clebschs**), daß „für die Einführung der Abelschen Funktionen und ihrer Betrachtungsweisen in die Geometrie die äußere Veranlassung die Habilitation Gordans in Gießen war“. Vielmehr muß Clebsch den Abelschen Funktionen selbständig schon früher nähergetreten sein. Denn er hatte Riemanns Abhandlung schon 1857 als Korrektor des Crelleschen Journals unter den Händen und Interesse für sie gefaßt; und die geometrische Bedeutung des Abelschen Theorems hatte er zu einer Zeit erkannt — die Daten der beiden Arbeiten in J. f. Math. 63 sind der 27. Sept. und der 28. Okt. 1863; vgl. auch die Anm. in J. f. Math. 63, S. 105 —, in der eine Beeinflussung durch Gordan noch kaum als möglich erscheint. Auch in den Hauptsatz Riemanns über das Verschwinden der Thetafunktion war, nach der zweiten der beiden Arbeiten, Clebsch eingedrungen, und die Arbeiten von C. Neumann und Prym hatten auf ihn eingewirkt.

Richtig aber ist, daß Clebsch noch im Sommer 1864 — nach einem Briefe an Roch — größere Schwierigkeiten im Verständnis von Riemanns Theorien zu überwinden hatte, so insbesondere bezüglich der algebraischen Modifikationen des Abelschen Theorems, welche das Auftreten von Doppel- und Rückkehrpunkten von seinem projektiven Standpunkte aus mit sich brachte. Erst allmählich, durch die Fälle $p=0$ und 1 (J. f. Math. 64) hindurch, hier mit Hilfe von Rosenhains Preisschrift, fand er den Weg zum erweiterten Umkehrproblem, wobei auch Brills Behandlung des Falles $p=2$ (J. f. Math. 65 von Okt. 1865), die auf seine Anregung erfolgte, noch eine Zwischenstufe bildete.

Das gemeinsame Werk selbst ist wesentlich 1865 entstanden und, nachdem es Jan. 1866 angezeigt worden (3), im Herbst 1866 erschienen.

Wir können davon absehen, uns hier über die funktionentheoretische und algebraisch-geometrische Bedeutung der neuen Theorie näher auszusprechen; denn eine eingehende Würdigung von der Hand A. Brills enthält der oben genannte Bericht über Clebsch, an dem auch Gordan (26) mitwirkte, und die Beziehungen zu den übrigen Theorien sind in dem Bericht von Brill-Noether über die algebraischen Funktionen (D. Math. Ver. von 1893) ausführlich dargelegt. Dagegen hätten wir hier den Anteil Gordans an dem Werke zu entwickeln; aber gerade diese Aufgabe erscheint kaum durchführbar. Gordan selbst hat sich nur einmal, an seinem

*) Wiedergegeben in diesen Annalen 6, S. 199.

**) Math. Ann. 7, S. 19.

70. Geburtstage, darüber ausgesprochen*) in dem allgemeinen Sinne: „sein Zusammenwirken mit Clebsch sei eine glückliche Art der Arbeitsgemeinschaft gewesen, bei der ihm oft die Aufgabe zufiel, die Ideen des geistreichen Forschers in die Wirklichkeit umzusetzen.“ Diese Charakterisierung, treffend wie sie ohne Zweifel ist, gilt in erster Linie von dem gemeinsamen Werk. Clebsch hatte zwar überall die führende Rolle, aber Gordan stand von 1864 an in täglicher ununterbrochener verständnisvoller Aussprache hinter ihm als rastlos treibendes Element, dem keine Schwierigkeit unüberwindlich schien und das in sokratischer Weise Klarheit schuf. So zeugt schon der Plan zu einer selbständigen neuen Grundlegung der ganzen Theorie von einer solchen Energie und einem solchen Selbstvertrauen der beiden jugendlichen Forscher in ihre frischen Kräfte — der eine zählte erst 32 Jahre, der andere nur 27 —, daß gerade er als gemeinsames Eigentum angesprochen werden muß.

Insbesondere mag es aber der Wucht, deren die Gordansche Arbeit fähig war, bedurft haben, um zu dem Mittelpunkt der Theorie, dem 7. Abschnitt, hindurchzudringen: der Lösung des Umkehrproblems, mittels Zerlegung der Summe von Integralen 3. Gattung in zwei je nur von p Argumenten abhängige Funktionen. Übrigens ist der hierbei nach Riemann eingeschlagene Weg durch Funktionen von $p+1$ Punkten der Kurve komplizierter als der von Weierstraß.

Ferner wird man das Schlußkapitel über die unendlich vielen Formen der Thetafunktion im wesentlichen Gordan zuzuschreiben haben. Wenigstens hat er die Transformationsformel selbst, noch ohne Bestimmung der numerischen Konstanten, schon im April 1865 (2) mitgeteilt. Aber der Weg muß damals eher durch die Funktionalgleichungen der Periodizität, wie in (1) und bei Hermite und Thomae hindurchgeführt haben, als durch die Integrale 3. Gattung, wie später im Buche, da hierzu schon der 7. Abschnitt hätte fertig sein müssen. Die zur Bestimmung der 8. Einheitswurzel im Buche verwandte Methode, eine von Kronecker**) stammende Zerlegung der kanonischen Transformationsdeterminante in elementare, ist später aufgenommen worden. Die Abfassung und äußere Gestaltung des Werkes hatte Gordan, schwerfällig in der Handhabung der Feder, der Meisterhand von Clebsch überlassen.

Die „Abelschen Funktionen“ von Clebsch-Gordan haben späterhin ihre stärkste Wirkung in der Richtung der Theorie der algebraischen Funktionen ausgeübt, wenn auch das Buch selbst seine Sätze an die speziell

*) Cf. Jahresber. d. D. Math. Ver. 16, S. 328.

**) Cf. Monatsber. der Berl. Akad. von Okt. 1866 und J. f. Math. 68. Kronecker reduziert dort auf eine kleinere Anzahl von Elementartransformationen als Clebsch-Gordan.

gegebene Kurve anknüpft und noch auf dem ternär-projektiven Standpunkt steht, nicht auf dem der rationalen Transformation, wie es z. B. eine Theorie der Moduln erfordert hätte. Gordan ist nicht mehr auf die Theorie der Funktionen, auch nicht der algebraischen, zurückgekommen, die ihn doch mehr nach der Seite der Formelentwicklungen, als nach der begrifflichen Seite beschäftigt hatte. Auch der Wunsch Gordans nach Herausgabe einer zweiten Auflage des Werkes, mit dem er an den Verfasser dieses Aufsatzes herangetreten war, wurde nicht erfüllt, da der historische Charakter des Werkes nicht durch eine systematische Umgestaltung zerstört werden sollte. Gordan wandte sich vielmehr dem Gebiete zu, in dem er von nun an das Lebenselement seiner Betätigung finden sollte: *der Algebra, insbesondere der Formentheorie der linearen Transformationen.*

In Clebschs Arbeiten hatten von 1860 an die algebraischen Eliminationsprobleme aus der Theorie der Kurven und Flächen eine systematische Weiterbildung der von den Engländern und von Hesse angewendeten Methoden erfahren. Es geschah auf Grund invariantentheoretischer Begriffe, aber doch noch wesentlich unter Verwendung der mehrfach geränderten Determinanten. Zu gleicher Zeit jedoch begründete Clebsch die Aronholdsche Symbolik von 1855, legte sie den Invariantenbildungen, wenigstens bei Grundformen mit *einer* Variabelnreihe, zugrunde, und gab die Übertragungsprinzipe von $m-1$ Variabeln auf m und von Formen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades auf solche n^{ten} Grades.*)

Nach Vollendung des Werkes über die Abelschen Funktionen führte Clebsch seinen Freund in diese algebraische Welt ein, die der Art Gordans so entsprach, daß er sie sich in kürzester Zeit völlig zu eigen machte und sich nun fast ausschließlich in ihr bewegte. Denn mit der Zusammensetzung aller Invarianten aus symbolischen Aggregaten waren in der Formentheorie alle Definitionen und Operationen aus dem begrifflich-abstrakten Gebiete in das konkrete Gebiet der algebraischen Darstellung und damit in Gordans Sinn erst zur Wirklichkeit und Klarheit gebracht. Die Formel war ihm immer und überall unentbehrliche Stütze für Gedankenbilden, Schlüsse und Ausdrucksweise.

Gordan wandte sich zunächst verschiedenen Richtungen zu, in denen Clebsch arbeitete. Mit ihm zusammen erweiterte er die Begriffe der von Hermite eingeführten *typischen Darstellungen* von Formen, indem die binäre Form 5. Grades, wie bei jenem, mit linearen Kovarianten trans-

*) Nach Gordan mag in diesem Bericht überall mit „Grad" die Dimension in den Punktvariabeln, mit „Ordnung" die Dimension in den Koeffizienten der Grundformen bezeichnet werden — gerade entgegengesetzt der Bezeichnungsweise der übrigen Autoren.

formiert (4), die 6. Grades aber (ibid.) als kubische Funktion dreier quadratischer Kovarianten dargestellt wurde. (5) und (15) sind interessante Anwendungen spezieller Fälle dieser quadratischen Transformation. Eine höhere gebrochene Transformation überhaupt ist dann von Gordan in (9) zur Überführung einer Gleichung in eine solche mit speziellen Invarianteneigenschaften — analog wie von Hermite die Tschirnhausen-Transformation — weiter verfolgt worden. In der gemeinsamen Arbeit (8) über die Theorie der ternären kubischen Form wird ein kovariantes Koordinatendreieck zugrundegelegt, dessen Ecken ein beliebiger Punkt x und zwei durch lineare Zwischenformen gegebene Punkte sind; und analoge Darstellungen rationaler und irrationaler Art bieten noch (37) und (38).

Nach den gemeinsamen typischen Darstellungen von 1867, alle zu dem Zweck, die Übersicht über die rationalen Zusammenhänge der zu einer Grundform gehörigen Formen zu erschließen, wandte sich Gordan der Ausbildung des von Clebsch den Invariantenbildungen zugrundegelegten *symbolischen Kalküls* zu. Er nahm dessen geometrische Eliminationsprobleme auf, um zu zeigen (7), daß die Anwendung einfacher symbolischer Identitäten — entsprechend den linearen Relationen, welche im n-ären Gebiet zwischen $n+1$ linearen Formen bestehen — das zweckmäßige Mittel zur Formenumwandlung abgebe. Insbesondere überwand er manche Eliminationsschwierigkeit, welche das Wegschaffen nur durch die Methode hereingebrachter Faktoren bot, so in (22) bei der Aufstellung der Gleichung für die Pentaederebenen der Fläche 3. Ordnung; und auch einige Arbeiten von Schülern Gordans gehören hierher.

Aus dem symbolischen Apparat heraus entwickelte Gordan — in dem schon genannten Aufsatz (9) von Jan. 1868 — den Keim zu einem Fortschritt, der weit über jenen Apparat hinaus eine methodische Bedeutung für die Invariantentheorie gewinnen sollte: die sog. *Clebsch-Gordansche Reihenentwicklung.* Er gelangt da für die binäre Grundkombinante bei zwei Variabelnreihen

$$\Theta(x, y) = m(y)\,l(x) - l(y)\,m(x)$$

zu einer normierten Reihenentwicklung nach Potenzen von $(xy) \equiv y_2 x_1 - y_1 x_2$:

$$\Theta(x, y) = \sum_\nu C_\nu (xy)^{2\nu+1} \vartheta^\mu_{x,\nu}\, \vartheta^\mu_{y,\nu}.$$

Die Koeffizienten sind dabei eindeutig definiert als *Polaren* von y in bezug auf Formen mit nur *einer* Reihe x:

$$\vartheta_\nu^{2\mu}(x) = (lm)^{2\nu+1}\, l_x^\mu m_x^\mu,$$

die selbst die einfachsten, in den Koeffizienten von l sowohl, als von m linearen Bildungen sind. Diese Formen in x aber waren schon bei Cayley

aufgetreten, aus Polaren $l_x^\mu l_y^{n-\mu}$ von l dadurch abgeleitet, daß die Produkte der y durch kogrediente $(n-\mu)^{\text{te}}$ Differentialquotienten von m ersetzt werden; sie wurden von Gordan plastisch „Übereinanderschiebungen", später „Überschiebungen" von m über l genannt.

Die Methode, die Gordan bei der alternierenden Form $\Theta(x, y)$ zu der Reihenentwicklung führte, besteht hier nur in Anwendung des binomischen Satzes auf die einzelnen symbolischen Faktoren und ferner in der symbolischen Umwandlung von Polarengliedern, welche letztere schon für sich den Existenzbeweis der Reihe ((11), § 2) gibt. Und ganz dieselben Operationen führen ihn 1870 in seiner Resultantenarbeit (18) zu der entsprechenden normierten Reihenentwicklung für alle binären Formen mit zwei Reihen kogredienter Variabeln: symbolisch $r_x^n s_y^m$; hierbei werden dann die sogenannten „Elementarkovarianten" $(rs)^k r_x^{n-k} s_x^{m-k}$ so verwendet, wie vorher die $\vartheta_\nu(x)$.

Inzwischen, vor Herbst 1870, hatte auch Clebsch die Reihenentwicklung hergestellt*), indem er statt der symbolisch gebildeten Elementarkovarianten durch den Prozeß Cayleys

$$\Omega \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2\, \partial y_1}$$

und durch Polarenprozesse alle invarianten binären Formen von zwei Variabelnreihen in Normalformen von solchen überführte, also $r_x^n s_y^m$ zunächst in $(rs) r_x^{n-1} s_y^{m-1}$, dann in die Elementarkovariante $(rs) r_x^{n-1} s_x^{m-1}$. Von Clebsch nahm Gordan diesen Differentiationsprozeß auf ((21) Okt. 1871), um daraus die Eindeutigkeit der normierten Entwicklung zu beweisen und ihre Zahlenkoeffizienten zu bestimmen. Die wirkliche Bedeutung des Ω-Prozesses ist die, daß das identische Verschwinden von $\Omega\varphi(x, y)$ die doppelt-binäre Form $\varphi(x, y)$ als *Polare* charakterisiert, und daß also gerade der Ω-Prozeß nötig wird, um irgend eine doppelt-binäre Form mod. (xy) einer Polaren äquivalent zu machen. Aber diese Bedeutung hat sich erst aus den Arbeiten von Clebsch von 1872 über die Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, und zwar im n-ären Gebiet bei der Reduktion auf Normalformen von Formen mit irgend welchen Reihen von Variabeln, nach und nach ergeben. Bei Gordan erscheint sie in seiner Programmschrift von 1875 (IV, § 19), wo Normalformen durch noch erweiterte Ω-Prozesse definiert werden. Die volle Zurückführung der Bedeutung von

$$\Omega\varphi(x, u) \equiv \sum \frac{\partial^2 \varphi(x, u)}{\partial x_i\, \partial u_i} = 0$$

*) Veröffentlicht in seinem Buche über binäre Formen zu Beginn 1872; Vorwort von Sept. 1871.

(21), wo die u_i kontragredient zu den x sind, auf den *Polarenbegriff* ist erst 1887 erfolgt, als Mertens*) nach Ersatz der u_i durch Unterdeterminanten $(x_k y_l \cdots)$ einen zugehörigen Polarisationsprozeß einführte; was dann noch eine Weiterführung der Prozesse im Gefolge hatte. Es zeigte sich aber auch, daß der Ω-Prozeß, angewandt auf irgend ein Koeffizientenaggregat der linear transformierten Formen, *alle* invarianten Bildungen erzeugte, und nur diese; dies wurde sogar für Gordan in seinem Buche (V) die einzige Grundlage für die Möglichkeit der symbolischen Darstellung dieser Bildungen; für die weiteren Forscher diente der Prozeß selbst wieder, dem Cayleyschen Standpunkt von 1846 entsprechend, als Äquivalent für die Symbolik überhaupt.

Wenn bezüglich der Veröffentlichung der Reihenentwicklung Gordan zweifellos die Priorität gebührt, so hat er doch gern die Gleichzeitigkeit der Auffindung von seiner und Clebschs Seite betont, sowohl mündlich, als schon in (17) (Sept. 1870), als auch in dem Nachruf auf Clebsch ((26), S. 43) und in seinem Buche (V, Bd. II, S. 86), welches in der Darlegung dem durchsichtigen Gange von Clebsch folgt. Die hohe *theoretische* Bedeutung der Reihenentwicklung selbst aber bleibt darin bestehen, daß sie unmittelbar die Formentheorie aller Formen mit beliebigen Reihen von n-ären Variabeln auf die der simultanen Grundformen mit $n-1$ Reihen von Variabeln zurückführt.

Aus den Arbeiten am symbolischen Kalkül und der Reihenentwicklung heraus erhob sich Gordan 1868 (11) und 1869 (16) unmittelbar zum Höhepunkt seiner invariantentheoretischen Leistung, ja seines Schaffens überhaupt: zu dem *Gordanschen Endlichkeitstheorem.* Es besteht in dem Nachweis einer *endlichen* Basis für die Formen eines jeden Grundsystems binärer Formen.

Cayley hatte in seinem Second Memoir upon Quantics**), von der Definition der Kovarianten einer binären Form durch partielle Differentialgleichungen ausgehend, die Frage gestellt, ob die solchen Gleichungen eventuell genügenden Polynome eine endliche Basis von Formen haben, aus der sich alle als ganze Funktionen mit bloß numerischen Koeffizienten ableiten lassen; und er glaubte die Frage im allgemeinen verneinen zu sollen, insbesondere auch für das Kovariantenproblem. Seine Vermutung beruhte auf unbewiesenen Abzählungen. Da trat Gordan 1868 mit dem Beweise hervor, daß für eine binäre Grundform $f(x)$ in jedem Falle eine solche begrenzte Basis existiere: ein „vollständiges" oder „volles" Formen-

*) „Über invariante Gebilde ternärer Formen", Wiener Sitzungsb. 95.

**) Phil. Transactions 146 (1856); Papers, II, Nr. 141.

system von f. Und zwar lieferte der Beweis zugleich — was für Gordans Anschauungsweise wesentlich war — die wirkliche Bildung eines vollen Systems. Die Reduktion auf ein kleinstes solches System wäre dann nur Sache des Kalküls.

Die beiden Beweise Gordans haben im wesentlichen denselben Gedankengang, nur ist er im zweiten, durch explizite Ausdehnung auf mehrere, simultan gegebene Grundformen und durch den Begriff des relativ-vollständigen Systems, viel durchsichtiger geworden. Wenn wir nun hier, der Bedeutung gemäß, welche das Verfahren in Gordans ganzer Lebensarbeit gewonnen hat, versuchen wollen, eine Vorstellung von dem Beweisgang zu geben, so halten wir uns vorzugsweise an die zweite Arbeit (16).

Unter einem „relativ-vollständigen System $A_1, \cdots, A_\varrho$ der Grundformen $f_1, f_2, \cdots$, modulo $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$“ wird verstanden, daß alle zu den f gehörigen invarianten Formen sich in der Gestalt

$$G(A) + P(\varphi)$$

darstellen lassen, nämlich als ganze Funktionen der A mit numerischen Koeffizienten, bis auf einen Ausdruck P, der in jedem Glied Koeffizienten der φ enthält. In der Absicht, induktive Schlüsse von n auf $n+1$ zu machen, geht Gordan schrittweise von Formen niedrigerer Ordnung, oder Grad, oder Überschiebung zu höheren solchen fort und stellt so Sätze der Art auf:

I. Sämtliche invariante Bildungen m^{ter} Ordnung in den Koeffizienten von f lassen sich durch Überschiebung von f über Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ableiten; daher lassen sich sämtliche zu f gehörigen Formen nach und nach durch Überschiebungen mit f bilden.

II. Sei für eine Grundform $f(x)$ vom n^{ten} Grad W das „übernommene“ System, d. h. aus dem vollen zur ersten Polaren $\sum \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} y_i$ gehörigen System dadurch erhalten, daß man auch die y noch durch x ersetzt. Die W bilden für f ein relativ-volles System, mod. einer Formenreihe χ, K; wobei die χ die k^{ten} Überschiebungen von f über sich selbst für $k > \frac{n}{2}$, K dasselbe für $k = \frac{n}{2}$ (wenn $n = 4\nu$) ist.

III. Besitzt die Reihe $f_1, f_2, \cdots$ ein mod. der Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ relativ-volles System A, die Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ aber ein absolut-volles System B, so besitzt auch die simultane Reihe $f_1, f_2, \cdots, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$ ein volles System C. C besteht aus den A, den B, und einer begrenzten Anzahl weiterer Bildungen, welche sämtlich Überschiebungen von Produkten der A über Produkte der B sind.

Der erste Satz ist nichts weiter als eine Anwendung der Reihenentwicklung: es wird jede Kovariante $\Phi(x)$ von $f(x)$ erst durch eine Form $\vartheta(x, y)$ ersetzt, für welche $\vartheta(x, x) \equiv \Phi(x)$ ist, diese nach Potenzen von (xy) normiert entwickelt und endlich die Produkte der y durch kogrediente Differentialquotienten von $f(x)$ ersetzt. Zugleich liefert der Satz eine *Anordnung* aller zu f gehörigen Bildungen, beginnend mit f selbst.

Um den zweiten Satz einzusehen, hat man zunächst zu bemerken, daß die k^{ten} Überschiebungen von f über sich selbst für $k < \frac{n}{2}$ zu den W gehören. Der übrige Teil des Satzes ergibt sich, indem man ihn für die Formen niedrigerer Ordnung als richtig voraussetzt und dies auf den im ersten Satze geleisteten Ausdruck einer Form m^{ter} Ordnung $\Phi(x)$ anwendet. Nach und nach kommt man so, außer auf Formen W, nur auf Formen 2^{ter} Ordnung.

Für den dritten Satz genügt es, die Produkte der A über die der B zu schieben, da in den Überschiebungen der $P(B)$ über Produkte der B die A in niedrigerer Ordnung auftreten als in der zu betrachtenden Bildung. Von jenen aber zeigt die Rechnung, daß man in den Faktorenanzahlen der Produkte gewisse einfache Grenzen nicht zu überschreiten braucht, weil sonst in den Überschiebungen immer mindestens ein Term zerfällt, die Überschiebung selbst also als reduzible zu betrachten ist.

Da nun das Gordansche Theorem für die Formen χ, ihrem Grad nach, als gültig vorausgesetzt wird, so liefern, wenn K nicht vorhanden ist $(n + 4\nu)$, die Sätze II und III unmittelbar das Theorem für $f(x)$. Aber auch wenn K, vom selben Grad wie f, existiert, hat man einen Abschluß; denn macht man in bezug auf K dieselbe Betrachtung wie vorher für f, so tritt im Satze II in den Modul der χ, K an Stelle von K nur eine *Invariante* J, die n^{te} Überschiebung von K über f.

Wir weisen noch darauf hin, daß — was von Gordan nicht explizite ausgesprochen wird — unter dem vollen System der χ dasjenige verstanden ist, welches bei Auffassung aller Koeffizienten der χ als unabhängiger Unbestimmter gebildet werden kann. Da aber diese Koeffizienten von den Koeffizienten (a) der Grundformen f abhängen, sind sie nicht voneinander unabhängig; und die vorkommenden identischen Relationen sind als identische in den Unbestimmten (a) aufzufassen, nachdem man in dem System der χ die Koeffizienten durch die (a) ausgedrückt hat.

Solche Funktionen der Koeffizienten der χ, die bei deren formaler Auffassung als Unbestimmter nicht-invariant sind, wohl aber vermöge der Parameterdarstellung durch die (a), also erst für die $f_1, f_2, \cdots$, invariant werden, treten in dieser Untersuchung Gordans also nicht auf.

Und wir mögen überhaupt hier darauf hinweisen, daß Gordan bei

der Systembildung *spezieller* Formen — wie sie z. B. weiterhin in der Gleichungstheorie auftreten — immer nur die nach der allgemeinen Vorschrift formal gebildeten Invarianten in Betracht zu ziehen pflegte. —

Gordan hat 1872 (in (23) und (24)) durch Einführung des Verhaltens der *nicht-negativen* ganzzahligen Lösungen eines Systems diophantischer Gleichungen den Beweis seines Theorems noch beträchtlich durchsichtiger gemacht. Er gibt hier den Satz, daß sich alle derartigen Lösungssysteme aus einer endlichen Anzahl solcher Lösungssysteme additiv zusammensetzen lassen: was wir als *„speziellen Gordanschen Endlichkeitssatz"* bezeichnen mögen.

Wenn nun in dem mit III bezeichneten Satze ein Produkt

$$\Pi(x) = A_1^{h_1}(x) \cdots A_\varrho^{h_\varrho}(x) \qquad [A_i \text{ vom Grade } m_i]$$

über ein Produkt

$$\Pi'(y) = B_1^{k_1}(y) \cdots B_\sigma^{k_\sigma}(y) \qquad [B_j \text{ vom Grade } n_j]$$

m-mal geschoben wird, so wird die resultierende Überschiebung in x und y bezüglich von den Graden

$$N_1 = \sum h_i m_i - m, \qquad N_2 = \sum k_j n_j - m.$$

In diesen beiden Gleichungen, in welchen die m_i, n_j gegebene Zahlen sind, entspricht nicht nur jeder der genannten Überschiebungen ein bestimmtes nicht-negatives Zahlensystem h_i, k_j, m, N_1, N_2; sondern auch umgekehrt. Denn die Differenz zweier zum selben Lösungssystem gehöriger Formen wird eine Form von denselben Ordnungen, wie jede dieser Formen, aber von höherem Gewichte — d. i. die Potenz, in welcher bei linearer Transformation die Determinante derselben als Faktor vortritt; bei symbolischer Darstellung also die Anzahl der Klammerfaktoren —; ist daher in Gordans Anordnung eine frühere, im System wegzulassende Form. Einem in zwei Faktoren zerfallenden Gliede einer Überschiebung entspricht so die additive Zusammensetzung eines Lösungssystems der beiden Gleichungen aus zwei einfacheren, und umgekehrt. So folgt aus dem „speziellen Endlichkeitssatz", daß die Anzahl der in Satz III zu berücksichtigenden Überschiebungen eine endliche ist.

Während alle bisher angeführten Systemsbetrachtungen zwar von ihrem Urheber aus der symbolischen Darstellung der Formen gezogen worden sind, aber — wie unsere Darlegung erkennen lassen wird — im Grunde von ihr gar nicht abhängen, hat nun Gordan in seiner Programmschrift (IV) von 1875 zur Grundlage seiner symbolischen Operationen einen Prozeß, *„Faltung"* genannt, eingeführt, der nur symbolisch als primärer zu bezeichnen ist: es wird ein Produkt $a_x b_x$ durch einen Klammerfaktor (ab) ersetzt. Unsymbolisch setzt sich die Faltung, nach der Theorie der normierten Reihenentwicklungen, aus einer Reihe von Prozessen zu-

sammen, nämlich aus einer Summe von Überschiebungen. Und umgekehrt setzt sich auch jede Überschiebung, symbolisch dargestellt, aus einer Summe von Faltungen zusammen — analog wie ein Polarenprozeß, auf ein Produkt angewandt, eine Summe von Polarbildungen liefert. Dieser symbolische Prozeß dient Gordan zu einer Anordnung der Formen des Systems nach den in ihnen enthaltenen Exponenten von Klammerfaktoren, sowie zur Aufstellung von symbolischen *Reduzenten*, d. h. eines Produktes von Klammerfaktoren, welches als Faktor in einer Form auftretend, dieselbe vermöge „früherer“ Formen reduzibel macht. So wird denn jetzt in den angeführten Sätzen I, II, III der Begriff des relativ-vollständigen Systems auf Moduln ausgedehnt, die gegebene Klammerprodukte sind. Und es werden nun, statt der dortigen Systeme f; $\chi, K; \cdots$ sukzessive folgende Systeme eingeführt, wenn $f = a_x^n = b_x^n = \cdots$ und $(\varphi, \psi)^k$ die k^{te} Überschiebung von φ über ψ bedeutet:

$A^{(0)} = f,$ vollständig mod. $(ab)^2$;

$B^{(0)} = (f, f)^2 = f_2,$ „ „ $(ab)^4$;

$A^{(1)} = f, f_2, (f, f_2),$ „ „ $(ab)^4$;

$B^{(1)}$, ein Bildsystem von $A^{(1)}$, gebildet an $(f, f)^4 = f_4$, wie $A^{(1)}$ an f, nämlich

$B^{(1)} = f_4, (f_4, f_4)^2 = f_{4,2}, (f_4, f_{4,2}),$ vollständig mod. $(ab)^6$;

$A^{(2)}$, entstehend aus Überschiebung von $A^{(1)}$ mit $B^{(1)}$, vollständig mod. $(ab)^6$; usw. Das System $A^{(\nu)}$ dient als Vorbild für das Bildsystem $B^{(\nu)}$, so lange $\nu \gtreqless \frac{n}{4} - 1$ ist; für größere ν wird als Vorbild des Systems $B^{(\nu)}$ das vollständige System einer Form vom Grade $2(n - 2\nu - 2) > n$ benutzt. Das letzte so erhaltene System $A^{(\nu)}$, für $\nu \gtreqless \frac{n}{2}$, ist dann das vollständige System von f.

Vom symbolischen Standpunkt aus war nun durch diese sukzessive Systemsbildung — abgesehen von der auch hier noch notwendigen Herübernahme von Systemen, die zu Grundformen niedrigeren Grades als f gehören — die (symbolische) Struktur des vollen Systems von f übersichtlich geworden. Und der in der Einleitung der Programmschrift (IV) getane Ausspruch: „Je mehr die Wissenschaft fortschreitet, umsomehr wird es möglich, die Resultate, welche sich sonst nur durch längere Zwischenbetrachtungen beweisen ließen, unmittelbar einzusehen: und man wird einen mathematischen Gegenstand erst dann als erledigt betrachten, wenn dieses Ziel erreicht ist“, konnte besonders in der vereinfachten und klaren Darstellung des 2^{ten} Bandes der „Vorlesungen“ (V) annähernd als erfüllt angesehen werden.

Da war es ein eigentümliches Zusammentreffen, daß gerade mit dem Abschluß des Beweises in diesem Buche*) ein Beweis des Gordanschen Theorems erscheinen sollte, der vom Gordanschen „speziellen Endlichkeitssatz“ ausging, im übrigen aber einen Weg nahm, der den obigen Ausspruch in idealer Weise bestätigen sollte.

Im Juli 1885 hat Mertens**) einen solchen Beweis erbracht. Er verläßt dabei die Aronholdsche Symbolik, benutzt aber die Gaußsche***), welche ohne Voraussetzung der Wurzelexistenz die Wurzeln durch Unbestimmte ersetzt — ein Hilfsmittel, das übrigens ohne Einfluß auf den Gang des Beweises ist. Der Gedankengang besteht wesentlich im Übergang von den Invarianten einer binären Form vom Grade $n-1$ zu denen einer durch Zufügung eines linearen Faktors entstehenden Form vom Grade n, wobei letztere noch durch n Permutationen für den linearen Faktor zu einer allgemeinen Form $f_n(x)$ vom n^{ten} Grade gemacht wird.

Kurz darauf haben Mertens†), und unabhängig davon Hilbert††), denselben Gedankengang noch dadurch übersichtlicher gemacht, daß sie die Form $f_n(x)$ direkt in alle ihre n Linearfaktoren zerlegen und jede Invariante J von $f_n(x)$ als ganze Funktion aller homogen gemachten Wurzeldifferenzen ansetzen. In dieser einfachsten Gestalt läßt sich nun der Beweis in einige Zeilen zusammenfassen:

Für irgend ein Anfangsglied Ω, aus welchem durch die $n!$ Permutationen alle Glieder von J additiv hervorgehen, ergeben die Gewichtsbedingungen ein System von diophantischen Gleichungen, deren nicht-negative Lösungen sich — nach dem speziellen Endlichkeitssatz von Gordan — aus m Grundlösungen additiv zusammensetzen mögen. Wenn der i^{ten} Grundlösung ein Anfangsglied ω_i entspricht, so stellt sich Ω als Potenzprodukt dieser m Größen ω_i dar. Aus ω_i ist durch die $n!$ Permutationen eine Größenreihe von $n!$ Gliedern zu bilden; dann werden aber die Invarianten J von $f_n(x)$ simultan-symmetrische Funktionen dieser m Größenreihen. — Nun ist es ein bekannter Satz, daß die simultan-symmetrischen Funktionen von Größenreihen eine endliche Basis haben, durch die sich alle derartigen Funktionen rational und ganz darstellen lassen. Diese ist also hier die gesuchte Basis für alle Invarianten von $f_n(x)$.

Damit ist also nicht nur der Beweis selbst auf zwei einfache End-

---

*) Siehe V, Bd. 2, S. 236, Anm.

**) „Beweis, daß alle Invarianten und Kovarianten eines Systems binärer Formen ganze Funktionen einer endlichen Anzahl von Gebilden dieser Art sind“. J. f. Math. 100 (1887).

***) Im zweiten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Werke II, S. 31).

†) Wiener Sitzungsber. vom 24. Jan. 1889.

††) Math. Ann. 33; dat. März 1888, erschienen im Jan. 1889.

lichkeitssätze zurückgebracht; man könnte ihn auch als rechnerisches Mittel zur Bildung eines vollen Systems gebrauchen, das im einzelnen Falle noch bedeutende Abkürzungen zuließe. Der Beweis kann jetzt geradezu als ein elementarer bezeichnet werden.

Über die binären Formen hinaus haben die analogen symbolischen Methoden Gordan nur noch in einigen Fällen zum Beweis und zur Aufstellung eines vollen Systems gelangen lassen, hauptsächlich wegen der großen Komplikation, die durch die Mehrheit nicht kogredienter Variabelnreihen entsteht. So bildet Gordan (14) für die allgemeinen kubischen ternären Formen ein volles System von 34 Formen, dessen Formenzusammenhänge er dann, gemeinsam mit Clebsch, in (25) entwickelt. Auch werden, wieder gemeinsam mit Clebsch (13), die allgemeinen Prinzipien der Betrachtung auf eine ternäre Grundform ausgedehnt, welche die Punkt- und Linienvariabeln enthält; und für den Fall, daß die beiden Grade gleich 1 sind — also für die ebene Kollineation, für die auch geometrisch interessante Entwicklungen erhalten werden —, wird sogar das volle System aufgestellt. Dem simultanen System zweier quadratischer ternärer Grundformen konnte Gordan eine Durcharbeitung geben (38), wie viel später noch (78) dem zweier quadratischer quaternärer Formen. Endlich bewältigte er auch (36) das System der Kleinschen ternären biquadratischen Form, für welche eine gewisse doppeltquadratische Zwischenform identisch verschwindet, und gewann damit auch ein wenigstens relativ-volles System für die allgemeine ternäre biquadratische Grundform.

Während so für Grundformen mit mehr als zwei homogenen Variabeln die symbolischen Methoden im allgemeinen versagten, und ebenso die auf Definition durch symmetrische Funktionen beruhenden Methoden, sollten neue Begriffe und Methoden, die im Prinzip an Kronecker anknüpften, auch für das weiteste Gebiet die Gültigkeit des Gordanschen Endlichkeitstheorems aufweisen. 1890*) entwickelt Hilbert einen sehr allgemeinen Endlichkeitssatz, wonach für ein ganz beliebig gegebenes System von homogenen Formen F stets ein endlicher *Modul* $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$, aus Formen des Systems gebildet, existiert, in dem alle F enthalten sind (mit Koeffizienten, die ganze Funktionen der Variabeln sind). Insbesondere ist dies für das System aller Invarianten J von Grundformen $f_1, f_2, \ldots$, die J betrachtet als homogene Formen in den Koeffizienten der $f_1, f_2, \ldots$, der Fall. Hat man aber den Modul von Invarianten $(i_1, \ldots, i_m)$, durch die sich alle J in der Gestalt $\Sigma A_k i_k$ darstellen, so können, nach einem zweiten Hilbertschen Satze, der auf Anwendung des invariantenerzeugenden Pro-

*) „Über die Theorie der algebraischen Formen"; insbesondere Abschn. V „Die Theorie der algebraischen Invarianten". Math. Ann. 36. Vorläufige Mitteilung in Gött. Nachr. von 1889.

zesses Ω beruht, die A_k durch Invarianten J_k der $f_1, f_2, \ldots$ ersetzt werden. Und da dann diese J_k von niedrigerer Ordnung in den Koeffizienten der $f_1, f_2, \ldots$ sind als J selbst, so ergibt die Wiederholung des Schlusses die $i_1, i_2, \ldots, i_m$ als volles System für die Invarianten der $f_1, f_2, \ldots$.

Gordan — anfänglich diesen begrifflichen Deduktionen gegenüber mehr ablehnend: „das ist keine Mathematik, das ist Theologie!" — ist dann zweimal (53), (69) dem diesem Beweise zugrunde liegenden Hilbertschen Endlichkeitssatze nähergetreten, indem er die gegebenen Formen F nach verschiedenen Kriterien in eine Reihe anordnete, die das Bilden eines endlichen Moduls aus ihnen deutlich machte; das erstemal in komplizierterer Weise speziell für die Invariantenformen, das zweitemal allgemein und einfach.

Auch für einen erweiterten Formenbegriff, nämlich für beliebige Grundformen mit mehreren, *unabhängig* voneinander transformierten Variabelnreihen, hat, im Anschluß an vorbereitende Arbeiten von Study (Erl. Ber. 19 (1887)) und von Gordan ((47), (50); s. auch (21)), Hilbert (l. c.) das Endlichkeitstheorem bewiesen.

Da das Formensystem von Grundformen einen algebraischen Funktionenkörper bildet, so lag es auch nahe, die ganze Endlichkeitsfrage unter den höheren Gesichtspunkt der Bestimmung der *ganzen algebraischen Funktionen* eines solchen Körpers und des dafür geltenden Kroneckerschen Satzes vom endlichen Fundamentalsystem zu rücken. Dies ist Hilbert (Math. Ann. 42 (1893)), aber unter Voraussetzung des Endlichkeitssatzes für Invarianten, gelungen, während ein letzter Schritt auch diese Voraussetzung auszuschließen hätte.

Durch solche Überlegungen allgemeinerer Art ist in dem Beweisverfahren über die Endlichkeit des Systems nach und nach die Symbolik zurückgetreten; nicht aber in der rechnenden Herstellung des Systems, da die Symbolik eben dem spezifischen Charakter der formalen Invarianten angepaßt ist. In dieser Beziehung haben wir noch auf einige Einzeluntersuchungen Gordans hinzuweisen.

Im II. Bande der „Vorlesungen", Nr. 117, wird mittels der Reihenentwicklung bewiesen, daß *jede* Relation zwischen invarianten binären Formen durch Rechnen mit den symbolischen Identitäten allein erhalten, d. h. daß der verschwindende Ausdruck in eine Summe zerlegt werden kann, von der jedes Glied eine der Identitäten zum Faktor hat. Auch diese Betrachtung hat ihre Fortführung erfahren, zunächst durch Study*) für ternäre Formen, bei denen bereits eine Anzahl verschiedener Grundidentitäten auftreten.

*) Math. Ann. 30 und „Methoden zur Theorie der ternären Formen", Leipzig, Teubner 1889.

Einen Fortschritt anderer Art, der von Bedeutung auch für den Begriff der Systemsbildung ist, hat Gordan schon 1871 in seiner Abhandlung über *Kombinanten* (21) gemacht. Es handelt sich um diejenigen invarianten Bildungen bezüglich eines Grundsystems von p n-ären Formen gleichen Grades, $f_1(x), \ldots, f_p(x)$, welche nicht nur bezüglich linearer Substitutionen der x, sondern auch für lineare Substitutionen der λ in $\Sigma \lambda_i f_i(x)$ invariant sind, ohne die λ zu enthalten. Der Satz Gordans ist: daß die Kombinanten schon für sich ein vollständiges System von solchen besitzen.

In der Tat wird eine Kombinante von $f_1, \ldots, f_p$ eine ganze Funktion der Invarianten einer Reihe von Linearformen, und damit weiter eine invariante Form einer bestimmten Grundkombinante, der Determinante

$$P(y) = \sum \pm f_1(y^{(1)}) \ldots f_p(y^{(p)})$$

mit p Reihen $y^{(i)}$ von Variabeln (für spezielle binäre Formen auch schon in (8) und (9) erhalten). Vermöge der Reihenentwicklungen folgt für binäre Formen sogar weiter, daß $P(y)$ sich durch eine endliche Anzahl von, nur von je einer Reihe x abhängender Grundkombinanten ersetzen läßt; wonach in diesem Falle die Endlichkeit ihres vollen Systems auch nach Gordan bewiesen ist.

In seinen „Vorlesungen", (Bd. II, S. 6) hat dann Gordan die Definition einer Kombinante Q der f_i noch durch $\sum \frac{\partial Q}{\partial a_k} a_k' = 0$ ersetzt, wo die a_k, a_k' die Koeffizienten je zweier der Formen f_i vorstellen. Diese Definition tritt an Stelle der früheren, wenn die Koeffizienten der f_i nicht voneinander unabhängig sind.

Kombinantenuntersuchungen sollten auch vorzugsweise den lange vorbereiteten Stoff*) für den III. Band der „Vorlesungen" bilden, der den ternären Formen gewidmet werden sollte. Auch war die Bearbeitung dieses Bandes erst seitens des verdienten Herausgebers der beiden ersten Bände, dann von anderer Seite, in Angriff genommen; aber beide Male wurde sie abgebrochen, mehr aus äußeren Gründen als wegen der inzwischen eingetretenen Fortschritte allgemeinerer Begriffsentwicklungen.

Wir haben durch Heranziehen der Systemsarbeiten Gordans auch nach 1874 schon weit über seine Gießener Zeit hinübergegriffen und kommen nun auf sie zurück.

In Gießen war Gordan mit Clebsch nicht nur durch engste Freundschaft und durch ununterbrochene gemeinsame wissenschaftliche Forschung

*) Eine Reihe hierher gehöriger Hefte befindet sich unter den hinterlassenen Manuskripten Gordans; diese sind der Universitätsbibliothek von Erlangen übergeben worden.

verbunden, sondern auch durch Mitarbeit an den Unterrichtszielen Clebschs. Dieser erkannte die unablässige Tätigkeit Gordans im Lehramt voll an und zog ihn zu den Seminarübungen heran. Die mathematische Ausbildung der Forststudierenden fiel ihm zum großen Teil zu. Insbesondere durch seine überaus lebhafte Art gewann er damals schon die Zuneigung der Studierenden, wie das auch späterhin immer der Fall war. Eine äußere Anerkennung erfolgte schon Ende 1865 durch Ernennung zum nichtetatsmäßigen außerordentlichen Professor, 1868 die Gewährung eines Gehalts, das 1872 aufgebessert wurde.

Im Januar 1869 vermählte sich Gordan mit Sophie Deurer, zu Heidelberg geboren als Tochter des dortigen Professors, nachmaligen Gießener Ordinarius des römischen Rechtes, Wilhelm Deurer. Aus der Ehe ist ein Sohn, Paul, hervorgegangen, jetzt höherer Beamter im Nahrungsmittelwesen in Danzig; und auch eines Enkelsohnes konnten sich die Großeltern erfreuen.

Der Weggang Clebschs im Herbst 1868 änderte nichts an den Beziehungen zwischen Beiden bis zu dem vier Jahre später erfolgten Tode des Ersteren. Aber Gordans Verhältnisse in Gießen fingen an unerquicklich zu werden. So kam ihm eine auf den 1. Oktober 1874 erfolgte Berufung an die Universität Erlangen gelegen, zunächst auf das neugegründete Extraordinariat, das er nach Wegberufung von Klein nach München, wohin auch Brill kam, schon am 1. April 1875 mit dem Ordinariat vertauschen konnte, während Noether Gordans Nachfolger in Erlangen wurde. Die Tradition der Clebschschule ging damit wesentlich auf Erlangen-München über.

In Erlangen fand Gordan bald Anregung zu neuer algebraischer Arbeit. Zunächst konnte er durch die im Winter 1874/75 daselbst erfolgte Berührung mit F. Lindemann, der mit der Bearbeitung von Clebschs Vorlesungen über Geometrie beschäftigt war, auf einige Kapitel dieses Werkes einwirken, wie bez. (38) schon S. 17 angegeben ist. Sodann bemühte er sich in glücklichster Weise um Hesses noch unerledigten Satz, daß eine Form von n Variabeln, deren Hessesche Determinante identisch verschwindet, sich linear in eine solche mit weniger Variabeln überführen lasse, d. h. daß die zwischen den n ersten Polaren der Form bestehende Relation $\pi(f_1, \ldots, f_n) = 0$ eine lineare sei. Durch Noether angeregt, der schon eine Reihe ganz verschiedener Beweisversuche angestellt hatte, schlug nun Gordan jene Relation selbst als Ausgangspunkt eines neuen Versuches vor und konnte so für den ternären Fall den Satz Hesses rechnerisch erschließen (28). In gemeinsamer schwieriger Untersuchung (29) ergaben sich dann für die aus Geraden zusammengesetzten Mannigfaltigkeiten Φ, welche, wie f, der Gleichung $\sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \pi}{\partial f_i} = 0$ genügen und von

$n-1$ Variabeln rational abhängen, genügend viele Struktureigenschaften, um für $n=3$ und 4 die Gültigkeit des Satzes unmittelbar erkennen zu lassen, für $n>4$ aber die Ungültigkeit. Auch konnte noch ein Formentyp, für $n=5$ der einzige existierende, aufgestellt werden, der Hesses Behauptung nicht entspricht.

Eine viel tiefere und nachhaltendere Bedeutung hat aber das Zusammenwirken mit F. Klein im Wintersemester 1874/75 und das nachfolgende häufige Zusammentreffen der beiden Forscher — besonders in Eichstätt: „mathesis Quercupolitana" nach Gordans Ausdruck — gewonnen. Und zwar nach zwei Richtungen hin: einmal durch die immer ermutigende, in allen Schwierigkeiten noch Wege findende *Einwirkung* von seiten Gordans, wie sie aus seiner durchdringenden Auffassung und seinem vorwärts treibenden Wesen hervorging; sodann durch seine rechnerisch ausführende *Mitwirkung* an der algebraischen Seite der von Klein damals und eine Reihe von Jahren hindurch behandelten Probleme aus der Gleichungs- und Funktionentheorie. Die erstere Richtung entzieht sich, in ihren unbestimmten Linien, der Berichterstattung, so eingreifend sie gelegentlich war. Wir wenden uns daher direkt den hierher gehörigen Arbeiten Gordans aus der *Gleichungstheorie* zu, die nach und nach die allgemeinen Gleichungen 5^{ten} Grades, die Gleichungen 7^{ten} Grades mit Gruppe G_{168}, endlich die allgemeinen Gleichungen 6^{ten} Grades betreffen, 1877 einsetzen und bis zu seiner letzten Publikation von 1910 heraufreichen.

Indem Klein im Juni 1874 alle endlichen Gruppen von reellen Bewegungen des Raumes untersuchte, welche eine Kugel in sich überführen und ihren Fixpunkt im Innern derselben haben, indem er also die regulären Körper, insbesondere das Ikosaeder studierte, gelangte er durch Auftragen der komplexen Variabeln η auf der Kugel zu allen endlichen diskontinuierlichen Gruppen von linearen Transformationen einer Veränderlichen $\eta=\frac{\eta_1}{\eta_2}$, und zu den binären Formen von η_1, η_2, welche solche Gruppen zulassen. Zu jeder der 5 so erhaltenen Gruppen erschloß er aber auch das ganze zugehörige Formensystem von 3 Formen, insbesondere ein Büschel von binären Formen N^{ten} Grades $F(\eta)-X\cdot\Phi(\eta)$, dadurch daß er jeden Punkt η der Kugel allen N Transformationen der Gruppe unterwarf (X der Büschelparameter). So ergab sich für die Gruppe G_{60} von 60 Transformationen, welche den geraden Vertauschungen von 5 Größen isomorph ist, die Schar $H^3(\eta)-X\cdot f^5(\eta)$, wobei $f(\eta)$ die „Ikosaederform" 12^{ten} Grades*), $H(\eta)$ deren Hessesche Form bedeutet, und eine charakteristische Eigenschaft für f: $(ff)^4=0$. Auf Formen dieser Art war früher

*) In kanonischer Form ist

$$f(\eta_1,\eta_2)=\eta_1\eta_2(\eta_1^{10}+11\eta_1^5\eta_2^5-\eta_2^{10}).$$

schon Schwarz, nur inhomogen, und unabhängig von Klein (1875) Fuchs bei Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung, die algebraische Integrale besitzen, gestoßen, die Fuchsschen „Primformen".

Gordan nahm nun 1877 (in (32), (33)) beide Fragerichtungen auf, um sie rein algebraisch zu behandeln. Die nach den endlichen binären Gruppen führt er auf die Lösung einer Kreisteilungsgleichung

$$1 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0$$

durch rationale Vielfache von π zurück, was ihn zu einer kanonischen Darstellung aller 5 Gruppen führt. In vereinfachtem Gedankengang, der jene Gleichung und auch eine von Gordan benutzte Symbolik vermeidet, hat dann H. Weber dieses Resultat in seinem Lehrbuch der Algebra (II, Abschn. VII) wieder entwickelt.

In der zweiten Richtung identifiziert Gordan die existierenden unter den Fuchsschen Primformen mit den Kleinschen Formen, indem er die allgemeinen Systemsuntersuchungen seiner Programmschrift (IV) anwendet.

Bald ging das Interesse vom Ikosaeder und seiner Gruppe auf die damit zusammenhängende *Gleichungstheorie* über. Als Resolventen der Ikosaedergleichung 60^{ten} Grades $H^3(\eta) - X \cdot f^5(\eta) = 0$ traten bei Klein*) verschiedene Gleichungen 5^{ten} und 6^{ten} Grades auf, dieselben, welche Hermite, Kronecker und Brioschi zur Auflösung der Gleichung 5^{ten} Grades mittels elliptischer Modulfunktionen geführt hatten; für Klein aber definierte die Ikosaedergleichung an sich die sog. Ikosaederirrationalität $\eta(X)$, die sich auch durch eine hypergeometrische Reihe ausdrücken ließ. Da deutete Gordan, dessen Interesse für die Gleichungen 5^{ten} Grades schon in der Berliner Zeit von 1861/62 erwacht war, auf das umgekehrte Problem hin, die Ikosaederirrationalität *zur Auflösung der Gleichungen 5^{ten} Grades*, mit isomorpher Gruppe G_{60}, zu verwenden. So ergab sich für Klein die Aufgabe, vom Standpunkt der Ikosaederfragen aus über die vielseitigen algebraischen Formen- und Gleichungsbeziehungen, die nach und nach bezüglich der Gleichungen 5^{ten} Grades entstanden waren, auch abgesehen von den transzendenten Lösungen, eine Übersicht und für sie eine einheitliche Ableitung zu gewinnen. Und dies gelang ihm begrifflich vollständig, rechnerisch insoweit, als er die Formeln, welche den Übergang zu den gesuchten Resolventen leisten, insbesondere die Darstellung ihrer Wurzeln durch die η, teils geometrisch-konstruktiv, teils durch Rechnung mit symmetrischen Funktionen bilden konnte**).

Auch hierbei griff Gordan ein, und zwar mit Systematisierung der Rechnungen durch Formbildungsprozesse, insbesondere in seinem Auf-

*) Math. Ann. 9 (1875).

**) Math. Ann. 12 (1877); Vorlesungen über das Ikosaëder, Teubner 1884.

satz (35) vom Januar 1878 über Gleichungen 5^{ten} Grades. Klein hatte die „Hauptgleichung" 5^{ten} Grades $F(y)=0$ — für welche nämlich das 2^{te} und das 3^{te} Glied fehlen, also $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ sind — dadurch auf die Ikosaedergleichung reduziert, daß er statt der y_i die 4 in den y_i linearen und homogenen Lagrangeschen Ausdrücke p_1, p_2, p_3, p_4 einführt, welche

$$\Sigma y^2 = p_1 p_4 + p_2 p_3$$

machen, und die Parameter

$$\eta = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4}, \quad \zeta = \frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}$$

der beiden Erzeugendenscharen der Fläche 2^{ter} Ordnung $p_1p_4 + p_2p_3 = 0$ ins Auge faßte. Dann ergibt sich ζ aus η durch eine ungerade Permutation der y_i; die Gruppe G_{60} der 60 geraden Vertauschungen der y_i aber liefert eine solche Γ_{60} von 60 linear gebrochenen Transformationen von η, so daß η einer Ikosaedergleichung der genannten Art, mit einem Parameter X genügt, der eine rationale Funktion der Koeffizienten der Hauptgleichung und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante ist. Ebenso genügt ζ einer solchen Gleichung, mit einem anderen Parameter, welcher aus jenem durch Vorzeichenänderung der Quadratwurzel der Diskriminante hervorgeht. η und ζ bestimmen zusammen den Punkt y_i als Schnittpunkt der beiden Erzeugenden; es muß sich also ζ durch η und die Koeffizienten der Hauptgleichung rational darstellen lassen. Diese Darstellung hat Klein l. c. durch umständliche Rechnungen mit symmetrischen Funktionen geleistet.

Der Fortschritt Gordans in Math. Ann. 13 besteht nun darin, daß er auch hier Prozesse der Invariantentheorie zur Geltung brachte. Indem er

$$p_1 = \eta_1\zeta_1, \quad p_2 = -\eta_2\zeta_1, \quad p_3 = \eta_1\zeta_2, \quad p_4 = \eta_2\zeta_2$$

setzt, verwandelt er die Koeffizienten der Hauptgleichung in *doppelt-binäre* Formen in η_1, η_2 und ζ_1, ζ_2. Der Gedanke ist nun, die Formen als solche zweier Variabelnreihen zu behandeln, die *unabhängig voneinander* linearen Transformationen unterworfen werden, und daraus das System derjenigen von beiden Reihen abhängigen Formen zu bestimmen, welche durch gleichzeitige Anwendung der Ikosaedertransformationen der η_1, η_2, und der dazu kontragredienten der ζ_1, ζ_2 unverändert bleiben. Als eine solche Grundform ermittelte er eine einfache Form der Grade 3; 3, nämlich

$$\eta_1^3\zeta_1^2\zeta_2 + \eta_1^2\eta_2\zeta_2^3 + \eta_1\eta_2^2\zeta_1^3 - \eta_2^3\zeta_1\zeta_2^2,$$

im wesentlichen identisch mit Σy^3; indem er aber das ganze System bildete, ergab sich ihm insbesondere ein ganzes Büschel solcher doppeltbinären Formen, welche in der einen Variabelnreihe ζ_1, ζ_2 linear sind und daher, gleich Null gesetzt, den verlangten Übergang von η zu ζ und somit auch die Bestimmung der Wurzeln y_i durch die η, ζ, wirklich leisten.

In ihrer doppelten Bedeutung: für die Formentheorie an sich, sodann spezieller für die Ikosaeder- und Gleichungstheorie, steht diese Arbeit (35) mit an der Spitze der Leistungen Gordans*).

Während der Übergang von der Hauptgleichung 5^{ten} Grades zu der einparametrigen Ikosaedergleichung auf rationalem Wege bewirkt wird, tritt bei der Überführung der allgemeinen Gleichung mit Gruppe G_{60} in die Hauptgleichung bekanntlich eine Quadratwurzel auf. Diese Quadratwurzel ist eine sog. *„akzessorische" Irrationalität*, insofern sie keine rationale Funktion der Wurzeln der Gleichung 5^{ten} Grades ist. Mit ihr haben sich Klein und Gordan wiederholt beschäftigt. Daß eine solche Irrationalität zur Zurückführung der Gleichung auf eine Resolvente mit nur *einem* Parameter notwendig sei, hat Kronecker in J. f. Math. 59 ausgesprochen; der erste Beweis dieses Satzes ist aber von Klein geliefert worden, für dessen Theorie der Kroneckersche Satz einen wichtigen Teil bildet. Der Beweis**), auf dem Umstand beruhend, daß alle Ikosaederformen gerade sind, war noch kompliziert; und seine inneren Gedanken wurden erst im Verkehr mit Gordan ans Licht gebracht und dann in Math. Ann. 12, sowie im Ikosaederbuch, noch in geometrischer Einkleidung, wiedergegeben. Dem unten zitierten Berichte Kleins***) gemäß sind es die folgenden Momente:

a) Anwendung des bekannten Lürothschen Satzes (Math. Ann. 9) in der Form: Wenn eine rationale Funktion φ der Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ bei Zugrundelegung der alternierenden Gruppe der x einer 1-parametrigen Resolvente genügt, so lassen sich die Wurzeln derselben, $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ rational durch einen, in den φ_k rationalen Parameter η ausdrücken. Diese Funktion η der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ substituiert sich bei den $\frac{n!}{2}$ Vertauschungen der Gruppe linear gebrochen. Damit sind, bei der Kenntnis aller endlichen Gruppen einer Veränderlichen, schon die Fälle $n > 5$ ausgeschlossen.

b) Eine Gruppe linear-gebrochener Substitutionen für $\eta = \frac{\psi(x)}{\chi(x)}$ geht bei frei veränderlichen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ von selbst in eine holoedrisch-isomorphe Gruppe von homogenen binären Substitutionen der ψ, χ über.

c) Für $n = 5$ gibt es aber keine binäre Gruppe von 60 Substitutionen. Aus der Ikosaedergruppe Γ_{60} geht nämlich durch das Homogenisieren eine Gruppe von doppelt so hoher Ordnung, 120, hervor. Diese besitzt aber

*) Nur hält sich der Schlußteil, der auf Hermites Lösung durch elliptische Funktionen eingeht, wie diese in Jacobischer Tradition an die irrationalen Moduln, nicht an die rationalen Invarianten.

**) Sitzungsber. der Erlanger Phys.-Med. Ges. H. 9, Sitzung vom 15. Jan. 1877.

***) „Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades" vom 22. März 1905, J. f. Math. 129; abgedruckt in Math. Ann. 61.

keine Untergruppe von 60, weil schon die Achtergruppe, welche entsprechend aus der in Γ_{60} enthaltenen Vierergruppe hervorgeht, keine Vierergruppe als Untergruppe besitzt.

Demgegenüber gruppiert sich der Beweis des Kroneckerschen Satzes durch Gordan in (46)*) so:

a′) ist, nach Weglassung des Schlußsatzes von a), identisch mit a); nur noch unter ausdrücklicher Begründung der auch in a) benutzten Verallgemeinerung des Lürothschen Satzes von einer Variabeln x_0 auf n Variable. Schluß auf $n > 5$ ist nicht gezogen, weil die Kenntnis aller endlichen binären Gruppen nicht vorausgesetzt werden sollte.

b′) Wiederum identisch mit b), nur ausgesprochen für die alternierende Gruppe G_{12} von vier Veränderlichen (Tetraedergruppe).

c′) An Stelle der Gruppenbetrachtung c) wird rechnerisch aus b′) erschlossen, daß eine Funktion $\eta(x_0, \ldots, x_3)$, die sich bei der Tetraedergruppe linear-gebrochen substituiert, bei der in ihr enthaltenen Vierergruppe ungeändert bleibt.

d′) Da sich nun für $n > 4$ jede alternierende Gruppe aus Vierergruppen zusammensetzt, so bleibt η überhaupt bei dieser Gruppe unverändert; φ ist daher nichts weiter als eine alternierende Funktion von $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, also zur Resolventenbildung unbrauchbar.

Auch zum Übergang von der allgemeinen Gleichung 5ten Grades mit alternierender Gruppe zu der 1-parametrigen Brioschischen Gleichungsform, bei der das 2te und 4te Glied fehlen, gebraucht man nur die eine akzessorische Quadratwurzel. Erst wenn man weiter durch eine Substitution der Art $u = \varrho v$ den Parameter ganz auf das letzte Glied werfen will, tritt in ϱ noch eine weitere akzessorische Quadratwurzel auf: $\sqrt{f(\eta)}$ nach Klein**), also nach Gordan (35)***) $\sqrt{\gamma_1} = \sqrt{f(\eta_1, \eta_2)}$, wo γ_1 die Diskriminante nach ζ_1, ζ_2 der Form $\tau(\eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2)$, von den Graden 6; 2 bedeutet, die selbst in ζ_1, ζ_2 die Hessesche Form der in (35) zu grunde gelegten Σy^3 von den Graden 3; 3 ist.

Nun ist aber dieser Übergang schon 1878 von L. Kiepert†) durch bloße Tschirnhausen-Transformation in sehr einfacher rechnerischer Weise ausgeführt worden, die Gordans Arbeit (35) benutzt, nicht aber die eingehende letzte Quadratwurzel deutet. Wohl unabhängig von dieser Arbeit, vielmehr angeregt durch sein kurz vorher bei den Tripelgleichungen 7ten

*) Wiedergegeben in H. Webers Lehrbuch der Algebra II und in E. Nettos Vorlesungen über Algebra II.

**) Vgl. etwa Vorlesungen über das Ikosaeder, Formel (27), S. 105.

***) Vgl. (35) Tabelle S. 386.

†) In § 8 seiner Abhandlung, J. f. Math. 87.

Grades eingeschlagenes analoges Verfahren*), hat sich Gordan um Mitte der achtziger Jahre genau dasselbe Ziel gesetzt ((43) und (45)), in der Absicht, unter äußerlicher Vermeidung der Invariantentheorie einen einfach zugänglichen Weg zur Hauptgleichung und ihrer rechnerischen Lösung aufzustellen.

Zuerst benutzt er in (43) direkt die beiden linearen Faktoren der Hesseschen Form τ zur linearen Transformation der in ζ_1, ζ_2 binären Formen Σy^3, Σy^5 3ten bzw. 5ten Grades. Um aber den Gang und den Sinn von (43) und vor allem von (45) zu verstehen, wird es erforderlich, zunächst auf Kleins Gedankengang näher einzugehen.

Vom Ikosaeder ausgehend gelangt Klein zu einem Formenbüschel $y = W_1(\eta) + \lambda W_2(\eta)$ derart, daß y für jeden Wert von λ einer Hauptgleichung 5ten Grades, nun mit 2 Parametern, genügt; dann wird $t = \frac{W_2(\eta)}{W_1(\eta)}$ Wurzel einer 1-parametrigen Brioschischen Gleichung. Und da sich η mit Hilfe einer akzessorischen Quadratwurzel rational durch die Wurzeln x einer allgemeinen Gleichung $F(x) = 0$, vom 5ten Grade und der alternierenden Gruppe, ausdrückt, so hat man eine Tschirnhausen-Transformation zwischen t und x.

Gordan führt in (45) diesen Gang, im wesentlichen in umgekehrter Richtung, rechnerisch aus. Zu $F(x) = 0$ wird direkt eine Tschirnhausen-Transformation

$$y = \varphi(x) + \lambda\psi(x)$$

daraus definiert, daß y für jeden Wert von λ einer Hauptgleichung genügen soll, wobei zur Auflösung der Relationen für die Koeffizienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nur die eine akzessorische Quadratwurzel nötig wird. Auch dann würde $t = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ zu einer 1-parametrigen Brioschischen Gleichung führen, Gordan macht aber hier einen Umweg. Zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ besteht nämlich eine quadratische nicht homogene Relation $\Phi(\varphi, \psi) = 0$, welche durch $\varphi = 0$, $\psi = 0$ befriedigt wird; statt Benutzung dieser Stelle wird erst durch eine weitere Quadratwurzel eine weitere Stelle $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ von $\Phi = 0$ gesucht und t' mittels $t' = \frac{\psi - \psi_0}{\varphi - \varphi_0}$ als linear- gebrochene Funktion von t eingeführt. So wird also die erst am Schlusse nötige Beiziehung der zweiten Irrationalität in der ganzen Rechnung mitgeführt. Zum Schluß laufen die Formeln für die Überführung der Hauptgleichung in die Brioschische Form ganz auf die kurzen, von Kiepert gegebenen hinaus.

Wie sehr die Rechnung von (45) dem allgemeineren Gebrauch entgegenkommt, erhellt aus ihrer Aufnahme — nur mit etwas weiterem

*) Vgl. unten S. 30.

Hinausschieben der zweiten Hilfswurzel — in H. Webers Lehrbuch der Algebra, Bd. I; aber auch hier ohne Erklärung ihres Sinnes. —

Wir haben die gegenseitigen Beziehungen der Arbeiten von Klein und Gordan, insbesondere auch die betreffs der akzessorischen Irrationalität und die, welche den elementarisierenden Darstellungen von Gordan zu Grunde liegen, so ausführlich erörtert, nicht nur, weil überall das Verhältnis der beiden Forscher zueinander zum Ausdruck kommt, sondern vor allem deshalb, weil diese Untersuchungen der achtziger Jahre eine eigentümliche Seite der Arbeitsmethode Gordans an deutlichen Beispielen beleuchten. Gordan pflegte einen Gedankenhöhenweg in kleine Abschnitte zu teilen, jeden einzeln rechnerisch nach allen Seiten weit zu verfolgen und möglichst ebene Durchstiche zu schlagen, um so vielleicht zuletzt zu einem geradesten Weg zu gelangen. Die Darstellung, die als synthetische noch den Weg rückwärts zu durchlaufen hatte, konnte dann überraschend einfach erscheinen.

Der für die Gleichungen 5^{ten} Grades geschilderte Vorgang wiederholte sich in der fruchtbaren Arbeitszeit von 1878—84 für ein um eine Stufe höheres Gebiet: für die *Gleichungen* 7^{ten} *Grades mit Gruppe* G_{168} ((36) bis (41)).

F. Klein hatte auch für die Modular- und Multiplikatorgleichungen der Transformation 7^{ter} Ordnung der elliptischen Funktionen und deren Resolventen eine Beziehung zur Invariantentheorie der linearen Transformationen hergestellt, um von hier aus einen vollen Überblick über jenes algebraische Gebiet zu erhalten. Von der Galoisschen Resolvente ausgehend hatte er 1878 auf funktionentheoretischem Wege*) für die zugehörige Gruppe G_{168} von 168 Substitutionen eine isomorphe Gruppe Γ_{168} von *ternären* linearen Transformationen konstruiert. Dies war also die isomorphe lineare Gruppe von möglichst wenigen Variabeln, wie sie Klein schon in Math. Ann. 4 prinzipiell forderte. Die hier auftretende Gruppe Γ_{168}, ausgeübt auf drei homogene Größen x_1, x_2, x_3, führt einen Ausdruck 4^{ten} Grades

$$f(x) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

in sich über: $f = 0$ ist eben die Normalkurve 4^{ten} Grades für die Gleichung vom Geschlecht 3 zwischen der absoluten Invariante J des elliptischen Integrals und der Wurzel η der Galoisschen Resolvente der Modulargleichung. Klein erschloß wieder für diese Kurve aus der bezeichneten Gruppe Γ_{168} das ganze Formensystem ihrer Kovarianten, insbesondere das Kurven-

*) Sitzungsber. der Erlanger Sozietät, H. 10 (1878); Math. Ann. 14 (1878) und 15 (1879).

büschel 42^{ten} Grades $\Psi^3 - J \cdot \Delta^7 = 0$, das aus $f = 0$ die Gruppen von je 168 Punkten ausschneidet. Diese beiden Gleichungen zusammengenommen stellen für ihn die Grundirrationalität in J dar; und auf diese wird, mit Hilfe einer „akzessorischen" Gleichung 4^{ten} Grades (Schneiden von $f = 0$ mit einer zu einem Punkte x kovarianten Geraden) die Gleichung für diejenigen 168 Punkte zurückgeführt, die aus *irgend* einem Punkte x der Ebene $f = 0$ mittels der Γ_{168} hervorgehen.

Weiterhin leistete Klein auch die, schon 1858 von Kronecker vermutete, Zurückführung aller Gleichungen mit der Gruppe G_{168} auf die letztgenannten Modulargleichungen. Es gelingt unter Zugrundelegung eines ganz allgemeinen Prinzips*) für irgend eine Gleichung $\Phi(z) = 0$, mit einer Gruppe G_N von N Substitutionen, welche einer Gruppe $\Gamma_{\frac{N}{\nu}}$ von $\frac{N}{\nu}$ *linearen* Transformationen von μ Variabeln $x_1, \ldots, x_\mu$ isomorph ist, Systeme von μ Funktionen $X_1, \ldots, X_\mu$ der Wurzeln von $\Phi(z) = 0$ zu bilden, die sich wie die $x_1, \ldots, x_\mu$ linear transformieren, und damit die Lösung von $\Phi(z) = 0$ auf ein Normalproblem zu reduzieren. Und für die Gleichungen 7^{ten} Grades mit der Gruppe G_{168} war inzwischen die sie charakterisierende „Tripel"-Eigenschaft erkannt worden**): daß die 7 Wurzeln sich zu 7 Tripeln ordnen, die ihrerseits wieder einer zweiten Tripelgleichung genügen, deren Tripel den 7 ersteren Wurzeln einzeln zugeordnet sind.

Gordan nahm alle hier vorliegenden, konstruktiv und an der kanonischen Gestalt von $f(x)$ gelösten, Gleichungs- und Formenprobleme auf, um die notwendigen Bildungen auch wirklich und rein algebraisch durchzuführen. Und zwar holt er zunächst weit aus mit systematischen invariantentheoretischen Untersuchungen der allgemeinen Gleichungsformen, weiter als es die Gleichungstheorie verlangte, und ohne Gruppenbetrachtungen, aber mit Entwicklungen, die für die Formentheorie bedeutsam sind.

Die erste dieser Arbeiten, (36) vom Aug. 1880, haben wir schon oben (S. 17) erwähnt: sie berechnet ein volles System von 54 Bildungen für eine biquadratische ternäre Form $F(y) = a_y^4$, für welche, wie für die Kleinsche Form $f(x)$, die Zwischenform $F_\varphi^2 - \frac{i}{8} v_y^2$ identisch verschwindet $\left[\varphi = \frac{1}{2}(abv)^4;\ i = \frac{4}{3} F_\varphi^4\right]$. So im System von $F(y)$ orientiert, stellt sich gleich danach Arbeit (37) einmal die Aufgabe, durch irrationale typische Darstellung, nämlich unter Zugrundelegung eines zu $F(y)$ kovarianten

*) Math. Ann. 15. Daß in jedem Falle ein nicht identisch verschwindendes System $X_1, \ldots, X_\mu$ gebildet werden kann, wird von Burkhardt Math. Ann. 41 hinzugefügt.

**) Noether, Jan. 1879, Math. Ann. 15.

Koordinatendreiecks, von dem ein Eckpunkt in einem Wendepunkt von $F(y) = 0$ angenommen ist, $F(y)$ in die bezeichnete kanonische Gestalt von $f(x)$ zu transformieren. Damit ist dann jene Kovariantenbedingung als die Normalform charakterisierend erwiesen. Zugleich gelingt es Gordan (§ 17), die Transformationskoeffizienten, mit Determinante 1, selbst auf einfache Weise zu berechnen, wenn man nur für $F(y) = 0$ die Werte $\psi(y)$, $\Delta(y)$ und die Normalauflösung x_1, x_2, x_3 kennt. Aber vor allem wird für die Kleinsche Problemstellung, aus gegebenen *beliebigen* Werten von $F(y)$, $\psi(y)$, $\Delta(y)$ die Punktgruppe y zu bestimmen, das algebraische Substrat gegeben, indem von Gordan, von einem beliebigen Punkt y ausgehend, eine rationale typische Darstellung mittels linearer Zwischenformen geliefert wird, welche für die Zurückführung auf das spezielle Problem die Endformeln herstellt.

Das Problem wird aber zwei Jahre später in (39) von Gordan bedeutend verallgemeinert, indem er zur Kurve 4^{ten} Grades $F(y) = 0$ statt des beliebigen Punktes der y-Ebene einen Linienkegelschnitt $K(v)$ dieser Ebene hinzunimmt und die Aufgabe stellt, aus den numerisch gegebenen Werten der Fundamentalinvarianten von $F(y)$, $K(v)$ die Koeffizienten von $K(v)$ zu bestimmen, dadurch, daß das (homogen) 6-parametrige Problem auf das frühere (homogen) 3-parametrige in kovarianter Weise zurückzuführen ist. Auch hierbei greift Gordan wieder zu ausgedehnten Entwicklungen im Gebiete der rationalen typischen Formendarstellungen, zunächst in einem vorbereitenden Aufsatze (38), der die Darstellungen an Kegelschnittbüschel und linearer Form, an Kegelschnittschar, und, als Anwendung, an $F(y)$, $K(v)$ mittels einer dazu kovarianten linearen Form durchführt. Die weitere Behandlung der letzteren Darstellung führt in (39) zum vollen System von 12 Fundamentalinvarianten für $F(y)$, $K(v)$, die sich rational auf nur 7 reduzieren, zwischen denen noch eine algebraische Relation stattfindet. Die weitere irrationale Zurückführung auf die kanonische Form $f(x)$ von $F(y)$ geschieht nach (37).

Bis dahin bewegt sich Gordan ausschließlich im Gebiet der linearen Invariantentheorie, ohne dabei die Gruppe Γ_{168} von linearen Transformationen, welche die Kurve 4^{ter} Ordnung in sich überführen, irgendwie zu benutzen: er behandelt die spezielle Kurve als von vornherein durch ihre Kovarianteneigenschaft gegeben. Nun erst in (40) tritt die Gleichungstheorie selbst ein, mit dem Ziel aller dieser Entwicklungen, irgend eine Gleichung 7^{ten} Grades $\Phi(z) = 0$ mit der Substitutionengruppe G_{168} auf das Kleinsche Problem der x_1, x_2, x_3, für welches $f(x) = 0$, *explizit* zu reduzieren. Der Zusammenhang dieses Gleichungssystems mit dem Invariantenproblem von (39) geht durch die Lagrangeschen Ausdrücke von $\Phi(z) = 0$, mit $\Sigma z_i = 0$, hindurch: es sind das 6 lineare Ausdrücke ϱ_{kl} der 7 Wurzeln

z_i, welche sich bei der Gruppe G_{168} der z_i gerade wie die Koeffizienten ϱ_{kl} eines Kegelschnitts

$$k(u) \equiv \Sigma \varrho_{kl} u_k u_l$$

linear substituieren, wenn die u_1, u_2, u_3 der kontragredienten Gruppe der linearen Gruppe Γ_{168} der Variabeln x_1, x_2, x_3 unterworfen werden. Dieser Kegelschnitt wird also der Normalkurve adjungiert. In der Behandlung der Gleichung 7^{ten} Grades selbst werden nicht, wie sonst, die Koeffizienten und *eine* Affektfunktion als die gegebenen Größen angenommen, sondern es wird, algebraisch weit darüber hinausgehend, aus dem Tripelcharakter, durch welchen der Gleichung $\Phi(z) = 0$ eine zweite solche $\Phi'(z') = 0$ linear und reziprok zugeordnet wird, in den 7 niedrigsten Potenzsummen der Wurzeln von $\Phi(z) = 0$, bzw. von $\Phi'(z') = 0$, eine volle Basis für die Affektfunktionen, und zugleich ein System unabhängiger Parameter, ermittelt und in den Invarianten des x-Problems umkehrbar eindeutig ausgedrückt. Die linearen Funktionen z_i, z_i' der ϱ_{kl} aber erscheinen in dem x-Problem als die zweiten Überschiebungen der Kegelschnitte $\Sigma \varrho_{kl} u_k u_l$ über zwei durch Klein bekannte spezielle, $f(x) = 0$ zugeordnete 7-Systeme von Kegelschnitten. So ist denn die Lösung der Tripelgleichung auf das Problem von (39) reduziert.

Daß die Untersuchungen (36) bis (40) für die Behandlung der Tripelgleichungen als solcher Umwege vorstellen; daß sie vielmehr, so wie sie vorliegen, ihre Bedeutung vorzugsweise für die Formentheorie haben, in der sie sich durch schwer zugängliches Gebiet bewegen, ist von Gordan selbst ausgesprochen (40): er erklärt es aus seiner individuellen Vorliebe für ganz allgemeine formenbildende Prozesse. Und hier kommt nun jenes Verfahren des Abebnens zur Erscheinung, das zuletzt nur noch elementare Schritte fordert, aber auch (ibid.) „jede Spur von dem Wege, auf welchem die Resultate gewonnen wurden, verwischen" will, ohne Rücksicht darauf, daß das Verständnis des Ganges darunter leiden muß. Gordan greift in (41) die beiden zugeordneten Tripelgleichungen $\Phi(z) = 0$, $\Phi'(z') = 0$, mit den linearen Relationen zwischen ihren Wurzeln, unmittelbar an, indem er, mit Rechnungen nach Art der auf symmetrische Funktionen bezüglichen, das volle System der Affektfunktionen sukzessive herstellt, hierdurch für die beiden Tripelgleichungen Kleins 2-parametrige Normalformen wiederfindet und endlich die Überführung in diese Normalformen durch explizite Tschirnhausen-Transformation, auch wieder in mehreren Schritten, bewirkt. Die Umkehrung dieser Transformation wird noch nicht durchgeführt.

Ein so großzügiges Werk diese ganze Hexalogie von Arbeiten Gordans über die Tripelgleichungen 7^{ten} Grades vorstellt, so greift sie doch über die Gleichungsfragen weit hinaus, und man kann nicht umhin, zu

wünschen, daß die orientierenden Ideen und die für die Gleichungen selbst wesentlichen Resultate in einer übersichtlichen Darstellung neu zusammengefaßt würden, welche die völlig algorithmische Art: die Formeltabellen und die zu ihnen führenden symbolischen Rechnungen und die Rechnungen mit Affektfunktionen, möglichst vermeidet.

Auf die Altersarbeiten Gordans über die *Gleichungen* 6ten *Grades* (81) und (84) brauchen wir nur kurz einzugehen, einmal wegen der Analogie zu den Vorgängen bei den Gleichungen 5ten und 7ten Grades, sodann weil sich über die Vorarbeiten der o. g. Bericht von Klein*) verbreitet.

Wiederum beziehen sich die Untersuchungen auf eine lineare ternäre Gruppe; diesmal auf eine Γ_{360} von 360 ebenen Kollineationen, entdeckt durch G. Valentiner 1889, in ihrem Zusammhang mit den Gleichungen 6ten Grades erkannt und in ihrer Gruppen- und Formentheorie erforscht durch A. Wiman 1895**). Die holoedrisch-isomorphe Beziehung der Γ_{360} zu den G_{360} der geraden Vertauschungen von 6 Größen ergab sich hier durch die Herstellung zweier Systeme Σ, Σ' von je 6 Kegelschnitten K_k, bzw. K_k', deren je 6 Elemente durch die Γ_{360} sich untereinander vertauschen: als involutorische Sextupel, deren paarweise genommene Invarianten verschwinden, waren sie schon früher bei F. Gerbaldi aufgetreten, der dann aber auch die Formen- und Resolvententheorie später noch weiter entwickelt hat***). In dem einfachen Formensystem ist diesmal die niedrigste Form eine ternäre Form $f(x_1, x_2, x_3)$ vom 6ten Grade. Neben die Gruppe Γ_{360} tritt durch Homogenmachen eine Gruppe $\Gamma'_{3\cdot 360}$, welche der gegebenen Gruppe 3-stufig isomorph wird und keine ausgezeichnete Untergruppe Γ'_{360} enthält.

Und wiederum ein der Γ_{360} zugehöriges 2-parametriges Gleichungsproblem, das „Valentiner"-, richtiger wohl „Valentiner-Wiman"-Problem: aus zwei gegebenen Verhältnissen v, w der Kovarianten von $f(x_1, x_2, x_3)$, 0ter Dimension in den x_1, x_2, x_3, die $x_1 : x_2 : x_3$ zu berechnen. Die transzendente Lösung dieses Problemes ist es, in die Gordan in (81) eingreift.

L. Lachtin hatte nämlich 1902†) als Differentialresolvente desselben, analog der hypergeometrischen Gleichung für das Ikosaederproblem, ein System von 3 linearen partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung für eine von v, w abhängige Funktion aufgestellt, welches drei zu x_1, x_2, x_3

---

*) J. f. Math. 129 und Math. Ann. 61. S. auch Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. II, Anhang (1912).

**) Math. Ann. 47.

***) Ib. 50 (1897) u. Rend. Circ. Mat. Palermo Bde 12—16 (1898—1902). Weitere Beiträge zur Resolvententheorie von Fricke in dem eben zit. „Anhang".

†) Math. Ann. 56.

proportionale Größen als unabhängige Lösungen besitzt; er hatte aber die auftretenden numerischen Koeffizienten noch unberechnet gelassen. Diese Rechnung gelingt Gordan, indem er bei der invariantentheoretischen Aufstellung des Systems aus der kanonischen Form von $f(x) = \Sigma K_k^3$ nicht nur die schon bekannten Kovarianten, sondern auch die Zwischenformen von $f(x)$ benutzt.

Nun erhebt sich aber die Frage nach dem Übergang von der *allgemeinen* Gleichung 6ten Grades $F(z) = 0$, mit der alternierenden Gruppe G_{360}, auf das Valentiner-Wiman-Problem. Hier war F. Klein vorangegangen*), indem er die Möglichkeit zeigte, auf rationalem Wege eine Form $\Omega(z_k; x_i)$ zu bilden, 3ter Dimension in x_1, x_2, x_3 und rational in den Wurzeln z_k von $F(z) = 0$, welche unverändert bleibt, wenn man gleichzeitig auf die x_i die homogenen Substitutionen der $\Gamma'_{3\cdot 360}$, und auf die z_k je die entsprechenden Vertauschungen der G_{360} ausübt. Zur Bestimmung der x_i selbst wird dann nur noch eine akzessorische Gleichung nötig, die der Wendepunktbestimmung von $\Omega = 0$ entspricht und daher durch Wurzelziehen gewonnen werden kann.

In diese wichtige Untersuchungsrichtung greift Gordan von 1904 an in zweierlei Weise ein. Zunächst ergab sich aus seinem Verkehr mit Klein ein abgekürztes Verfahren zur Bildung der Funktion Ω, indem die 6 Kegelschnitte des oben genannten Systems Σ herangezogen wurden; und ebenso konnte die Herstellung der akzessorischen Irrationalität vereinfacht werden. Vor allem aber wurde dann von Gordan der ganze Übergang von $F(z) = 0$ zum ebenen Problem in (84) vereinfacht: an Stelle der Form Ω wird von ihm eine bei den linearen Substitutionen $\Gamma'_{3\cdot 360}$ der x_i, und den kontragredienten der u_k ebenfalls invariante bilineare Zwischenform $\omega(z_k; x_i; u_k)$ gesetzt — als „Kleinsche Bilinearform" bezeichnet. Die akzessorische Irrationalität reduziert sich jetzt auf die Lösung der Gleichung dritten Grades für die sich selbst entsprechenden Punkte in der durch $\omega = 0$ gegebenen Kollineation.

Man kann aber nicht sagen, daß die angeführten Arbeiten für die hier vorliegenden Fragen abschließend sind. So hat schon A. Coble eine sehr bedeutende Vereinfachung der Arbeit (84) gleich nach ihrem Erscheinen erreicht**), indem er den Grad der Bilinearform $\omega(z_k; x_i; u_k)$ in den z_k von 6 auf 4 reduziert; und für die in (84) nicht berührte Umkehrung der Tschirnhausen-Transformation zwischen Gleichung 6ten Grades und Normalproblem findet sich bei Coble wenigstens der Ansatz, wenn auch nicht die Berechnung. Besonders aber ist eine volle Umgestaltung der ganzen Be-

*) Rend. Acc. Linc. vom 9. April 1899.
**) Math. Ann. 70.

handlung der Aufgabe denkbar, einmal etwa durch Heranziehung der *beiden* S. 31 genannten Systeme Σ, Σ' im Sinne der Behandlung der Tripelgleichungen 7^{ten} Grades, sodann durch Bildung ausgezeichneter Gleichungen, welche hier die Stelle der „Hauptgleichung“ 5^{ten} Grades zu übernehmen hätten.

Wir haben noch über eine Reihe von Einzelrichtungen zu berichten, die Gordan im Laufe der Jahre verfolgt hat, teilweise freilich in engem Zusammenhang mit den Untersuchungen allgemeiner Art.

Vor allem sind die von 1870 an bis zum Schluß laufenden vielfachen *Resultantenbetrachtungen* für Gordan charakteristisch. Die Darstellung in Determinantenform, wie sie für zwei binäre Formen existiert, genügt ihm nicht, sie erscheint ihm bei höheren Graden nicht für die Ausrechnung praktisch. Er verlangt statt dessen, was für den Grad 2 der einen Form geleistet ist, explizite rationale Ausdrücke durch niedrigere Invarianten. So wendet er denn (18) auf die Cayleysche Form $\varphi(y)f(x) - f(y)\varphi(x)$ zweier binärer Formen gleichen Grades, aus der die Bézoutsche Form der Resultante $R_{f,\varphi}$ gebildet wird, seine Reihenentwicklung für Formen von zwei Variabelnreihen nach Potenzen von (xy) an; ebenso auf die Kovariante, deren Verschwinden einen gemeinsamen Faktor 2^{ten} Grades bezeichnet; und damit erhält er diese Kovariante, und hieraus die Resultante selbst, als ganze Funktion von Überschiebungen. Bei Formen ungeraden Grades hat man so freilich nur Quotienten von Entwicklungen. Aber bis zum 5^{ten} Grade hin werden alle Formeln sogar explizit ausgerechnet; und in einer späten Arbeit von 1906 (82), einer Fortführung von (18), werden die Rechnungen, verfeinert durch die Benutzung der Kombinantenbegriffe, noch mehr durchgeführt.

Dasselbe Ziel verfolgen die Diskriminantenarbeiten (42), (49), nur auf anderem Wege, indem nämlich, wie in den „Vorlesungen“ (V, Bd. II), erst die Invarianten der binären Form 6^{ten} bzw. 7^{ten} Grades bis zu einer gewissen Ordnung hin allgemein ermittelt und dann im Fall eines Doppelfaktors der Grundform berechnet werden, woraus die gesuchte Relation zwischen ihnen hervorgeht. Auch für die Resultante dreier ternärer Formen beliebigen Grades wird jenes formentheoretische Ziel erreicht. Schon in (58) hatte Gordan aus einer von A. Brill gegebenen Form durch deren Befreiung von einem Faktor u_x^2 eine Zwischenform V abgeleitet, deren in den x und u identisches Verschwinden die Bedingungen für eine ternäre Form $f(x)$, in lineare Faktoren zu zerfallen, darstellt. In (64) und (65) wird nun, wesentlich mit Hilfe des Hermiteschen Reziprozitätssatzes (62), die Resultante dreier ternärer Formen f, f_1, f_2 als simultane Invariante von f und V, vermehrt um eine Summe von Überschiebungen von V über weitere Formen, erhalten.

Andere Noten haben wieder den Zweck, gerade die Determinantenausdrücke der Resultante zweier binärer Formen der Berechnung zugänglicher zu machen, so als Summe von Produkten in (57) und in manchen von Gordan veranlaßten Dissertationen. Oder es werden (80) Beziehungen zwischen den Unterdeterminanten der Sylvesterschen Form zu denen der Bézoutschen abgeleitet, oder auch (27), vermöge des Brillschen Satzes über korrespondierende Matrizen, besondere Ausdrücke für einen größten gemeinsamen Teiler zweier binärer Formen gleichen Grades. Die Darstellung der Resultante durch das Differenzenprodukt der Wurzeln α_i, β_k, d. h. als Summe der Koeffizienten der Gleichung für $\frac{\beta_k}{\alpha_i}$, wird von Gordan (71) durch Umkehr der Newtonschen Formeln dazu benutzt, die Resultante als ganze Funktion der Summen der positiven Potenzen der β_k und der negativen Potenzen der α_i auszudrücken; und das Verfahren wird (68) zur Herstellung einer Menge von Relationen zwischen symmetrischen Funktionen der Wurzeln von Gleichungen und zur expliziten Berechnung von Resolventen erweitert. Für die Diskriminante einer ternären Form findet sich in (48) ein Determinantenausdruck, analog dem Sylvesterschen im binären Gebiet. Partielle Differentialgleichungen für die Resultante zweier binärer Formen sind schon in (17) (1870) berechnet, unter anderer Gestalt als bei Brioschi und ohne daß die Beziehungen zu dessen Gleichungen erörtert werden.

Als eine Anwendung von Resultanteneigenschaften mag eine Vereinfachung gelten, welche Gordan an dem zweiten algebraischen Beweis von Gauß für die Wurzelexistenz einer Gleichung angebracht hat (31). Sie liegt in derselben Richtung, wie sie schon bei von Staudt (J. f. Math. 29) angegeben war: der Reduktion auf die Gleichung für die Wurzeldifferenzen; und sie weicht von dessen Behandlung nur in einem der zu betrachtenden Fälle ab.

Führen wir endlich noch einige Rechnungen von Relationen zwischen Kovarianten aus ihren Leitgliedern hinzu (52), so haben wir ein vollständiges Bild der rein algebraischen Tätigkeit Gordans vor uns. Indes müssen wir noch eine seiner hierhergehörigen Bestrebungen berühren, die in ihrem Ziel auf eine andere Wissenschaft hinübergreift und auf die er große Hoffnungen setzte. Auf Anregung von W. Alexejeff und in einer gemeinsamen Arbeit mit ihm (75) wurden die symbolischen Formeln der binären Invariantentheorie zu den atomistischen Konstitutionsformeln der Chemie in Beziehung gebracht: den Elementatomen $a, a', \cdots$, mit festen Wertigkeiten $n, n', \cdots$, werden bezw. Formen $a_x^n, a_x'^{n'}, \cdots$ mit den Graden $n, n', \cdots$, jeder Bindung $a - a'$ eine symbolische Determinante (aa'), den gesättigten Verbindungen also symbolische Determinantenprodukte zuge-

ordnet. Daß dasselbe Entsprechen schon 22 Jahre vorher von Sylvester ausgesprochen worden, war den beiden Verfassern bis zu ihrer Publikation hin entgangen. Ihr Ziel ging aber über die bloße Zuordnung hinaus; indem sie auch die einfachsten Formenprozesse deuteten, dachten sie an eine Anwendung der Systemsbegriffe auf die Chemie. Indes hat die Veröffentlichung, wohl wegen ihres formal-kombinatorischen Charakters und wegen unvollständiger Analogie, keine Fortsetzung gefunden.

Nicht-algebraisch hat sich Gordan nur noch einmal betätigt. Im Jahre 1893 hatte Hilbert*) durch einen neuen Gedanken einen einfachen Beweis der Transzendenz der Zahlen e und π geliefert; und gleich darauf hatte Hurwitz**) eine Modifikation des Beweises gegeben, indem er die dort benutzten Integrale, wesentlich durch Anwendung partieller Integration und des einfachsten Falles des Mittelwertsatzes, vermied. In einer Arbeit (54), die übrigens nur den Gang von Hurwitz rückwärts laufend wiedergeben will, geht nun Gordan in dieser Richtung der Elementarisierung noch einen Schritt weiter, indem er auch die noch vorhandenen Differentialquotienten mittels der Reihe für e^x verdrängt. In bezug auf die dabei verwandte Symbolik $r! = h^r$, auf welche seit dieser Arbeit von verschiedenen Seiten Nachdruck gelegt worden ist, muß aber gesagt werden, daß sie in dem Gang des Beweises keine weitere Rolle spielt, als die einer kürzeren Bezeichnung, und daß sie zudem einfach aus der Note von Hurwitz herübergenommen ist. Die in der Note (54) weggelassene, aber für den Beweis wesentliche Abschätzung des klein werdenden Restgliedes hat Gordan in einem hinterlassenen unveröffentlichten Hefte von 1900 durchgeführt.

Noch 38 Jahre, von 1874 an, hat Gordan in Erlangen verbracht. Sie sind für ihn gleichmäßig verlaufen: täglich Vorlesungen, Arbeit, und die unentbehrlichen Spaziergänge entweder mit Mitarbeitern, wie schon mit Clebsch in drastisch lebhaften Zwiegesprächen, unbekümmert um alle Umgebung, oder allein, in tiefem Nachdenken und seine Gedanken im Kopfe so fertig verarbeitend, daß er seine Rechnungen zu Hause fast ohne Striche ausführen konnte. Die Fähigkeit zu solch beweglicher und ausgedehnter Fassungskraft hatte Gordan von jeher durch ein eigentümliches Mittel bei sich entwickelt: er führte im Kopfe lange Zahlenrechnungen aus, und er hat es in dieser — wie schon Clebsch sagte — „brotlosen Kunst", die doch für ihn eine tiefere Bedeutung hatte, recht weit gebracht. Auch in seinen jährlichen Sommeraufenthalten lebte er so, als wahrer Peripathetiker. Viele Stunden waren dem Café gewidmet, ge-

*) Math. Ann. 43.
**) Ibidem.

legentlich auch dem Schach, immer mit der Zigarre, der Abend gehörte gern der Geselligkeit oder auch dem Verkehr mit Jüngeren im mathematischen Verein; dann war er der lebhafteste unter Allen, unerschöpflich in anregendem Diskutieren und Plaudern und in humorvollen Erinnerungen. Dabei liebte er vermöge seiner reichen Phantasie und seiner scharfen Beobachtungsgabe paradoxe Aussprüche, mit einem treffenden Kern von Wahrheit, und plastische Bilder, von einer einzigen Seite gesehen.

Im Denken und Handeln war Gordan durchaus impulsiver Art. So war er auch nicht organisatorisch veranlagt, doch oft ein guter Berater seiner Fakultät, der er übrigens zweimal als Dekan vorstand. Seine allgemeinen Interessen waren rege, so für die klassische deutsche Literatur.

In seiner eigenen Wissenschaft war es weniger ein Vertiefen in fremde Arbeiten — denn solche las er sehr wenig —, als ein Überblick über die inneren Zusammenhänge und ein instinktives Gefühl für die Wege und Ziele der mathematischen Bestrebungen, was ihn schon aus kleinen Andeutungen Wertvolles von Minderem scheiden ließ. Aber den auf die Grundlagen gehenden Begriffsentwicklungen ist Gordan nie gerecht geworden: auch in seinen Vorlesungen hat er alle Grunddefinitionen begrifflicher Art, selbst die der Grenze, vollständig gemieden. Sein Vorlesungsprogramm hat sich nur auf die Vorlesungen allgemeiner Art, gelegentlich auch auf binäre Formentheorie, erstreckt; die Übungen waren mit Vorliebe der Algebra entnommen. Über Jacobisches, so über Funktionaldeterminanten, trug er gern vor, nie über Funktionentheoretisches, höhere Geometrie oder Mechanik; auch ließ er keine Seminarvorträge halten. Die Vorlesungen wirkten wesentlich durch die Lebhaftigkeit der Ausdrucksweise und durch eine zum Selbststudium anregende Kraft, eher als durch Systematik und Strenge.

Wie hochbeliebt Gordan in der Fakultät war, zeigen nach außen die mannigfachen ihm erwiesenen Ehrungen, die ihn erfreuten. So bei seinem 25-jährigen Jubiläum als Ordinarius; so bei seinem siebzigsten Geburtstage, bei dem ihm die Fakultät eine Adresse widmete und die nächsten auswärtigen Freunde sich um ihn vereinigten; so noch einmal bei dem goldenen Doktorjubiläum 1912, an dem sich auch die Universität Berlin durch Diplomerneuerung, die k. preußische Akademie der Wissenschaften durch eine Adresse beteiligten. Die vielerlei Anerkennungen bedeutender Akademien bereiteten Gordan lebhafte Genugtuung.

Im Frühjahr 1910 trat Gordan von seinem Lehramt zurück, las aber noch vier weitere Semester, drei neben seinem Nachfolger Erh. Schmidt. Völlig setzte er die Vorlesungen erst im Semester vor seinem Ableben aus, nachdem er die ihm ans Herz gewachsene Algebra seinem zweiten Nachfolger E. Fischer übergeben konnte, mit dem er dann noch ein Jahr lang

in engen wissenschaftlichen Verkehr trat. Schon seit längerer Zeit litt Gordan gelegentlich an Schwächeanfällen; von einem solchen im November 1912 eingetretenen erholte er sich nicht mehr: seine körperlichen und geistigen Kräfte sanken nun täglich, bis ihn am 21. Dezember 1912 der Tod erlöste. Seine Ruhestätte fand er auf dem Neustädter Friedhof Erlangens.

Gordan war eine der markantesten und bekanntesten Persönlichkeiten unter den Mathematikern der Neuzeit. Er fehlte kaum auf den Mathematiker-Versammlungen, den deutschen und den internationalen; er war bei der Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beteiligt, 1894 und bei der damaligen Versammlung in Wien ihr Vorsitzender, ebenso vertretungsweise bei der nächsten Versammlung in Lübeck: meist trug er über ein ihn gerade beschäftigendes Thema vor, immer aber war er dort, stets von einer Gruppe Jüngerer umgeben, ein belebendes Element.

Gordan, eine in sich geschlossene Individualität, war kräftig und einheitlich im Leben und in der Arbeit. Kein Neuerer in der Wissenschaft: er griff nur an, was seiner Art gemäß war; aber was er angriff, führte er unermüdlich durch bis zu Ende. Aus dem Stoffe selbst heraus neue kombinatorische Methoden zu schaffen und seine Instrumente kräftig zu handhaben, das war sein mächtiges Können: er war *Algorithmiker.*

Erlangen, Oktober 1913.

Schriftenverzeichnis.

Selbständig erschienene Veröffentlichungen.

I. De Linea Geodetica. Dissertatio inauguralis. Berlin 1862. 42 Seiten 4°, mit Vita und vier Thesen; verteidigt am 1. März 1862 bei der philos. Fakultät der Universität Berlin. Vorgedruckt eine Widmung an den Vater. Als Opponenten werden aufgeführt: Kretzschmar, Dr. philos., Geiser, stud. math. und Rathke, stud. phil. [Die Dissertation ist aus einer Arbeit hervorgegangen, welche am 3. August 1861 auf eine Preisfrage der philosophischen Fakultät Breslau den Preis erhalten hatte.]

II. Über die Transformation der Θ-Funktionen. Habilitationsschrift, Gießen 1863, 18 Seiten 4°.

III. Theorie der Abelschen Functionen von A. Clebsch und P. Gordan, Professoren an der Universität Gießen. Leipzig, B. G. Teubner 1866, XIII u. 333 Seiten. [Vorwort vom 18. August 1866.]

IV. Über das Formensystem binärer Formen. Programm zum Eintritt in die philos. Fakultät und den Senat der K. Friedr.-Alex.-Univ. zu Erlangen. Erlangen, 20. März 1875. Leipzig, B. G. Teubner 1875, 52 Seiten. [Selbstbericht im Repertorium f. Math. 1, S. 12—13.]

V. Dr. Paul Gordans Vorlesungen über Invariantentheorie. Herausgegeben von Dr. Georg Kerschensteiner. [Hermite gewidmet.] Erster Band: Determinanten. Leipzig, B. G. Teubner 1885, XI u. 201 Seiten. [Vorwort aus Juli 1885.] Zweiter Band: Binäre Formen. Leipzig, B. G. Teubner 1887, XII u. 360 Seiten. [Vorwort aus Juli 1887.]

Abhandlungen.

1. Beziehungen zwischen Theta-Producten. Gießen den 20. März 1865, J. f. Math. 66 (1866), S. 185—192.

2. Transformation des fonctions Abéliennes. Gießen, 26 avril 1865. C. R. Paris 60 (1865), S. 925—927 (Sitzung v. 1. Mai 1865).

3. Théorie des fonctions Abéliennes (zus. mit A. Clebsch). C. R. Paris 62 (1866), S. 183—187, S. 227—230 (Sitzungen vom 22. und 29. Januar 1866). [Voranzeige des Buches (III).]

4. Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie (zus. mit A. Clebsch). Gießen, febbrajo 1867. Ann. di Mat. (2) 1 (1867), S. 23—79.

5. Applicazione della Memoria „Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie“ all equazione modulare della trasformazione di quinto ordine. Ibid. S. 367—372.

6. Les formes binaires du 6° degré (zus. mit A. Clebsch). C. R. Paris 64 (1867), S. 582—586 (Sitzung vom 18. März 1867). [Auszug aus §§ 8—13 von (4).]

7. Über die vier- und fünfpunktige Berührung einer Geraden mit einer algebraischen Fläche. Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), S. 495—504.

8. Über die Theorie der ternären cubischen Formen (zus. mit A. Clebsch). Gießen, den 15. September 1867. Math. Ann. 1 (1869), S. 56—89.

9. Über die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen. Gießen, den 14. Januar 1868. J. f. Math. 71 (1870), S. 164—194.

10. Sur les covariants et invariants des formes binaires. C. R. Paris 66 (1868), S. 1117—1119 (Sitzung vom 1. Juni 1868). [Voranzeige von (11).]

11. Beweis, daß jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coeffizienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist. Gießen, den 8. Juni 1868. J. f. Math. 69 (1868), S. 323—354.

12. Über eine das Hyperboloid betreffende Aufgabe. Gießen. Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), S. 59—63.

13. Über biternäre Formen mit contragredienten Variabeln (zus. mit A. Clebsch). Gießen, den 3. September 1868. Math. Ann. 1 (1869), S. 359—400.

14. Über ternäre Formen dritten Grades. Gießen, im Oktober 1868. Ibid. S. 90—128.

15. Applicazione di alcuni risultati contenuti nella memoria „Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie del 5° e del 6° grado“ agli integrali iperellittici. 10 aprile 1869. Ann. di Mat. (2) 2 (1869), S. 346—348.

16. Die simultanen Systeme binärer Formen. Math. Ann. 2 (1870), S. 227—280. [Ausgegeben Februar 1870.]

17. Die partiellen Differentialgleichungen, denen die Resultante einer Form n^{ten} Grades und einer Form m^{ten} Grades genügt. Gießen, im Sept. 1870. Gött. Nachr. 1870, S. 427—433.

18. Über die Bildung der Resultante zweier Gleichungen. Math. Ann. 3 (1871), S. 355—414. [Ausgegeben im Februar 1871.]

19. Über Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Gießen, im Januar 1871. Ibid. S. 631—632.

20. Resultanten von Covarianten. Gießen, im März 1871. Ibid. 4 (1871) S. 169—171.

21. Über Combinanten. Gießen, Oktober 1871. Ibid. 5 (1872), S. 95—122.

22. Über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung. Gießen, im März 1872. Ibid. S. 341—377.

23. Über die simultanen Invarianten binärer Formen. Gießen, den 8. April 1872. Ibid. S. 595—601.

24. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten. Gießen, April 1872. Ibid. 6 (1873), S. 23—28.

25. Über cubische ternäre Formen (zus. mit A. Clebsch). Ibid. S. 436—512. [Ausgegeben Okt. und Dez. 1873.]

26. [In „Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen, von einigen seiner Freunde", im Juli 1873, ibid. 7 (1874), S. 1—55: Mitarbeit an der Darlegung von dessen invariantentheoretischen Arbeiten, S. 37—50.]

27. Über den größten gemeinsamen Factor. Gießen, im Oktober 1873. Ibid. 7 (1874), S. 433—448.

28. Über einen Satz von Hesse. Sitzungsber. der Erlanger phys.-med. Sozietät, Sitzung vom 13. Dezember 1875. Heft 8 (1876), S. 89—94.

29. Über die algebraischen Formen, deren Hessesche Determinante identisch verschwindet (zus. mit M. Noether). Erlangen, im Mai 1876. Math. Ann. 10 (1876), S. 547—568. [Auszug aus der Abh., mitgeteilt von M. Noether, in Erlanger Ber., Sitzung vom 10. Januar 1876, Heft 8 (1876), S. 51—56. Selbstbericht von M. Noether, im Repertorium f. Math. 1, S. 255—257.]

30. Ein Hauptsatz der Algebra. Erlanger Ber., Sitzung vom 8. Mai 1876. Heft 8 (1876), S. 138—142. [Auszug aus (31).]

31. Über den Fundamentalsatz der Algebra. Math. Ann. 10 (1876), S. 572—575. [Selbstber. im Rep. f. Math. 1, S. 254—255.]

32. Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Erlangen, im Februar 1877. Ibid. 12 (1877), S. 23—46. [Selbstber. im Rep. f. Math. 2, S. 42—45.]

33. Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten. Erlangen, im März 1877. Ibid., S. 147—166. [Selbstber. im Rep. f. Math. 2, S. 45—48.]

34. Über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades (Vorgetragen am 9. Juli 1877). Erl. Ber. Heft 9 (1877), S. 183—186. [Vorarbeit für (35).]

35. Über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Erlangen, im Januar 1878. Math. Ann. 13 (1878), S. 375—404. [Selbstber. im Rep. f. Math 2, S. 152—157.]

35'. [Voranzeige von (35) in den Verh. d. Ges. Deutscher Naturf. u. Ärzte, München (1877), S. 98.]

36. Über das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. Erlangen, im August 1880. Math. Ann. 17 (1880), S. 217—233. (Hierzu eine Tafel.)

37. Über die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. Erlangen, Ende September 1880. Ibid., S. 359—378.

38. Über Büschel von Kegelschnitten. Erlangen, im Januar 1882. Ibid. 19 (1882), S. 529—552. [Hierzu gehörig: Clebschs Vorlesungen über Geometrie, her. von Lindemann, Bd. I, S. 288—291 der ersten Auflage.]

39. Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. Erlangen, Ende Mai 1882. Ibid. 20 (1882), S. 487—514.

40. Über Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. Erlangen, Ende Mai 1882. Ibid., S. 515—530.

41. Über Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen II. Erlangen, im Oktober 1884. Ibid. 25 (1885), S. 459—521.

42. Die Discriminante der binären Form 6. Grades (Vorgelegt am 9. Februar 1885). Erl. Ber. Heft 17 (1885), S. 40—42.

43. Sur les équations du cinquième degré. Journ. de Math. (4) 1 (1885), S. 455—458.

44. Über Gleichungen fünften Grades (Vorgetragen am 10. Mai 1886). Erl. Ber. Heft 18 (1886), S. 81—83. [Auszug aus (45).]

45. Über Gleichungen fünften Grades. Erlangen, im Sommer 1886. Math. Ann. 28 (1887), S. 152—166.

46. Über biquadratische Gleichungen. Erlangen, im Dezember 1886. Ibid. 29 (1887), S. 318—326.

47. Formensystem. (Sitzung vom 14. Nov. 1887). Erl. Ber., Heft 19 (1887), S. 35—38. [Auszug aus (50).]

48. Über die Bildung der Discriminante einer ternären Form. Eingelaufen am 17. Dezember 1887. Sitzber. Ak. München 17 (1887), S. 477—478.

49. Die Discriminante der Form 7. Grades $f = a_x^7$. Erlangen, im Januar 1888. Math. Ann. 31 (1888), S. 566—600.

50. Das erweiterte Formensystem. Ibid. 33 (1889), S. 372—389. [Ausgegeben Febr. 1889.]

51. Über Begriff und Eigenschaften der Differentialinvarianten, ihr Zusammenhang mit den gewöhnlichen Invarianten. Verh. d. Ges. Deutscher Naturf. u. Ärzte. Bremen, Bd. IV (1890). [Voranzeige der Anmerkung S. 506 von (52).]

52. Bestimmung einer binären Form aus Anfangsgliedern ihrer Covarianten. Erlangen, im Dezember 1891. Math. Ann. 40 (1892), S. 503—526.

53. Über einen Satz von Hilbert. Erlangen, im September 1892. Ibid. 42 (1893), S. 132—142.

54. Transcendenz von e und π. Erlangen, im Mai 1893. Ibid. 43 (1893), S. 222—224.

[54'. Dasselbe, ins Polnische übertragen durch S. Dickstein, in dessen Zeitschrift Prace Matematyczno-Fizyczne 1897, S. 9—12.]

55. Sur la transcendance du nombre e. C. R. Paris 116 (1893), S. 1040—1041 (Sitzung vom 8. Mai 1893.) (Extrait d'une lettre adr. à M. Hermite.) [Auszug aus (54).]

55'. Über Transcendenz von e und π. Verh. der Ges. Deutscher Naturf. u. Ärzte, Nürnberg, Bd. II (1893), S. 13—14. [Auszug aus (54).]

56. Über die Sylvestersche Resultante. Ibid. S. 4.

57. Über die Resultante. (Auszug aus einem an Herrn A. Hurwitz gerichteten Brief.) Math. Ann. 45 (1894), S. 405—409. [Ausg. Okt. 1894.]

58. Das Zerfallen einer Curve in gerade Linien. Erlangen, im April 1894. Ibid. S. 410—427.

59. Das Zerfallen von Curven in gerade Linien. [Wien 1894.] Jahrber. d. D. Math.-Ver. 4 (1897), S. 92. [Anzeige von (58).]

60. Über unverzweigte lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung auf ebenen Curven vierten Grades. (Auszug aus einem an F. Klein gerichteten Briefe.) München, im April 1895. Math. Ann. 46 (1895), S. 606—608.

61. Der Pascalsche Satz. [Lübeck 1895.] Jahrber. d. D. Math.-Ver. 4 (1897), S. 155—157.

62. Der Hermitesche Reciprocitätssatz. Gött. Nachr. 1897, S. 182—183.

63. Resultante ternärer Formen. Verh. d. I. Int. Math. Kongr. Zürich (1897), S. 143—144. [Auszug aus (65).]

64. Le résultant de trois formes ternaires quadratiques. Journ. de Math. (5), 3 (1897), S. 195—201.

65. Resultanten ternärer Formen. Math. Ann. 50 (1898), S. 113—132. [Ausgegeben Dez. 1897.]

66. Auszug aus einem Schreiben an Herrn L. Berzolari. Erlangen, 5. Juli 1898. Rend. Circ. Mat Palermo 12 (1898), S. 326—328.

67. Sur le résultant de deux équations. (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.) Erlangen, 11 octobre 1898. C. R. Paris 127 (1898), S. 539—541. (Sitzung v. 17. Okt. 1898.) [Auszug aus (68).]

68. Symmetrische Functionen. Math. Ann. 52 (1899), S. 501—528.

69. Neuer Beweis des Hilbertschen Satzes über homogene Functionen. München, September 1899. Gött. Nachr (1899), S. 240—242.

70. Les invariants des formes binaires, Journ. de Math. (5) 6 (1900), S. 141—156.

71. Über die symmetrischen Functionen. Jahrber. d. Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900), S. 178—179. [Auszug aus (68).]

72. Über homogene Functionen. Ibid. S. 180 [Auszug aus (70).]

73. Formentheoretische Entwicklung der in Herrn Whites Abhandlung über Curven dritter Ordnung enthaltenen Sätze. (Received for publication Oct. 15, 1899.) Trans. Am. Math. Soc. 1 (1900), S. 9—13.

74. Die Hessische und die Cayleysche Curve. (Received for publication June 10, 1900.) Ibid. S. 402—413.

74'. Die Hessische und die Cayleysche Curve. [Wiederabdruck von (74).] Festschrift der Universität Erlangen zur Feier des achtzigsten Geburtstages Sr. Kgl. Hoheit d. Prinzregenten Luitpold von Bayern. Erlangen und Leipzig, A. Deichert 1901.

75. Übereinstimmung der Formeln der Chemie und der Invariantentheorie (zus. mit W. Alexejeff). Erlangen, im Juli 1900. Erl. Ber. Heft 32 (1900), S. 107—142.

75'. Übereinstimmung der Formeln der Chemie und der Invariantentheorie (zus. mit W. Alexejeff). [Wiederabdruck von (75).] Zeitschr. f. phys. Chem. 35 (1900), S. 610—633.

76. Some relations between Physical Constants and Constitution in Benzenoid Amines. Part. II (zus. mit L. Limpach). Erlangen. Journ. of the Chem. Soc. Transact. 79 (1901), S. 1080—1085. [Rechnungen über Schmelzpunkte enthaltend.]

77. Das simultane System von zwei quadratischen quaternären Formen. Erl. Ber. Heft 33 (1901), S. 205—216. [Auszug aus (78).]

78. Das simultane System von zwei quadratischen quaternären Formen. Math. Ann. 56 (1903), S. 1—48.

79. Über die Auflösung der Gleichungen 6ten Grades. Verh. d. III. Intern. Math. Kongr. in Heidelberg (1904), S. 140—143 (1905).

80. Die Resultante binärer Formen. Erl. Ber. Bd. 37 (1905), S. 379—387.

81. Die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems. (Ein Beitrag zur Auflösung der Gleichungen 6ten Grades.) Erlangen, im Herbst 1905. Math. Ann. 61 (1905), S. 453—526.

82. Die Resultante binärer Formen. Erlangen, den 30. April 1906. Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), S. 161—196.

83. Gleichungen 6ten Grades. Atti del IV Congr. Intern. dei Matem. Roma (1908) Vol. II (1909), S. 5—7.

84. Über eine Kleinsche Bilinearform. (Ein Beitrag zur Auflösung der Gleichungen 6. Grades.) Math Ann. 68 (1910), S. 1—23.

Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. IV.

(Zweiter Existenzbeweis der allgemeinen kanonischen uniformisierenden Variablen: Kontinuitätsmethode.)

Von

Paul Koebe in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Nachdem ich in den Abhandlungen „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I, II, III“ (Math. Ann. 67, 69, 72) mit Hilfe der Methode der Überlagerungsfläche und des iterierenden Verfahrens alle die Uniformisierung der algebraischen Kurven betreffenden, seinerzeit (1881—1883) von Poincaré und Klein aufgestellten Fundamentaltheoreme bewiesen habe, will ich in der vorliegenden Abhandlung nunmehr zeigen, wie diese Theoreme sich durchgängig mit Hilfe der *Kontinuitätsmethode* erledigen lassen.*)

Ich betrachte zu dem Ende in einem ersten Teile dieser Abhandlung zunächst nur den Fall der Uniformisierung durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus und führe in diesem Falle die Untersuchung in ausführlicher Weise durch, um dann das Hauptkreistheorem im zweiten Teile, schließlich im dritten Teile die allgemeinen Kleinschen Fundamentaltheoreme zu erledigen, bei welchen das Wertegebiet T der uniformisierenden Variablen, allgemein zu reden, ein von unendlich vielen Kreisen begrenztes Gebiet der Ebene ist. Bei diesen Entwicklungen wird aus meinen früheren Abhandlungen lediglich der Unitätsbeweis für die betreffenden uniformisierenden Variablen vorausgesetzt, sowie aus unten näher bezeichneten Gründen (S. 118) der Existenzbeweis der Grenzkreisuniformisierung, wie ich denselben in „U. d. a. K. I.“ mittels der Methode der Überlagerungsfläche gegeben habe.

Die Grundidee der *Kontinuitätsmethode* als eines allgemeinen Beweisprinzipes ist älter als die Arbeiten Kleins und Poincarés. Wir finden diese Methode zum Beispiel im Gebiete der konformen Abbildung von Schläfli ver-

*) Vgl. die „Voranzeige“ der vorliegenden Abhandlung in den Gött. Nachr. 13. Jan. 1912: „Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung“, welche wesentlich die bezüglichen Mitteilungen des Verfassers auf der Naturforscherversammlung in Karlsruhe (September 1911, s. Jahresbericht der D. M. V. 1912, S. 161—163) wiedergibt. S. auch die Note des Verfassers „Zur Begründung der Kontinuitätsmethode“. Sitzungsberichte Ak. Leipzig 1912, S. 59ff.

sucht.*) Dies kann nicht wundernehmen. Ist doch die Kontinuitätsmethode ihrem Wesen nach zunächst nichts anderes als die heuristisch so wertvolle *Methode der Konstantenzählung zu einem Beweisprinzip erhoben*, eine Auffassung, bei welcher in dieser Allgemeinheit naturgemäß von einer allgemeinen Begründung der Kontinuitätsmethode nicht gesprochen werden kann, vielmehr lediglich von einer Begründung für jede einzelne Problemgattung. Und hier ist nun zu sagen, daß, so einfach und naheliegend der Grundgedanke der Kontinuitätsmethode als solcher ist, so schwierig eine tatsächlich exakte und umfassende Begründung derselben insbesondere in der Uniformisierungstheorie sich gestalten sollte.

Um das Wesen der Kontinuitätsmethode und gewisse Hauptunterschiede meines allgemeingültigen Beweisverfahrens insbesondere gegenüber den auf das Grenzkreistheorem beschränkten Entwicklungen von Poincaré bzw. Kleins allgemein gehaltenen Andeutungen, sowie zwischen diesen selbst nebst einigen kritischen Bemerkungen in dieser Einleitung darlegen zu können, will ich an ein Beispiel anknüpfen, an welchem auch Poincaré seine Methode gelegentlich erläutert hat.

Ich betrachte die Fläche des Einheitskreises der z-Ebene mit vier ausgezeichneten Punkten der Peripherie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Diese Fläche soll auf ein Spitzenpolygon Π innerhalb des Einheitskreises der t-Ebene abgebildet werden, welches von vier Orthogonalkreisbögen des Einheitskreises begrenzt wird und auf der Peripherie vier Spitzen mit den äußersten Punkten $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ hat; und zwar sollen bei der gedachten Abbildung die Punkte α bzw. in die Punkte β übergehen. Man normiere zunächst vermöge linearer Transformation die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ auf $-1, -i, +1, \alpha$, ferner $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ auf $-1, -i, +1, \beta$ und denke sich die Punkte α und β beide in der oberen Hälfte des Einheitskreises liegend. Ist β gegeben, so bestimmt man sofort die zu Π gehörende Greensche Funktion und kann damit die Abbildung auf die Fläche des Einheitskreises bewirken, wobei nun β in einen gewissen Punkt α übergehen wird: (*die Grundtatsache*). Wird β auf dem oberen Halbkreise der t-Ebene variiert, so variiert auch α auf dem oberen Halbkreise der z-Ebene. Man zeigt, daß α mit β stetig variiert (*Stetigkeitsbeweis*), ferner, daß zwei voneinander verschiedenen β stets auch zwei voneinander verschiedene α entsprechen. Oder anders gesprochen, daß zu einem α nicht mehr als ein β gehören kann, sofern überhaupt ein β dazu gehört (*Unitätsbeweis*). Hieraus

*) Schläfli, „Über die allgemeine Möglichkeit der konformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur auf eine Halbebene", Journal für Math. 78, S. 63—80 (1874). Man lese besonders S. 63 u. 68. Noch vor Schläfli sind H. A. Schwarz und Weierstraß zu nennen (H. A. Schwarz, Ges. Abh. Bd. II, S. 77 oben und die Abhandlung über Tetraederabbildung Ges. Abh. S. 84ff.).

folgt, daß, wenn β den ganzen oberen Halbkreis durchläuft (mit Ausschluß der Grenzpunkte des Halbkreises), α ein gewisses Stück seines Halbkreises durchlaufen wird, indem bei dieser Zuordnung die vollständige (hier eindimensionale) Umgebung eines jeden Punktes β eineindeutig und stetig auf die vollständige Umgebung des entsprechenden Punktes α übertragen wird (*umgebungstreue Abbildung*).

Die alte Kardinalschwierigkeit des Kontinuitätsbeweises ist nun durch die Frage nach der vollständigen Ausfüllung des z-Halbkreises durch die Punkte α bezeichnet (*Vollständigkeitsbeweis*).

Um diesen Vollständigkeitsbeweis zu führen, erfand Poincaré eine Methode, welche wir im Anschluß an Poincaré als *Methode der Grenzpolygone* (*„polygones limites"*) bezeichnen können.*) Das Wesen dieser Methode besteht in Folgendem. Man denke sich, daß β in den Punkt $+1$ übergeht. Alsdann geht das Polygon Π in das Spitzendreieck $-1, -i, +1$ als Grenzpolygon über. D. h.: es entspricht dem Werte $\beta = +1$ der Wert $\alpha = +1$. Analog entspricht $\beta = -1$ der Wert $\alpha = -1$. Es kommt nun darauf an, den Nachweis zu führen, daß die Funktion $\alpha(\beta)$ auch noch in den genannten beiden Grenzpunkten stetig ist. Alsdann ist einleuchtend, daß in der Tat jeder Punkt des oberen Halbkreises der z-Ebene als Eckpunkt α auftritt, sodaß also die z-Kreisfläche in der Tat bei irgendwelcher Wahl von α auf ein Polygon Π abgebildet werden kann.

Auf einem wesentlich neuen Gedanken beruht nun die folgende von mir gefundene Methode, welche ich passend als *Methode des Verzerrungsgrundes* bezeichnen könnte. Mein *Verzerrungssatz* gestattet, auf die oben betrachteten Figuren angewendet, den Schluß: wenn α auf ein bestimmtes Intervall seines Halbkreises beschränkt wird, welches nicht bis an -1 oder $+1$ heranreicht, so entspricht dieser Annahme eine analoge Beschränkung für die entsprechenden β, gleichgültig ob solche β überhaupt existieren oder nicht. Derartige Schranken lassen sich mit Hilfe meines *Verzerrungssatzes* explizite berechnen. Es ist klar, daß hiermit gezeigt ist: wenn β seinen Halbkreis durchläuft, so durchläuft auch notwendig α seinen Halbkreis vollständig. Dabei sind die Grenzpolygone ganz außer Betracht geblieben.**)

---

*) Die Methode der „polygones limites" findet ein Vorbild bei H. A. Schwarz, in dessen Abhandlung „Konforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel". Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 70, 1869, S. 121 ff. Ges. Abh. Bd. II, S. 84 ff.

**) Vgl. auch meine bereits in „U. d. a. K. III." (Einleitung, Fußnote) aufgeführten Noten:

„Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung", Gött. Nachr. 13. Jan. 1912, S. 879—886.

Der Unterschied zwischen der Inbetrachtnahme der Grenzpolygone einerseits und der völligen Außerachtlassung derselben andererseits ist in charakteristischer Weise bezeichnend für die Poincarésche Methode

---

„Zur Begründung der Kontinuitätsmethode". Sitzungsb. Ak. Leipzig 1912, S. 59—62.

„Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung", der D. M. V. erstattet in Karlsruhe 1911. Jahresb. der D. M. V., 1912, S. 157—163, insb. S. 162 ff.

Ich benütze diese Gelegenheit wieder zur Anführung der neu hinzugekommenen auf die Uniformisierung Bezug habenden Literatur.

P. Koebe: I. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. III. (Erster Beweis der allgemeinen Kleinschen Fundamentaltheoreme. Das iterierende Verfahren)". Math. Ann. 72 (1912), S 437—516.

II. Diskussionsbemerkungen im Anschluß an den Vortrag von D. Hilbert: „Begründung der elementaren Strahlungstheorie", S. 1054 der Phys. Zeitschrift, Jahrgang 1912. (Betrifft die Beziehung zwischen Uniformisierung und nichteuklidischer Geometrie) Vgl. dazu die Abhandlung

III. „Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie". Lagrange-Band (Bd. 21, S. 57—64) der Annali di Matematica 1913.

IV. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. IV. (Zweiter Existenzbeweis der allgemeinen kanonischen uniformisierenden Variablen: Kontinuitätsmethode)." Math. Ann. 75 (1914), S. 42—129.

V. „Wesen und Ziele der Kontinuitätsmethode" (Vortrag, Naturforscherversammlung Wien, September 1913, erscheint im Jahresbericht der D. M. V.).

Ebenfalls sei hier von neuem hingewiesen auf den Bericht über die Karlsruher Verhandlungen, betreffend die automorphen Funktionen, im Jahresbericht der D. M. V. 21 (1912), S. 153—166, insbesondere auf

P. Koebe: „Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung". Jahresbericht der D. M. V., 21 (1912), S. 157—163.

Die Lektüre dieses Verhandlungsberichtes eignet sich sehr zur allgemeinen Orientierung über die um die Uniformisierungsprobleme sich gruppierende neueste Entwicklung in der Theorie der automorphen Funktionen.

Von anderer Seite nenne ich ferner:

L. Bieberbach: „Bemerkungen zu den Mitteilungen über automorphe Funktionen", Jahresbericht der D. M. V., 21 (1912), S. 164.

Derselbe: „Über den Jordanschen Kurvensatz, die Schoenfließschen Sätze von Erreichbarkeit und Unbewalltheit und den Satz von der Invarianz des ebenen Gebiets", Jahresbericht der D. M. V., 22 (1913), S. 144–153.

L. E. J. Brouwer: „Über die Singularitätenfreiheit der Modulmannigfaltigkeit". Gött. Nachr. 1912, S. 803—806, auf dessen die Kontinuitätsmethode betreffende schon in „U. d. a. K. III" aufgeführte Noten hier von neuem hingewiesen sei; (Gött. Nachr. 1912 und Jahresbericht der D. M. V., 21 (1912), wie auch auf die Kontinuitätsentwicklungen von Fricke in

Fricke-Klein „Vorlesungen über die Theorie der aut. Funkt.", Bd. II, S. 286—438.

S. Johansson: „Herstellung automorpher Potentiale bei beliebigen Hauptkreisgruppen". Acta Soc. Fenn. 41, No. 2 (1912). Die vom Verfasser in eigenartiger Weise behandelte Aufgabe ist implicite bereits in meiner vierten Mitteilung über die

im Verhältnis zur meinigen. Man kann diesen Unterschied auch als Bezeichnungsgrund wählen und also von einer *Methode der abgeschlossenen Kontinua* einerseits und einer *Methode der offenen Kontinua* andererseits reden.

Klein hatte, wie vor ihm Schläfli (l. c.), das Bestreben, einen Kontinuitätsbeweis im letzteren Sinne zu versuchen. Das Argument jedoch, auf welches Klein sich hauptsächlich stützte, nämlich der Weierstraßsche Satz, daß eine stetige („analytische") Funktion von einem oder mehreren Argumenten in einem Bereich jeden Wert annimmt, dem sie darin beliebig nahe kommt, ist hinfällig und seine Heranziehung lediglich auf ein Mißverständnis zurückzuführen, da der Weierstraßsche Satz nur auf abgeschlossene Kontinua zur Anwendung gelangen kann, während der Bereich, auf welchen Klein ihn anwendet, notorisch nicht abgeschlossen ist. Deshalb war die Kritik, welche Poincaré S. 235—236 seiner Abhandlung in den Acta Math. 4 (1884) an den Kleinschen Skizzierungen seiner (Kleins) Kontinuitätsideen (Math. Ann. 21, S. 208—212) übte, berechtigt und hatte dann den Erfolg, daß die Idee einer mit den offenen Kontinuen operierenden Kontinuitätsmethode überhaupt, auch von Klein selbst aufgegeben wurde.*)

Unif. bel. an. K. (Gött. Nachr. 1909) gelöst, insofern als die allgemeinste Hauptkreisgruppe mit endlich oder unendlich vielen Erzeugenden unter den von mir allgemein definierten Begriff der „Riemannschen Mannigfaltigkeit" fällt.

W. F. Osgood: „Lehrbuch der Funktionentheorie" Zweite Auflage, Teubner 1912; vgl. insbesondere den Abschnitt „Das logarithmische Potential. Uniformisierung", S. 598—753. Zu einer von Herrn Osgood l. c. S. 753 unten gemachten Bemerkung vgl. man eine von mir stammende Notiz in Study: „Vorlesungen über Geometrie", Zweites Heft: „Konforme Abbildung", S. 18.

Derselbe: „On the uniformisation of algebraic fonctions". Annals of Mathematics (2) 14, Nr. 4, 1913, S. 143—162.

H. Weyl: „Die Idee der Riemannschen Fläche" Leipzig, Teubner 1913.

J. Plemelj: „Über den Verzerrungssatz von P. Koebe" (Vortrag, Naturforscherversammlung Wien 1913, erscheint im Jahresbericht der D. M. V.).

Ein von Herrn Plemelj in seiner Arbeit „Die Grenzkreisuniformisierung analytischer Gebilde" (Monatshefte Math. Phys. Bd. 23 (1912), S. 297 ff.) auf S. 302 benützter Ansatz von Funktionen $e^{c_n - s_n - i r_n}$ findet sich auch in meiner ersten Mitteilung „über die U. bel. an. K." (Gött. Nachr. 1907, S. 206 unten und 207 oben).

Von älterer Literatur seien wegen ihrer Beziehung zur Kontinuitätsmethode genannt

E. Ritter: „Die Stetigkeit der automorphen Funktionen bei stetiger Änderung des Fundamentalbereichs". Math. Ann. 45 u. 46 (1894 u. 1895).

*) Man vgl. hierzu Kleins Autographie „Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung" (Leipzig, Teubner, 1894 (Abdruck 1906), insbesondere S. 499—513). Auf Seite 499 unten sagt Klein: „Eine allgemeine Beweismethode für diese Theoreme ist die von mir und Poincaré gleichzeitig gefundene Kontinuitätsmethode, welche ich zuerst in Math. Ann. 21 skizzierte, und welche dann Poincaré in Acta Math. 4 näher ausgeführt hat." Auf S. 512 sagt Klein: „Insbesondere Poincaré hat dieses Verhalten

Hierin wiederum liegt die gewissermaßen unberechtigte Seite der Poincaréschen Kritik, nämlich in dem dieser Kritik zugrundeliegenden Vorurteil, daß der Weg zu einem exakten Kontinuitätsbeweise notwendig über die *„polygones limites"* führen müsse. Wie schwierig eine solche Theorie übrigens ist, kann man aus den bezüglichen Untersuchungen Poincarés l. c. S. 236—240, 250—276 ersehen, Untersuchungen, welche im Poincaréschen Kontinuitätsbeweise als pièce de résistance erscheinen. Man kann daran die Eigenart der von mir gemeinten Wendung in der Auffassung des Kontinuitätsbeweises erkennen. Sind doch in der Tat diese ganzen komplizierten und tiefgehenden Überlegungen Poincarés, unbeschadet der denselben beizumessenden spezifischen Bedeutung, bei meinem Kontinuitätsbeweise entbehrlich, indem dieselben durch ein viel einfacheres, sofort alle Fälle*) umspannendes Argument ersetzt werden. Übrigens erscheint es geradezu aussichtslos, die allgemeineren Fundamentaltheoreme im Sinne Poincarés durch einen Kontinuitätsbeweis zu erledigen, eine Meinung, die auch Poincaré selbst mir gegenüber in einer gelegentlichen mündlichen Besprechung mit mir (Herbst 1910 in Berlin) vertrat, indem er sagte, daß er an einen Kontinuitätsbeweis der allgemeinen Fundamentaltheoreme nicht glaube, weil die zu betrachtenden Kontinua *„nicht geschlossen"* seien.**)

Ich habe es in der vorliegenden Abhandlung gleichwohl nicht für zweckmäßig gehalten, dem Grenzkreistheorem einen besonderen Abschnitt zu widmen, vielmehr mich auf den Standpunkt gestellt, daß das Grenzkreistheorem mittels der Methode der Überlagerungsfläche bewiesen sei („U. d. a. K. I"), um von da aus die auch für die allgemeineren Fundamentaltheoreme notwendige Einsicht in die Variationsmöglichkeit der bei der Komposition beteiligten Grenzkreispolygone zu gewinnen. Hätte ich diesen Standpunkt nicht eingenommen, so wäre ich genötigt gewesen, die geometrische Theorie der Grenzkreisgruppen bzw. Grenzkreispolygone heranzuziehen, deren ausführliche Begründung von Herrn Fricke***) gegeben

der Grenzen der beiden Mannigfaltigkeiten genauer untersucht und darauf hingewiesen, daß auch diese einander tatsächlich korrespondieren."

Übrigens beabsichtige ich (Koebe) meinerseits in späteren Aufsätzen auf die Methode der Grenzpolygone zurückzukommen.

*) Poincaré verlangt demgegenüber „une dicussion spéciale à chaque cas particulier", S. 236 l. c.

**) Ich habe über diese Unterredung mit Poincaré seinerzeit (1910) auch mit Herrn Klein in dem hier dargelegten Sinne korrespondiert. Bezüglich seines Kontinuitätsbeweises des Grenzkreistheorems erklärte Poincaré mir, daß er denselben grundsätzlich für bündig erachte, insofern als man ihn völlig streng machen könne. Die Poincarésche, durch die Heranziehung der „polygones limites" bezw. „polygones limites réduits" charakterisierte Auffassung der Kontinuitätsmethode ist nach ihm selbst von Schlesinger, Fricke und neuestens Brouwer vertreten und ausgestaltet worden.

***) Fricke-Klein: „Vorlesungen über automorphe Funktionen", Bd. 1.

worden ist. Während ich also in der Abhandlung „U. d. a. K. III" den Beweis der allgemeinen Fundamentaltheoreme durch die *Verbindung*: *Methode der Überlagerungsfläche und iterierendes Verfahren* gab, so ist mein Standpunkt in dieser Abhandlung durch die *Verbindung*: *Methode der Überlagerungsfläche und Kontinuitätsmethode* bezeichnet, wobei jene erste Methode lediglich für den Zweck eines Beweises des Grenzkreistheorems benötigt wird.

Es ist namentlich gegenüber Poincaré ein charakteristischer Zug der mehr von Riemann beeinflußten Kleinschen Betrachtungsweisen, Bereiche mit analytischer Ränderzuordnung auf gleicher Linie mit wirklichen Riemannschen Flächen zu betrachten. So hat Klein insbesondere bei seiner Skizze des Kontinuitätsbeweises, geleitet durch gewisse von C. Jordan*) ausgebildete Vorstellungen, die Einheit des Kontinuums der kanonisch aufgeschnittenen Riemannschen Flächen von bestimmter Blätterzahl und bestimmtem Geschlecht dadurch erläutert, daß er die zu einfach zusammenhängenden Bereichen kanonisch aufgeschnittenen Riemannschen Flächen auf die Fläche des Einheitskreises konform abgebildet vorstellte und sich nun auf die „anschauungsmäßige Evidenz" der Einheit (d. i. stetigen Überführbarkeit je zweier Individua ineinander) der so gefundenen Hilfsbereiche (Einheitskreis mit stückweise analytischer Ränderzuordnung) berief. Demgegenüber denke ich mir die durch p getrennte Rückkehrschnitte in einen schlichtartigen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich verwandelte Riemannsche Fläche auf einen schlichten $2p$-fach zusammenhängenden Bereich Φ mit durchweg regulärer analytischer Ränderzuordnung abgebildet und kann für solche Bereiche dann in der Tat die Einheit derselben exakt beweisen. Die allgemein mittels p Rückkehrschnittpaaren und p Einschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelte Riemannsche Fläche aber läßt sich nun sofort auf einen schlichten Bereich Φ der erwähnten Art abbilden, welcher jetzt noch in bestimmter Weise zu einem einfach zusammenhängenden Bereiche aufgeschnitten erscheint, also einem Bereiche mit p regulären analytischen Randsubstitutionen und $2p$ mit der Identität zusammenfallenden Substitutionen. Für Bereiche dieser Art ist jetzt die Einheit derselben wirklich evident. Wünscht man nur die Einheit der unaufgeschnittenen Riemannschen Flächen bestimmten Geschlechts und bestimmter Blätterzahl festzustellen, was für das Grenzkreistheorem genügt, so kann man sich mit Klein auf den Lürothschen Satz über Riemannsche Flächen berufen. Durch die von uns erwähnte Methode der Hilfsabbildung auf Bereiche Φ ist der Vorteil geboten, daß

*) C. Jordan: „Sur la déformation des surfaces" und „Des contours tracés sur les surfaces". Journal de Mathém., (2) 11 (1866).

überhaupt die ganzen von uns hier mittels der Kontinuitätsmethode behandelten Uniformisierungsprobleme auf gleicher Linie erscheinen mit einer allgemeinen Klasse von Abbildungsaufgaben, nämlich Abbildungsaufgaben über schlichte mehrfach zusammenhängende Bereiche, deren Ränder ganz oder stückweise durch analytische Substitutionen aufeinander bezogen sind, wobei nun die Aufgabe darin besteht, dieselben auf Bereiche mit linearer Ränderzuordnung abzubilden.

Im Anschluß an die vorstehenden Bemerkungen will ich jetzt neben den oben aufgeführten Beweispunkten als weiteren besonderen Beweispunkt noch den *Nachweis der Einheit der abzubildenden Bereiche* formulieren, ein Beweispunkt, welcher an dem obigen Beispiel noch nicht hervortreten konnte wegen der dort vorhandenen unmittelbaren Evidenz dieser Tatsache. Dasselbe gilt dort von der Einheit der Spitzenpolygone, d. i. der abgebildeten Bereiche. In dem allgemeinen Falle der Uniformisierungstheorie ist dieser letztere Punkt ebenfalls ein besonderer Beweispunkt, den wir daher auch besonders formulieren als *Beweis der Einheit der abgebildeten Bereiche (Fundamentalbereiche).* Es ist nun wesentlich, daß diese Tatsache für den Kontinuitätsbeweis nicht benötigt wird. Klein, der auch die angegebene Stellung dieser Tatsache innerhalb des Kontinuitätsbeweises oder, richtiger gesagt, außerhalb des Kontinuitätsbeweises noch nicht erkannt hatte, glaubte dieselbe als unmittelbar evident (Math. Ann. 21, S. 208) bezeichnen zu dürfen. Diese Ansicht dürfte sich allerdings schwerlich aufrecht erhalten lassen. Ich begründe die angeführte Tatsache der Einheit der abgebildeten Bereiche auf Grund des bewiesenen Fundamentaltheorems durch ein besonderes Kontinuitätsschlußverfahren an der Hand der zuvor bewiesenen Einheit der abzubildenden Bereiche Φ.*)

Noch eines anderen Umstandes, dessen Stellung im Rahmen des Kontinuitätsbeweises bei mir in neuer Beleuchtung erscheint, will ich hier gedenken. Ich meine die Frage nach der *Diskontinuität der Modulgruppe*,**) eine Frage, welche bei den Auffassungen von Poincaré und Klein sowie im Anschluß daran bei Fricke als wesentliches Glied im Kontinuitätsbeweise erscheint. Zu dieser an sich sehr wichtigen Frage nehme ich in der Weise Stellung, daß ich sie überhaupt vollständig aus dem Kontinuitätsbeweise ausscheide, indem ich zweckentsprechend die $6p-6$ Moduln verwirkliche durch Übergang auf die bekannte *Riemannsche mehrblättrige Parallelogrammfigur*, welche, bei Fixierung von p Perioden und eines ihrer $2p-2$ Windungspunkte, von $6p-6$ reellen Parametern abhängt, wobei es gleichgültig ist, ob hierbei noch die Möglichkeit der birationalen Ver-

*) Diese Auffassung habe ich bereits 1910 Klein brieflich mitgeteilt. Vgl. Fußnote **) S. 48.

**) Vgl. auch die Stellungnahme Brouwers hierzu in seinen S. 46 zitierten Noten.

wandtschaft benachbarter oder nichtbenachbarter Flächen oder auch der Transformation von Flächen in sich besteht.

Ich hatte oben an dem Beispiel auch den Nachweis der umgebungstreuen Abbildung als besonderen Beweispunkt formuliert. In der Tat wird diese Frage, auf so selbstverständliche Weise sie sich bei dem Beispiele selbst erledigt, wegen der Eindimensionalität der in Beziehung gesetzten Kontinua (Kontinuum der α und Kontinuum der β) im allgemeinen Fall ein besonderer Gegenstand der Beweisführung. Ich erledige diesen Punkt durch den Hinweis auf den neuerdings von Brouwer*) in so einfacher und leicht zugänglicher Weise allgemein bewiesenen Satz, daß das *stetige eineindeutige Abbild eines m-dimensionalen Gebiets im m-dimensionalen Raum wieder ein Gebiet* ist, ein Satz, auf dessen Wichtigkeit für die Kontinuitätsmethode bereits Fricke in seinem Vortrage auf dem Heidelberger internationalen Mathematikerkongreß (1904) nachdrücklich hingewiesen hatte. Ich zeige jedoch auf der andern Seite und leiste dadurch wiederum auch mehr, daß ein *rein analytischer Beweis*, wie ihn Poincaré und Klein angestrebt hatten, ebenfalls in allen Fällen möglich ist, d. h. ein Beweis, bei welchem die erst zu erweisende Tatsache der *analytischen* (nicht nur stetigen) Abhängigkeit der zu betrachtenden gleichdimensionalen Kontinua zugrundegelegt wird. Ich halte gleichwohl die Benützung des genannten allgemeinen Stetigkeitssatzes für natürlich und zweckmäßig. Ist doch auch die Anwendung dieses Satzes für eine Dimension in der Analysis geläufig.

Erster Teil.

Die Uniformisierung durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus.

§ 1.

Die Einheit der schlichten Bereiche Φ mit regulärer analytischer Ränderzuordnung.

Die Riemannsche Fläche F der algebraischen Funktion $y(x)$ vom Geschlecht $p \geqq 2$ denken wir uns durch p getrennte Rückkehrschnitte in eine $2p$-fach zusammenhängende, schlichtartige Fläche F_0 verwandelt. Die Fläche F_0 kann dann auf einen schlichten Bereich Φ mit regulärer analytischer Ränderzuordnung abgebildet werden. Dies erreichen wir unter Be-

*) L. E. J. Brouwer: „Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets“, Math. Ann. 72, S. 55—56, und die darin benötigten Entwicklungen Brouwers in Math. Ann. 70, S. 161—165; 71, S. 97—106, 326, 598.

nützung eines von mir in einem früheren Aufsatze*) entwickelten Gedankens in folgender Weise. Wir denken uns den Bereich F über jede seiner $2p$ Begrenzungslinien hinaus ein Stück fortgesetzt durch Anhängung je eines zweifach zusammenhängenden Flächenstreifens. Die so erweiterte Fläche F_0 heiße F_0'. Wir haben es nun in der Hand, die Begrenzung von F_0' aus einer endlichen Anzahl geradliniger Strecken gebildet zu wählen. Nunmehr denken wir uns jeder Begrenzungslinie von F_0' entsprechend einen Punkt P im Raume gewählt und mit P als Spitze einen Pyramidenmantel konstruiert, welcher die erwähnte Begrenzungslinie als Grundlinie hat. Auf diese Weise wird die Fläche F_0' durch Anfügung von $2p$ Pyramidenmänteln in eine geschlossene einfach zusammenhängende Fläche F_0'' verwandelt, welche nach den Beweisprinzipien von Schwarz umkehrbar eindeutig konform auf die schlichte Ebene abgebildet werden kann, da dies für die Umgebung jedes einzelnen Punktes elementar möglich ist, insbesondere auch für die durch die angesetzten Pyramidenmäntel geschaffenen Eckpunkte und Kantenpunkte (Faltungspunkte, wenn die Punkte P in der Ebene der Fläche F selbst angenommen werden). Bei dieser Abbildung der Fläche F_0'' wird nun F_0' offenbar auf ein schlichtes $2p$-fach zusammenhängendes Gebiet abgebildet und F_0 geht in ein Gebiet Φ über, dessen $2p$ Begrenzungslinien in der Tat durch reguläre analytische Substitutionen aufeinander bezogen erscheinen, wenngleich diese Begrenzungslinien selbst nur aus Stücken regulärer analytischer Linien zusammengesetzt sind. In der Tat haben ja die erwähnten Substitutionen auf Grund ihrer Entstehung eine reguläre analytische Bedeutung je in einem gewissen Streifen zu beiden Seiten dieser Linie. Dieser Streifen ist das bei der Abbildung gefundene Bild desjenigen Flächenstreifens von F, den man erhält, wenn man die dem Rückkehrschnitte entsprechend gewählten beiden Zusatzflächenstreifen zu einem einzigen Streifen zusammengefügt denkt. Dieser Streifen ist auf der Fläche F_0'' doppelt vorhanden und wird bei der Abbildung zweimal dargestellt.

Es ist nun von Wichtigkeit, eine *Modifikation* der Begrenzung des gefundenen Bereichs Φ, den wir jetzt mit Φ' bezeichnen wollen, in der Art vorzunehmen, daß die $2p$ Randkurven des neuen Bereichs, Φ, *sämtlich geschlossene reguläre analytische Linien* werden. Die Begrenzungslinien von Φ sollen dabei der Bedingung genügen, durch bloße Deformation aus den entsprechenden Begrenzungslinien des Bereichs Φ hervorzugehen, wo-

*) Meraner Vortrag 1905, abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1906: „Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird.“ Siehe insbesondere S. 150 ff.; vgl. auch meine Abhandlung „U. d. a. K. II“ § 13, Math. Ann. 69 (1910), S. 43.

bei während der Deformation die analytischen Randsubstitutionen bestehen bleiben. Diese Modifikation kann in folgender Weise ausgeführt werden.

Wir bemerken zunächst, daß wir, was keine Beschränkung des Grades der Allgemeinheit der Untersuchung bedeutet, den Bereich Φ' als einen den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltenden Bereich vorstellen. Die Ebene des Bereichs Φ' möge als z-Ebene bezeichnet werden. Wir fassen nun ein Paar einander zugeordneter Begrenzungslinen l und l' des Bereichs Φ' ins Auge und wollen zunächst für dieses Paar eine Deformation in dem gewünschten Sinne ausführen, von welcher zugleich die anderen Paare nicht betroffen werden. Zu dem Zwecke bilden wir das ganze einfach zusammenhängende, von l umschlossene Gebiet der z-Ebene vermittelst einer Funktion $Z(z)$ auf das Innere des Einheitskreises ab. Diese Abbildung unterliegt bei Zugrundelegung der Schwarz-Neumannschen kombinatorischen Methoden keinen Schwierigkeiten, weil die Linie l ihrer Entstehung gemäß aus lauter regulären analytischen Linienstücken gebildet ist. Nunmehr denken wir uns innerhalb des Einheitskreises der Z-Ebene einen mit diesem konzentrischen Kreis K konstruiert, dessen Radius r hinreichend nahe an 1 gewählt werden möge. Der Grad der Annäherung des zu wählenden Kreises K an den Einheitskreis bestimmt sich aus der Bemerkung, daß das Bild L von K in der z-Ebene, welches jedenfalls eine geschlossene reguläre analytische Linie ist, noch in den oben betrachteten um l definierten Streifen hineinfällt, in welchem die betreffende Randsubstitution eine reguläre Bedeutung besitzt und eine schlichte und endliche, die andern $2p-1$ Begrenzungslinien von Φ' nicht störende Abbildung vermittelt, sodaß vermöge dieser Substitution die Linie L auch in eine reguläre geschlossene Linie, L', verwandelt wird. Die gefundenen Linien L und L' wählen wir jetzt an Stelle von l und l' als Begrenzungslinienpaar des zu definierenden Bereichs Φ.

Analog verfahren wir mit den $p-1$ übrigen Begrenzungslinienpaaren und erhalten so den Bereich Φ mit p Paaren geschlossener, ganz im Endlichen verlaufender regulärer analytischer Begrenzungslinien L_1, L_1', $L_2, L_2', \cdots, L_p, L_p'$. Die Figur 1 zeigt einen derartigen Bereich schematisch im Falle $p=2$. Durch die punktierten Linien sind die Begrenzungslinien umgebende Streifen angedeutet, welche durch die Randsubstitutionen eineindeutig regulär aufeinander bezogen werden.

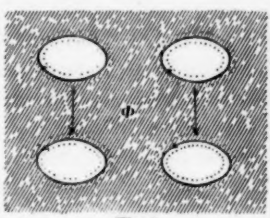


Fig. 1.

Diese Streifen mögen mit $\Lambda_1, \Lambda_1', \Lambda_2, \Lambda_2', \cdots, \Lambda_p, \Lambda_p'$ bezeichnet werden, und wir dürfen dieselben, wie in Figur 1, soweit beschränkt vorstellen, daß sie ganz im Endlichen liegen und voneinander völlig getrennt sind.

Wir fassen nunmehr die Gesamtheit aller Bereiche der Gattung Φ bei bestimmtem p ins Auge, d. i. also die Gesamtheit aller den unendlich fernen Punkt im Innern enthaltenden $2p$-fach zusammenhängenden, von $2p$ geschlossenen, paarweise regulär und eineindeutig mit entgegengesetztem Umlaufssinn aufeinander bezogenen regulären analytischen Linien begrenzten Bereiche. Wir wollen die *Einheit des Kontinuums der* Φ beweisen. D. h. für uns präziser folgendes: Wenn Φ_1 und Φ_2 irgend zwei Bereiche der Gattung Φ sind, so ist es möglich, durch stetige Veränderung der Begrenzungslinien und der Randsubstitutionen von dem Bereiche Φ_1 zu dem Bereiche Φ_2 zu gelangen, immer im Kontinuum der Φ bleibend. Es soll also, behaupten wir, in der Φ-Mannigfaltigkeit zwischen Φ_1 und Φ_2 eine *Überführungslinie* Ω, wie wir uns ausdrücken wollen, existieren. Die Konstruktion dieser Linie Ω zwischen Φ_1 und Φ_2 ist die Aufgabe, mit der wir uns jetzt beschäftigen wollen. Bei der Lösung dieser Aufgabe haben wir mit Rücksicht auf die spätere Anwendung auch darauf zu achten, daß wir uns während der Überführung in jedem Moment ein Urteil über die Breite der um die Begrenzungslinien jeweilig existierenden $2p$ Flächenstreifen Λ bilden, daß wir insbesondere während der ganzen Überführung eine *durchgängig gültige Breite* dieser Streifen angeben können.

Das Verfahren, welches die gestellte Aufgabe löst, kann zweckmäßig als *Methode der Ringverschiebung* bezeichnet werden, weil der Hauptgedanke der Überlegung in der Heranziehung der Abbildung zweifach zusammenhängender Bereiche auf Kreisringflächen beruht, in welchen der Übergang von der einen zur andern Randlinie stetig mittels der konzentrischen Kreise als Zwischenglieder ausgeführt wird, wobei zugleich ein sich ähnlich mit sich selbst verändernder umgebender kreisringförmiger Flächenstreifen mitverschoben gedacht wird.

Es sei B ein von zwei geschlossenen regulären analytischen Linien begrenzter zweifach zusammenhängender schlichter Bereich der z-Ebene, in welcher wir unsere Deformation vornehmen wollen. Alsdann wird der Bereich B in folgender Weise auf einen Kreisring abgebildet. Man nehme der einfacheren Sprechweise halber, was auch im folgenden allein in Betracht kommt, an, daß der Bereich B den unendlich fernen Punkt weder im Inneren noch auf seiner Begrenzung enthält. Alsdann wird B von einer äußeren Begrenzungslinie s_2 und einer inneren Begrenzungslinie s_1 begrenzt. Man bestimme nun diejenige in B reguläre Potentialfunktion u, welche auf s_1 den Wert -1 annimmt und auf s_2 den Wert 0. Bildet man jetzt das Integral $\int\limits_{s_1} \frac{du}{dn} ds$, dn in der Richtung der inneren Normalen, d. h. der in den Bereich B hineinführenden Normalen genommen, so wird sich dafür ein positiver von 0 verschiedener Wert 2ω ergeben, welcher auf den

Wert 2π gebracht wird, indem man an Stelle der Funktion u die Funktion $\frac{u\pi}{\omega}$ betrachtet. Es sei v die zu u konjugierte Potentialfunktion. Alsdann vermittelt die Funktion $e^{\frac{\pi(u+iv)}{\omega}}$, welche in B eindeutig und von 0 und ∞ verschieden ist, eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf einen Kreisring, dessen äußerer der Linie s_2 entsprechender Begrenzungskreis der Einheitskreis ist, während der innere, der Linie s_1 entsprechende Begrenzungskreis mit dem Einheitskreise konzentrisch ist und den Radius $e^{-\frac{\pi}{\omega}}$ besitzt. In der Tat ergibt sich der genannte Charakter der Abbildung sofort durch Anwendung des Satzes von der Charakteristik des Randes, wenn man beachtet, daß die Begrenzungslinien s_1 und s_2 selbst in der Tat eineindeutig und mit demselben Umlaufssinn auf die erwähnten Kreislinien abgebildet werden.

Nach diesen Vorbemerkungen gehe ich nun zur Darlegung des *Ringverfahrens* selbst über. Die gestellte Aufgabe der Überführung des Bereichs Φ_1 in den Bereich Φ_2 wird in drei Schritten gelöst.

Der *erste Schritt* besteht darin, daß die Bereiche Φ_1 und Φ_2 je in einen Bereich $\overline{\Phi}_1$ und $\overline{\Phi}_2$ übergeführt werden, deren sämtliche Begrenzungslinien Vollkreise sind, wobei, allgemein zu reden, die Bezugssubstitutionen noch allgemein analytisch, noch nicht linear sein werden. Diese Überführung geschieht so.

Wir nehmen etwa die Begrenzungslinie L des Bereichs Φ_1. Diese Begrenzungslinie umschließt ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene. Innerhalb dieses Gebiets wählen wir eine beliebige, geschlossene Kreislinie K, welche mit L keinen Punkt gemeinschaftlich hat. Die Linien L und K begrenzen einen zweifach zusammenhängenden Bereich B, welchen wir den obigen Angaben gemäß auf einen Kreisring R einer Z-Ebene abbilden mit dem Einheitskreis als äußerem Begrenzungskreis. Jetzt werde in R und darüber hinaus das System der mit dem Einheitskreise konzentrischen Kreise und das System der dazu orthogonalen geradlinigen Strecken der Z-Ebene konstruiert. Wir können dann in der Z-Ebene den äußeren Begrenzungskreis K_1 von R mit dem Radius 1 allmählich in den inneren Begrenzungskreis K_ϱ von R mit dem Radius ϱ übergehen lassen, indem wir ihn unter beständiger Verkleinerung eben die erwähnten konzentrischen Kreise zwischen K_1 und K_ϱ durchlaufen lassen. Damit ist ein bestimmter Überführungsprozeß bezeichnet, bei welchem auch die Bewegung jedes einzelnen Punktes völlig bestimmt ist, wenn festgesetzt wird, daß der einzelne Punkt je auf der auf den Nullpunkt gerichteten geradlinigen Strecke gleiten soll. Nunmehr beachten wir, daß der in der Z-Ebene definierte Überführungsprozeß sich vermöge der durch die Funktion $Z(z)$

definierten konformen Abbildung auf die z-Ebene überträgt und dort eine ganz bestimmte Deformation der Linie L in den Kreis K durch den Bereich B hindurch liefert, bei welcher auch die Bewegung jedes einzelnen Punktes vorgeschrieben ist.

Wir überlegen noch, ob bei der erwähnten Deformation eine gleichmäßige Streifenbreite für alle Bereiche Φ gewährleistet ist. Wir betrachten in der Z-Ebene irgend einen Kreis K_r mit dem Radius r, wobei $\varrho < r < 1$ sei. Alsdann ist K_r auf den Einheitskreis der Z-Ebene, genannt K_1, durch die Substitution $Z' = rZ$ bezogen, welche in der ganzen Z-Ebene regulär erklärt ist. Wir können nun eine positive Größe $\eta > 1$ so nahe an 1 wählen, daß die Funktion $z(Z)$ auch noch in dem durch die Ungleichheitsbedingungen $\frac{\varrho}{\eta} \leqq |Z| \leqq \eta$ definierten Ring $\bar{R}$ regulär erklärt ist und eine schlichte Abbildung vermittelt, bei welcher insbesondere den begrenzenden Kreises K_η und $K_{\frac{\varrho}{\eta}}$ des Ringes $\bar{R}$ zwei beziehungsweise L und K in der z-Ebene benachbart verlaufende Linien l und k entsprechen, welche ein zweifach zusammenhängendes, endliches, den Bereich B enthaltendes Gebiet b begrenzen, das die $2p-1$ weiteren Begrenzungslinien des Bereichs Φ ausschließt.

Wir bezeichnen mit R_r den in der Z-Ebene liegenden Kreisring, welcher durch die Ungleichheitsbedingungen $\frac{r}{\eta} \leqq |Z| \leqq r \cdot \eta$ erklärt ist, also inbezug auf die Kreislinie K_r zu sich selbst spiegelbildlich symmetrisch ist. Es ist dann R_r auf R_1 (d. i. R_r für $r = 1$), durch die Substitution $Z' = rZ$ bezogen, eine Beziehung, welche sich auf die z-Ebene überträgt, wobei der Linie K_r und dem Gebiete R_r die Linie k_r und das Gebiet b_r, beide in b enthalten, entsprechen.

Die Linie k_r ist auf L, welche Linie wir auch mit k_1 (d. i. k_r für $r = 1$) bezeichnen können, vermittelst einer im Gebiete b_r sicher regulären und dieses Gebiet schlicht auf b_1 abbildenden, analytischen Funktion bezogen. In völlig übersehbarer Weise verschiebt sich nun b_r stetig, wenn r die Werte von 1 bis ϱ durchläuft.

Wie wir soeben mit Linie L verfahren haben, können wir nacheinander auch mit den übrigen $2p-1$ Begrenzungslinien des Bereichs Φ_1, danach auch mit den Begrenzungslinien des Bereichs Φ_2 verfahren. Das Ergebnis ist, daß wir die Bereiche Φ_1 und Φ_2 in Bereiche $\bar{\Phi}_1$ und $\bar{\Phi}_2$ deformiert haben, deren Besonderheit darin besteht, daß die *Begrenzungslinien lauter Vollkreise* geworden sind.

Nunmehr vollführen wir den *zweiten Schritt*, welcher darin besteht, daß die Bereiche $\bar{\Phi}_1$ und $\bar{\Phi}_2$ in Bereiche mit *übereinstimmenden Begrenzungskreisen*, jedoch, allgemein zu reden, noch verschiedenen analytischen Bezugs-

substitutionen übergeführt werden. Diese Überführung ist besonders einfach. Wir können nämlich zunächst eine Deformation vornehmen, bei welcher die $2p$ Begrenzungskreise des einen Bereichs den entsprechenden Begrenzungskreisen des zweiten Bereichs gleich groß werden. Wir brauchen dazu nur mit jedem der $4p$ Kreise eine geeignete ähnliche stetige Verkleinerung vorzunehmen mit dem Kreismittelpunkte als Ähnlichkeitszentrum. Hierbei ist unmittelbar auch die damit verbundene stetige Änderung der analytischen Bezugssubstitutionen gegeben. Sind Φ_1' und Φ_2' die nunmehr gefundenen Bereiche mit entsprechend gleich großen Begrenzungskreisen, so kann man durch Verschiebung der Kreise, wobei man sich die Randsubstitutionen auf den Kreisen markiert denken möge, den Bereich $\bar{\Phi}_1'$ in den Bereich Φ_2' als solchen überführen. Nach der Überführung koinzidieren natürlich im allgemeinen nur die Begrenzungskreise als solche, nicht auch die auf ihnen erklärten analytischen Bezugssubstitutionen. Wir können auch so sagen: die beiden Bereiche $\bar{\Phi}_1$ und $\bar{\Phi}_2$ sind in einen und denselben von $2p$ Kreisen begrenzten Bereich $\bar{\Phi}$ übergeführt, abgesehen von den Randsubstitutionen. Für den Bereich $\bar{\bar{\Phi}}$ sind die $2p$ Begrenzungskreise in bestimmter Weise gepaart und für jedes Paar auf zwei Weisen die analytischen Bezugssubstitutionen erklärt, sodaß wir, wenn $\bar{\bar{L}}_1, \bar{\bar{L}}_1', \bar{\bar{L}}_2, \bar{\bar{L}}_2', \cdots, \bar{\bar{L}}_p, \bar{\bar{L}}_p'$ die p Paare begrenzender Kreise sind, $2p$ Substitutionen haben $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \cdots, \varphi_p, \psi_p$, von welchen die beiden Substitutionen des α^{ten} Paares die Linie $\bar{\bar{L}}_\alpha$ in die Linie $\bar{\bar{L}}_\alpha'$ überführen.

Wir haben nun den *dritten Schritt* auszuführen. Dieser dritte Schritt besteht in der Ausführung einer Deformation der erwähnten analytischen Substitutionen in der Weise, daß schließlich φ_α in ψ_α übergeführt erscheint, wobei während der Überführung die jeweilige Substitution χ_α eine eineindeutige regulär analytische Abbildung des Kreises $\bar{\bar{L}}_\alpha$ auf den Kreis $\bar{\bar{L}}_\alpha'$ liefern muß, welche beiden Kreise als fest zu denken sind.

Um diese Überführung vorzunehmen, bemerken wir, daß für das Linienpaar $\bar{\bar{L}}_\alpha, \bar{\bar{L}}_\alpha'$ sich die Aufgabe so fassen läßt: es soll die auf der Linie $\bar{\bar{L}}_\alpha'$ vermöge der beiden Beziehungen dieser Linie auf die Linie $\bar{\bar{L}}_\alpha$ erklärte Substitution dieser Linie $\bar{\bar{L}}_\alpha'$ in sich in die identische Substitution übergeführt werden. Entsprechend ist die Aufgabe für die übrigen $p-1$ Kreispaare zu formulieren. Damit sind wir auf eine *Fragestellung* gekommen, welche wir nun für sich herausstellen, nämlich die folgende: Auf einem Kreise, den wir als Einheitskreis wählen können, ist eine eineindeutige reguläre analytische Verschiebung dieser Linie in sich erklärt. Man soll eine einparametrige stetige Veränderung dieser Substitution, wobei dieselbe während der Änderung in jedem Augenblick wieder eine eineindeutige reguläre Verschiebung des Einheitskreises in sich repräsentieren

soll, so vornehmen, daß schließlich die identische Substitution gewonnen wird. Die einzelne analytische Verschiebung des Einheitskreises in sich von der betrachteten Art wird natürlich nicht nur auf der Peripherie des Einheitskreises als solcher existieren, sondern sie wird stets in einem gewissen, den Einheitskreis selbst enthaltenden Ringgebiete regulär erklärt sein, sodaß sie eine durchaus schlichte und endliche Abbildung dieses Rings liefert. Für die Behandlung der Frage kann man übrigens die Beschränkung auf Substitutionen, die den Einheitspunkt fest lassen, ohne weiteres einführen.

Wir bezeichnen den Einheitskreis der z-Ebene mit K_1 und einen mit ihm konzentrischen Kreis vom Radius r allgemein mit K_r. Ferner möge die als gegeben vorausgesetzte analytische Substitution auf dem Einheitskreise mit $\zeta = S(z)$ bezeichnet werden. Wir wählen eine Größe $\eta > 1$ so nahe an 1, daß auch noch in dem von K_η und $K_{\frac{1}{\eta}}$ begrenzten Kreisringe R_η die Funktion $S(z)$ regulär erklärt ist und eine schlichte und endliche Abbildung dieses Kreisrings auf einen endlichen Ring r_η (allgemein zu reden nicht Kreisring) vermittelt, dessen beide Begrenzungslinien mit k_η und $k_{\frac{1}{\eta}}$ bezeichnet werden mögen. Wir denken uns diesen Ring noch in einer besonderen ζ-Ebene gezeichnet. Die Substitution $\zeta = S(z)$ kann nun geradezu erklärt werden durch die Linie k_η in folgender Weise: Die Linie k_η begrenzt mit dem Einheitskreise der ζ-Ebene einen Ring. Dieser Ring kann nur auf eine Weise dergestalt auf einen den Einheitskreis der z-Ebene als inneren Begrenzungskreis enthaltenden Kreisring abgebildet werden, daß dabei der Einheitspunkt selbst wieder in den Einheitspunkt übergeht. Insofern kann also die Linie k_η zur Definition der Substitution $\zeta = S(z)$ dienen. Wir konstruieren nun in der ζ-Ebene einen Kreis k_ϑ mit dem Radius ϑ und wählen ϑ so groß, daß k_ϑ die Linie k_η vollständig umschließt. Den zweifach zusammenhängenden, von k_η und k_ϑ begrenzten Bereich der ζ-Ebene denken wir uns auf einen Kreisring abgebildet und vermöge dieser Abbildung gemäß unserem *Prinzip* der *Ringverschiebung* eine stetige Überführung der Linie k_η in den Kreis k_ϑ vorgenommen. Ist k_λ $(\eta < \lambda < \vartheta)$ eine während der Überführung auftretende Linie, so gehört zu k_λ eine bestimmte Substitution $S_\lambda(z)$, durch welche der vom Einheitskreise der z-Ebene und von K_λ ($\equiv$ Kreis mit dem Radius λ) begrenzte Ring der z-Ebene auf den ζ-Ring zwischen k_1 und k_λ unter Festhaltung des Einheitspunktes abgebildet wird. Es ist klar, daß, wenn k_λ in den Kreis k_ϑ übergegangen ist, die Substitution s_λ die identische Substitution geworden ist.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob die Substitution $S_\lambda(z)$ sich stetig mit k_λ ändert und auch die Breite des um den Einheitskreis herum be-

stehenden jeweiligen Abbildungsstreifens zu beurteilen. Beide Fragen erledigen sich aus der Konstruktion der Bezugssubstitutionen $S_\lambda(z)$. Bezeichnen wir zu dem Zwecke mit u_λ diejenige in der ζ-Ebene erklärte Potentialfunktion, welche auf dem Einheitskreise k_1 den Wert 0, auf der Linie k_λ den Wert 1 hat und in dem Ring zwischen k_1 und k_λ regulär und eindeutig ist, so wird die Größe λ des Radius, welchen bei der mit $S_\lambda(z)$ bezeichneten konformen Abbildung der k_λ in der z-Ebene entsprechende Kreis K_λ besitzt, durch das Integral $2\omega = \int\limits_{k_1} \frac{d u_\lambda}{d n} ds$ in der Gestalt $\lambda = e^{\frac{\pi}{\omega}}$ ausgedrückt. Da nun $u_\eta < u_\lambda < u_\vartheta$, weil k_λ zwischen k_η und k_ϑ liegt, so ergibt sich $\eta < \lambda < \vartheta$. D. h.: Die Substitutionen $S_\lambda(z)$, die sich bei der Deformation ergeben, sind alle in dem Kreisring R_η der z-Ebene regulär erklärt, welcher durch die Ungleichheitsbedingungen $\frac{1}{\eta} \leqq |z| \leqq \eta$ definiert ist. Hiermit ist zunächst ein Urteil über die Streifenbreite der analytischen Substitutionen $S_\lambda(z)$ gewonnen. Es handelt sich jetzt noch um den Nachweis der stetigen Änderung der Substitution $S_\lambda(z)$ während der Überführung. Für diesen Nachweis genügt es, die stetige Änderung des Potentials u_λ zu beweisen, wenn k_λ die vorgeschriebene stetige Variation ausführt. Es seien zu dem Zwecke k_λ und $k_{\lambda'}$ zwei benachbarte Kurven, die bei der Überführung vorkommen, und zwar möge $k_{\lambda'}$ die Kurve k_λ umschließen. Zur Beurteilung der Größe der Differenz $u_{\lambda'} - u_\lambda$ ist nur erforderlich die Abschätzung dieser Differenz auf der Linie k_λ. Auf k_λ hat u_λ den Wert 1, $u_{\lambda'}$ jedoch hat auf k_λ Werte, die sich von dem auf $k_{\lambda'}$ angenommenen Werte 1 um einen beliebig klein werdenden Betrag unterscheiden, wenn $k_{\lambda'}$ und k_λ hinreichend nahe aneinander liegen, weil alle Funktionen u_λ eine angebbar endliche Steilheit des Abfalls besitzen. Das ergibt sich sofort, wenn wir die Funktionen*) u_λ auf die Z-Ebene überpflanzt denken, auf welche der Ring zwischen k_η und k_ϑ als Kreisring abgebildet worden ist, um von da aus zur Definition der Linien k_λ zu gelangen. Man beachte einerseits die vorstehenden Entwicklungen, andererseits den Satz, daß für eine Potentialfunktion, welche in einem Kreise dem absoluten Betrage ihrer Werte nach unterhalb einer endlichen Schranke M bleibt, vermöge des Poissonschen Integrales auch Schranken für den absoluten Betrag der Ableitungen hergeleitet werden können in einem zu dem ersteren konzentrischen Kreise, Schranken, welche nur durch die Radien der genannten beiden Kreise und durch die angenommene Schranke M bestimmt werden. Auf Grund dieses Satzes ge-

*) Der Ausdruck „Funktionen u_λ" statt „Funktion u_λ" soll bedeuten, daß wir u in seiner Abhängigkeit von dem Parameter λ betrachten, also eine Funktionenschar.

langen wir sofort zum Ziele, wenn wir, wie gesagt, die Betrachtung in die Z-Ebene verlegen und dort das überpflanzte Potential u_λ über den der Linie k_λ entsprechenden Kreis $\varkappa_\lambda$ der Z-Ebene analytisch fortsetzen, wobei dann u_λ in einem bestimmten Bezirke unterhalb 2 bleibt, welcher Bezirk als ein $\varkappa_\lambda$ einbettender konzentrischer Kreisring gewählt werden kann, der in bezug auf $\varkappa_\lambda$ zu sich selbst spiegelbildlich symmetrisch ist und dessen Radienverhältnis für alle k_λ fest gewählt werden kann.

Hiermit ist vollständig der Weg gezeichnet, um den Bereich Φ_1 in den Bereich Φ_2 innerhalb des Φ-Kontinuums überzuführen, da beide Bereiche in einen und denselben Φ-Bereich übergeführt worden sind. Wir bezeichnen die gefundene Überführungslinie von Φ_1 nach Φ_2 hin als die *Überführungslinie* Ω im Kontinuum der Φ.

Wir hatten bereits oben bemerkt, daß es von Wichtigkeit sei zu konstatieren, daß wir auf Grund des Überführungsmodus imstande sind, längs der ganzen Überführungslinie Ω mittels bestimmter Abschätzungsformeln die Größe und Gestaltsverhältnisse aller der Überführungslinie angehörenden Bereiche Φ zu beschreiben. In der Tat sehen wir ohne weiteres, daß längs der ganzen Linie Ω die Begrenzungslinien sämtlicher Bereiche Φ in einem endlichen, direkt bestimmbaren Bezirke bleiben. Wir bemerken ferner sofort die Möglichkeit der unmittelbaren Angabe einer oberen und unteren Schranke für die Distanzen der $2p$ Begrenzungslinien untereinander, sowie für ihre größten Durchmesser (Spannweiten). Schließlich bemerken wir noch folgendes: Wir können jede der Linien $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \cdots, L_p^{(1)}$, das sind die p ersten Begrenzungslinien des Bereichs Φ_1, je in ein ringartiges Gebiet (*Grundring*) so einbetten, daß nicht nur die Linien $L_1^{(1)'}, L_2^{(1)'}, \cdots, L_p^{(1)'}$ und damit die analytischen Bezugssubstitutionen des Bereichs Φ_1, sondern auch alle $2p$ Begrenzungslinien jedes Bereichs Φ der Überführungslinie Ω nebst den Bezugssubstitutionen aus jenen p *Grundringen* dadurch entstehen, daß dieselben in ihrer Vollständigkeit gewissen schlichten regulären Abbildungen unterworfen werden, woraus unmittelbar die gewünschten generellen Schranken mittels des Verzerrungssatzes hergeleitet werden können, so namentlich eine allgemein gültige Streifenbreite für die Bezugssubstitutionen (welche übrigens auch direkt durch das Prinzip der Ringverschiebung, wie wir dasselbe zur Anwendung gebracht haben, gewährleistet wird). Wir wollen in dieser Beziehung folgende Folgerung aus dem Verzerrungssatze nennen.

Satz (Folgerung aus dem Verzerrungssatze): Es sei B ein schlichter endlicher zweifach zusammenhängender Bereich, innerhalb dessen eine ihn in zwei zweifach zusammenhängende Bereiche β_1 und β_2 zerlegende geschlossene Linie L verläuft. Der Bereich B werde irgend einer schlichten eineindeutigen endlichen konformen Abbildung unterworfen, bei

welcher B, L, β_1, β_2 in B', L', β_1', β_2' übergeht. Es sei d' der kürzeste Abstand der Linie L' von der Begrenzung des Bereichs B', ferner s' der Umfang oder auch die Spannweite der Linie L'. Alsdann bleibt das Verhältnis $\frac{d'}{s'}$ zwischen zwei von 0 und ∞ verschiedenen endlichen Schranken

$$q < \frac{d'}{s'} < Q,$$

welche von der Wahl der Abbildungsfunktion unabhängig sind.

Der Beweis ergibt sich mit wenigen Strichen aus dem Verzerrungssatze. Denkt man sich die Linie L in einen zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen β eingebettet, dessen beide Begrenzungslinien mit der Begrenzung von B keinen Punkt gemeinschaftlich haben, so besagt der Verzerrungssatz, daß der Quotient $|f'(z')| : |f'(z'')|$, unter f' die Ableitung der Abbildungsfunktion, unter z' und z'' irgend zwei Punkte des Bereichs β verstanden, zwischen zwei von 0 und ∞ verschiedenen endlichen Schranken bleibt, die von der Wahl der Abbildungsfunktion unabhängig sind:

$$\bar{q} < \frac{|f'(z')|}{|f'(z'')|} < \bar{Q}.$$

Hieraus ist der obige Satz zu entnehmen.

§ 2.

Die stetige Änderung der zu Φ gehörenden Abelschen Integrale erster Art in Abhängigkeit von Φ.

Wir haben in § 1 nur die Bereiche Φ selbst untersucht. Nunmehr wollen wir unsere Aufmerksamkeit den zu Φ gehörenden Funktionen zuwenden, insbesondere den Abelschen Integralen erster Art. Für diese Integrale wollen wir die Stetigkeit ihrer Änderung beweisen, wenn Φ stetig abgeändert wird, also z. B. wenn Φ die Überführungslinie Ω von dem Bereiche Φ_1 zu dem Bereiche Φ_2 durchläuft, oder wenn Φ unter der Voraussetzung speziell linearer Ränderzuordnung dadurch modifiziert wird, daß man die p linearen Substitutionen von einem Ausgangssystem aus frei variiert. Wir werden unten die stetige Änderung der Abelschen Integrale gerade mit Bezug auf die genannten beiden Variationsmöglichkeiten benützen.

Wir erinnern zunächst an die Bezeichnungen. Die $2p$ paarweise einander zugeordneten Begrenzungslinien des Bereichs Φ bezeichnen wir mit $L_1, L_1', L_2, L_2', \cdots, L_p, L_p'$. Der unendlich ferne Punkt ist innerer Punkt des Bereichs Φ. Die erwähnten Linien sind lauter geschlossene reguläre analytische Linien. Die p analytischen Bezugssubstitutionen mögen mit $S_1(z), S_2(z), \cdots, S_p(z)$ bezeichnet werden.

Nach den Schwarz-Neumannschen kombinatorischen Methoden läßt sich entsprechend dem α^{ten} Begrenzungslinienpaare eine in Φ reguläre und eindeutige Potentialfunktion u_α finden, welche gegenüber den Substitutionen $S_1, S_2, \cdots, S_{\alpha-1}, S_{\alpha+1}, \cdots, S_p$ ungeändert bleibt, gegenüber der Substitution S_α hingegen eine Vermehrung um den konstanten Wert 1 erfährt. Das erwähnte Verhalten gegenüber den Bezugssubstitutionen wird dabei so verstanden, daß dasselbe nicht nur längs der Begrenzungslinien selbst statt hat, sondern darüber hinaus in gewissen Streifen Λ (vgl. S. 53), in welchen die Substitutionen erklärt sind. Die Funktion u_α ist demnach gemäß diesen Substitutionen ein Stück über die $2p$ Begrenzungslinien hinaus analytisch fortsetzbar. Wird für u_α noch die Bedingung gestellt, daß der Wert dieses Potentials im unendlich fernen Punkt null sein soll so ist u_α durch seine angegebenen Eigenschaften vollständig bestimmt, weil die Annahme zweier derartiger Funktionen eine Differenzfunktion w liefern würde, welche gegenüber allen p Substitutionen ungeändert bleibt, dazu in Φ eindeutig ist und im Unendlichen verschwindet. Für diese Funktion w ergibt sich aber, wenn jetzt und im folgenden allgemein mit $\underset{A}{D}(f)$ das über einen Bereich A erstreckte Dirichletsche Integral

$$\underset{A}{D}(f) = \iint\limits_A \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) dx\, dy$$

bezeichnet wird, daß

$$\underset{A}{D}(w) = \sum_{\nu=1}^{p} \int\limits_{L_\nu} w \frac{dw}{dn} ds - \sum_{\nu=1}^{p} \int\limits_{L'_\nu} w \frac{dw}{dn} ds = 0$$

ist, weil $w \frac{dw}{dn} ds$ für zugeordnete Randelemente denselben Wert ergibt. Damit ist gezeigt, daß w konstant, also $= 0$ ist, weil dieser konstante Wert im Unendlichen 0 ist.

Zu u_α gehört ein konjugiertes Potential v_α. Um die p konjugierten Potentiale v_α zu normieren, denken wir uns, wie in Figur 2 angedeutet, p Querschnitte $Q_1, \cdots, Q_p$ konstruiert, deren α^{ter} eine Verbindung zwischen zwei zugeordneten Punkten des α^{ten} Randkurvenpaares herstellt. Die auf diese Weise in eine p-fach zusammenhängende Fläche verwandelte Fläche Φ möge mit φ bezeichnet werden. Die Funktion v_α ist nun in φ dadurch eindeutig normiert, daß man festsetzt, es soll v_α im unendlich fernen Punkte verschwinden. Die Funktion v_α ist in Φ sicher nicht eindeutig, vielmehr besitzt sie mindestens längs eines der p Querschnitte einen von 0 verschiedenen Periodizitäts-

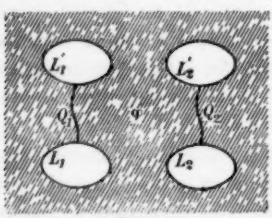


Fig. 2.

modul. In der Tat würde andernfalls $u_\alpha + iv_\alpha$ eine in Φ eindeutige Funktion W sein, welche sich gegenüber den Substitutionen nur um gewisse additive Konstanten ändert. Man hätte nun

$$D_\Phi(u_\alpha) = \sum \int_{L_\nu} u_\alpha \, dv_\alpha - \sum \int_{L_\nu'} u_\alpha \, dv_\alpha$$

oder, wie sich bei Vergleichung zugeordneter Randelemente ergibt,

$$D_\Phi(u_\alpha) = \int_{L_\alpha} 1 \, dv_\alpha = 0.$$

Wir bemerken jetzt weiter, daß auch keine lineare homogene Kombination der v_α, etwa $\sum c_\nu v_\nu$, eine in Φ eindeutige Funktion liefern kann, da alsdann die Funktion $\sum (c_\nu u_\nu + i c_\nu v_\nu)$ eine in Φ eindeutige analytische Funktion W wäre, welche sich nur gegenüber den Randsubstitutionen und zwar um additive Konstanten ändert. Es ergibt sich hieraus, daß die Determinante Δ der p Systeme von je p Periodizitätsmoduln, welche den p Funktionen v_α mit Bezug auf die p Querschnitte Q zukommt, von 0 verschieden ist. Wir bemerken nun weiter, daß die $2p$ Funktionen $u_1, \cdots, u_p$, $v_1, \cdots, v_p$, welche in φ jedenfalls sämtlich eindeutig sind, in *reellem Sinne* genommen, linear unabhängig sind. In der Tat würde das Bestehen einer linearen Gleichung bedeuten, daß für die betreffende lineare Verbindung sowohl die Periodizitätsmoduln an den Q als auch die den Bezugssubstitutionen entsprechenden Periodizitätsmoduln verschwinden. Hieraus aber folgt bei Betrachtung der Q, daß die eingehende Kombination der v für sich verschwinden muß, also die Koeffizienten derselben alle 0 sein müssen. Darnach ist dann auch klar, daß die Koeffizienten der u sämtlich verschwinden müssen.

Nunmehr ergibt sich, daß die p Integralfunktionen

$$J_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha, \qquad [\alpha = 1, 2, \cdots, p],$$

die im unendlich fernen Punkte sämtlich verschwinden und in φ eindeutig sind, im *komplexen Sinne* linear unabhängig sind. Denn die Annahme einer Relation der Form $\sum (c_\alpha + i c_\alpha') J_\alpha = 0$ würde bei Trennung des Reellen und Imaginären das Verschwinden aller Größen c und c' zur Folge haben. Jeder Funktion J_α entspricht ein System von p Periodizitätsmoduln, die den Querschnitten Q zugeordnet sind. Die Determinante Δ' dieser p Systeme von Größen ist von 0 verschieden, da sonst eine nicht verschwindende lineare Verbindung der J existieren würde, die in Φ eindeutig ist.

Ist jetzt J irgend ein zu Φ gehörendes Integral erster Art, das im Unendlichen verschwindet und in φ selbstverständlich eindeutig ist, so läßt sich dasselbe als lineare homogene Verbindung der J_α darstellen,

wobei die Koeffizienten aus der Vergleichung der Perioden von J an den Querschnitten Q mit denen der J_α durch lineare Gleichungen mit der nicht verschwindenden Determinante Δ' ermittelt werden. Wir bemerken auch auf Grund derselben Überlegungen, daß nach Vorgabe eines Systems von p komplexen endlichen Größen, die nicht alle 0 sind, ein und nur ein im betrachteten Sinne zugehörendes Integral J vorhanden ist, welches nämlich längs den p Querschnitten Q die genannten p Größen als Periodizitätsmoduln besitzt. Indem wir ein solches Integral durch die genannten p festgewählten Größen normiert denken, können wir J als eine Funktion von Φ betrachten und demgemäß mit $J(\Phi)$ bezeichnen. Eine derartige Fixierung hätte zweckentsprechend auch dadurch stattfinden können, daß die $2p$ reellen Periodizitätsmoduln des reellen Teiles von J am Rande von φ festgehalten werden. Wir wollen jedoch die vorher genannte Fixierung für die Folge zugrunde legen. Alsdann gehen wir jetzt dazu über nachzuweisen, daß $J(\Phi)$ *sich mit* Φ *stetig ändert.*

Auf Grund der vorhergehenden Bemerkungen, die wir, obwohl dieselben nichts grundsätzlich Neues enthalten, hier im Zusammenhange zweckmäßig vorzubringen glaubten, schließen wir, daß der erwähnte, von uns jetzt zu führende Nachweis der Stetigkeit von $J(\Phi)$ als erbracht gelten kann, wenn es gelungen ist, die stetige Änderung der p Potentiale u_α nachzuweisen, da ihre stetige Änderung die stetige Änderung der v_α und damit auch die stetige Änderung aller Perioden sowie der Determinanten Δ und Δ' bedingt. Es genügt dazu wiederum die Beschränkung auf eine der Funktionen u_α, da der Nachweis für die anderen in gleicher Weise möglich sein wird. Wir wählen u_1 und bezeichnen es für diese Untersuchung einfach mit u oder $u(\Phi)$.

Wir machen zunächst eine Abschätzung der Größe $\underset{\Phi}{D}(u)$; und zwar ist das Wesentliche, eine Schranke zu ermitteln, welche bei gewissen nicht zu großen Veränderungen des Bereichs Φ bestehen bleibt, d. h. eine gleichmäßige Abschätzung der Größe $\underset{\Phi}{D}(u)$ für veränderlich vorgestelltes Φ. Diese Schranke ergibt sich mittels der Minimaleigenschaft der Funktion u in folgender Weise. Es werde um L_1' ein Ring R konstruiert, begrenzt von den beiden Linien λ und λ'. Die Fläche dieses Rings soll, wie in der schematischen Figur 3 angedeutet ist, keine der Begrenzungslinien L treffen und alle Begrenzungslinien außer L_1' ausschließen. Wir bezeichnen nun mit $h = u + w$ diejenige in Φ eindeutige, stückweise potentialartige Funktion, welche erstens in dem Gebiete R'' zwischen λ' und L_1' den konstanten Wert 1 hat, zweitens in

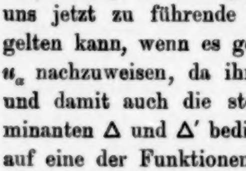


Fig. 3.

dem Ring R zwischen λ' und λ mit derjenigen Potentialfunktion identisch ist, welche in R eindeutig und regulär ist, auf λ den Wert 0 und auf λ' den Wert 1 hat, drittens in dem Restgebiete $R' = \Phi - (R + R')$ identisch gleich 0 ist. Man hat nun

$$\underset{\Phi}{D}(u+w) = \underset{\Phi}{D}(u) + \underset{\Phi}{D}(w) + 2\iint\limits_{\Phi}(u_x w_x + u_y w_y)\,dx\,dy.$$

Das letzte Integral gibt, durch partielle Integration umgeformt, den Wert $\sum\int w\frac{du}{dn}ds$, die Summe erstreckt über sämtliche $2p$ Begrenzungslinien von Φ. Dieser Wert ist also 0, weil entsprechende Integralelemente sich fortheben. Demnach ist

$$\underset{\Phi}{D}(u+w) = \underset{\Phi}{D}(u) + \underset{\Phi}{D}(w),$$

also

$$\underset{\Phi}{D}(u) < \underset{\Phi}{D}(h).$$

Der Wert der Größe $\underset{\Phi}{D}(h)$ ist aber gleich $\underset{R}{D}(h)$, also vermöge partieller Integration gleich $\int\limits_{\lambda}\frac{dh}{dn}ds = M$. Hiermit ist für $\underset{\Phi}{D}(u)$ eine obere Schranke M gefunden, welche bei nicht zu starker Änderung des Bereichs Φ gültig bleibt.

Aus der Abschätzung des Integrals $\underset{\Phi}{D}(u)$ wollen wir nun eine Abschätzung des Maximalwertes des absoluten Betrages der Funktion u selbst im Gebiete Φ herleiten. Zu dem Zwecke denken wir uns jeder der $2p$ Begrenzungslinien benachbart innerhalb Φ eine entlang der betreffenden Linie laufende zweite Linie gezogen. Diese Linien bezeichnen wir mit $l_1, l_1', \cdots, l_p, l_p'$. Wir gewinnen so $2p$ zweifach zusammenhängende Flächenstreifen $f_1, f_1', \cdots, f_p, f_p'$. Die Größen dieser $2p$ Flächenstreifen wollen wir so weit einschränken, daß auf f_α die Substitution S_α und auf f_α' die inverse S_α^{-1} angewandt werden kann und zu einer schlichten Nebenlagerung des Bildes neben den Bereich Φ führt. Wir erhalten dadurch $2p$ Bildstreifen außerhalb Φ, jedoch jeder an eine Begrenzungslinie von Φ anschließend. Diese Bildstreifen mögen mit $g_1, g_1', \cdots, g_p, g_p'$ bezeichnet werden, und zwar sollen allgemein f_α und g_α', sowie f_α' und g_α Bilder voneinander sein. Es wird dann g_α nach außen von der Linie L_α und g_α' nach außen von der Linie L_α' begrenzt.

Die Funktion u kann auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung auch in den genannten $2p$ Flächenstreifen erklärt werden. Wir bemerken, daß $\underset{g_\alpha}{D}(u) = \underset{f_\alpha'}{D}(u)$ und $\underset{g_\alpha'}{D}(u) = \underset{f_\alpha}{D}(u)$ ist. Diese Werte sind

demnach zusammen kleiner als der Wert $\underset{\Phi}{D}(u)$, welcher seinerseits kleiner als M abgeschätzt wurde. Bezeichnen wir nun mit Φ_+ den Bereich Φ, vergrößert um die $2p$ Flächenstücke g_α und g_α', so hat man

$$\underset{\Phi_+}{D}(u) < 2M.$$

Jetzt möge mit B ein $2p$-fach zusammenhängendes Teilgebiet von Φ_+ bezeichnet werden, welches den Bereich Φ vollständig enthält und dessen Begrenzungslinien je in einem der $2p$ Zusatzstreifen verlaufen, ohne jedoch die Begrenzung dieser Zusatzstreifen zu treffen. Für diesen Bereich B können wir eine obere Schranke der Funktion $u(\Phi)$ herleiten, welche, wie wir sofort bemerken, beim Übergange von Φ zu einem hinreichend benachbarten Bereiche Φ' erhalten bleibt, wobei B nicht mit verändert werden soll. Um diese Abschätzung zu gewinnen, dient uns folgender, auch von Herrn Courant (Diss. Gött. 1910)*) gefundener Hilfssatz, welchen ich in derselben Weise in meiner „4. Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven" (Göttinger Nachrichten 1909) und in der Abhandlung „über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, I. Teil" (Journal für Mathematik 138, S. 222) entwickelt habe und welcher wegen seiner Einfachheit und Wichtigkeit auch hier entwickelt werden möge.

Hilfssatz: Es sei $\varphi(x, y)$ irgend eine innerhalb eines Kreises K vom Radius R regulär und eindeutig erklärte Potentialfunktion, für welche der Wert $\underset{K}{D}(\varphi)$ des Dirichletschen Integrals kleiner als G ist. Alsdann bleibt, wenn k ein mit K konzentrischer Kreis mit dem Radius r ist, die Wertschwankung der Funktion φ in k unterhalb einer nur von r, R und G abhängenden Schranke g. Als Wertschwankung einer Funktion in diesem Bereiche bezeichnen wir dabei den Unterschied zwischen dem algebraisch größten und kleinsten Werte, welchen die Funktion in dem Bereiche annimmt.

Beweis: Zum Beweise ist erforderlich zu zeigen, daß in [illegible] die in irgend einer Richtung genommene Ableitung $\frac{d\varphi}{d\nu}$ der Funktion φ unterhalb einer Schranke γ bleibt, welche nur von r, R, G abhängt. Man hat für irgend eine Stelle (x, y) in K den Satz, daß der Wert $\varphi(x, y)$ das arithmetische Mittel der von der Funktion φ auf jedem Kreise mit dem Punkte (x, y) als Mittelpunkt angenommenen Werte ist, also auch das flächenhaft erstreckte arithmetische Mittel der von der Funktion im Innern jedes derartigen Kreises angenommenen Werte. Wählen wir für jeden Punkt (x, y)

*) Mit geringen Veränderungen, u. a. auch an der hier in Betracht kommenden Stelle, abgedruckt in Math. Ann. 71 (1911).

in k den zugehörenden Kreis als einen Kreis vom Radius $\frac{R-r}{2}$, so liegt dieser Kreis für alle Punkte von k innerhalb des Kreises K. Die Größe $\frac{d\varphi}{d\nu}$ ist bei festgehaltener Differentiationsrichtung auch eine Potentialfunktion. Indem wir auf dieselbe den letzterwähnten Mittelwertsatz anwenden in Erstreckung über den gewählten Kreis und bemerken, daß die unter dem Integralzeichen stehende Größe

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(x, \nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(y, \nu)$$

dem absoluten Betrage nach abschätzungsweise kleiner gesetzt werden kann als $|\varphi_x|^2 + 1 + |\varphi_y|^2 + 1$, da der absolute Betrag der Kosinusse kleiner als 1 ist und außerdem stets $|a| < a^2 + 1$ ist, ergibt sich sofort die gewünschte Schranke γ und damit g.*)

Der soeben bewiesene Hilfssatz liefert jetzt eine obere Schranke für den absoluten Betrag der Funktion u im ganzen Bereiche B. Um diese Schranke zu gewinnen, haben wir nur nötig, den Bereich B durch endlich viele Kreisflächenstücke vollständig soweit zu überdecken, daß jedenfalls alle Punkte des Bereichs B als innere Punkte solcher Kreisflächen erscheinen. Wir brauchen dann nur unsern Hilfssatz kettenförmig zur Anwendung zu bringen, um, ausgehend von dem unendlich fernen Punkte, in welchem die Funktion u den Wert 0 hat, die gewünschte im ganzen Bereiche B gültige Schranke zu erhalten, unter Bezugnahme auf die vorher bewiesene Tatsache, daß innerhalb aller dieser Kreisflächen, die ja nur Teile des Bereichs Φ_+ sind, der Wert des Dirichletschen Integrals unterhalb der oben gefundenen Größe $2M$ bleibt. Die für $|u(\Phi)|$ innerhalb B gefundene Schranke möge mit N bezeichnet werden. Wir bemerken nochmals, daß diese Schranke bei hinreichend kleiner Veränderung des Bereichs Φ in Kraft bleibt.

Sei nun Φ' ein Nachbarbereich des Bereichs Φ, u' die an Stelle von u tretende Potentialfunktion. Dann wollen wir jetzt schließlich zeigen, daß die Differenz $u' - u$ im Bereiche B eine gleichmäßig unendlich klein werdende Größe wird, wenn Φ' sich dem Bereiche Φ unbegrenzt nähert.

Es ist auf Grund unserer Begriffsbestimmung ganz klar, was wir unter unbegrenzter Annäherung des Bereiches Φ' an Φ zu verstehen haben. Wir werden diesen Begriff unten nur in den oben S. 61 hervorgehobenen zwei Fällen gebrauchen, in welchem er quantitativ genau präzisiert ist.

*) Selbstverständlich kann übrigens g als eine nur von G und $\frac{r}{R}$ abhängende Größe bestimmt werden, weil eine Potentialfunktion ihre Eigenschaft als solche bei Ähnlichkeitstransformation der (x, y) Ebene wie bei jeder konformen Transformation behält und auch der Wert des Dirichletschen Integrals dabei ungeändert bleibt.

Um zu einer Abschätzung der Größe $u'-u$ zu gelangen, bemerken wir, daß auf Grund unseres Hilfssatzes S. 66 die Möglichkeit besteht, eine solche Abschätzung dann auszuführen, wenn eine Abschätzung für den Wert des Dirichletschen Integrals der Funktion $u'-u$ gefunden ist. Schreiten wir daher zunächst zu einer solchen Abschätzung. Es ist

$$\underset{\Phi}{D}(u'-u)=\sum\int(u'-u)\frac{d(u'-u)}{d\nu}\,d\sigma,$$

wobei die Summe Σ eine Summe von $2p$ Randintegralen bedeutet, die über die $2p$ Begrenzungslinien des Bereichs Φ erstreckt sind. Für uns kommt es darauf an, zu zeigen, daß $\underset{\Phi}{D}(u'-u)$ eine Größe ist, welche unendlich klein wird, wenn Φ' sich unbegrenzt Φ nähert. Dies wiederum ist auf Grund der Darstellung durch die Summe Σ dann erwiesen, wenn gezeigt ist, daß die Größe $(u'-u)\frac{d(u'-u)}{d\nu}d\sigma$ eine für alle Randlinienelemente im Verhältnis zur Größe $d\sigma$ gleichmäßig unendlich klein werdende Größe ist, sofern man immer je zwei vermöge der Randsubstitutionen einander entsprechende Integralelemente der erwähnten Form vereinigt. Bezeichnen wir zu dem Zwecke mit P einen Randpunkt von Φ, mit P' den Bildrandpunkt auf der zugeordneten Begrenzungslinie von Φ, so hat man

$$u(P')=u(P)+1 \quad \text{oder} \quad u(P')=u(P),$$

je nachdem P auf dem ersten oder einem der weiteren $p-1$ Randlinienpaare angenommen ist. Ferner hat man entsprechend

$$u'(P')=u'(P)+1+\varepsilon \quad \text{oder} \quad u'(P')=u'(P)+\varepsilon,$$

wobei mit ε eine Größe bezeichnet ist, welche gleichmäßig für alle P unendlich klein wird, wenn Φ' sich Φ unbegrenzt nähert. In der Tat bestehen für u' ja dieselben Relationen wie für u, sofern man unter P' denjenigen Bildpunkt versteht, welcher dem Punkte P vermöge der betreffenden Randsubstitutionen des Bereichs Φ' entspricht. Dieser neue Punkt P', den wir für den Augenblick etwa mit P'' bezeichnen wollen, liegt nun dem erstgenannten Punkte P' gleichmäßig infinitesimal benachbart, wie unmittelbar aus unserem Begriff der infinitesimalen Annäherung des Bereichs Φ' an den Bereich Φ folgt. Der Wertunterschied zwischen $u'(P'')$ und $u'(P')$ ist aber eine gleichmäßig infinitesimale Größe für die betrachtete Annäherung, weil die Funktion u' in dem ganzen Bezirke B unterhalb der oben gefundenen festen Schranke N bleibt, sodaß, wie aus dem Poissonschen Integral geschlossen werden kann, die Ableitungen der Funktion u' in B, insbesondere in der Umgebung der $2p$ Begrenzungslinien des Bereichs Φ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer für alle Nachbarbereiche gleichmäßig bestimmbaren festen Schranke bleiben.

Aus den oben aufgestellten Gleichungen folgt nun durch Subtraktion

$$(*) \qquad (u' - u)_{P'} - (u' - u)_P = \varepsilon,$$

gültig längs allen p Randlinienpaaren des Bereichs Φ.

Wir bemerken weiter, daß die soeben mit Bezug auf P als Randpunkt gemachten Bemerkungen ohne weiteres in Kraft bleiben, wenn wir P und entsprechend P' in der Nachbarschaft der Randlinien des Bereichs Φ variabel denken. Die Größe ε bekommt dann eine noch weitere Bedeutung, insofern sie nun eine für die erwähnte Nachbarschaft der Begrenzungslinien des Bereichs Φ gleichmäßig unendlich klein werdende Größe ist. Wir haben dann wieder die Relationen $(*)$, wobei ε als eine Potentialfunktion des Punktes P aufgefaßt werden kann, welche eben gleichmäßig unendlich klein wird in der genannten Nachbarschaft der Begrenzungslinie. Hieraus folgt nun aber sofort die Gleichung

$$(**) \qquad \frac{d(u'-u)}{dv'}\,d\sigma' - \frac{d(u'-u)}{dv}\,d\sigma = \frac{d\varepsilon}{dv}\,d\sigma,$$

wenn mit dv' und $d\sigma'$ die vermöge der Randsubstitutionen den Elementen dv und $d\sigma$ entsprechenden Elemente bezeichnet werden. Die Größe $\frac{d\varepsilon}{dv}\,d\sigma$ kann aber jetzt gesetzt werden

$$(**) \qquad \frac{d\varepsilon}{dv}\,d\sigma = \eta\, d\sigma,$$

wobei mit η eine für alle $2p$ Begrenzungslinien gleichmäßig unendlich klein werdende Größe bezeichnet ist. Auf Grund der gefundenen Formeln $(*)$ und $(**)$ finden wir unter Benutzung der früher aufgestellten Abschätzung $|u' - u| < N$, daß in der Tat

$$\underset{\Phi}{D}(u' - u) = \vartheta$$

gesetzt werden kann, unter ϑ eine bei infinitesimaler Annäherung des Bereichs Φ' an Φ unendlich klein werdende Größe verstanden.

Jetzt ergibt sich wieder durch kettenförmige Anwendung des Hilfssatzes S. 66, daß $|u' - u|$ zunächst im Gebiete Φ_- eine gleichmäßig infinitesimale Größe ist, wenn mit Φ_- ein nicht bis an die Begrenzung von Φ sich erstreckendes Teilgebiet von Φ bezeichnet wird. Um für das ganze Gebiet Φ und darüber hinaus den Schluß zu machen, bemerken wir, daß die Funktion $u' - u$ in den Bereichen $g_1, g_1', g_2, g_2', \cdots, g_p, g_p'$ dieselben Werte annimmt wie in den Bereichen $f_1, f_1', \cdots, f_p, f_p'$, abgesehen von einer gleichmäßig bestimmbaren infinitesimalen Größe. Daraus ergibt sich, daß die Werte $\underset{g}{D}(u' - u)$, (die Integrale erstreckt über die Flächen g_α, g_α'), jedesmal einen Wert liefern, welcher sich von dem entsprechenden Werte des Integrales erstreckt über f_α' und f_α um eine infinitesimale Größe

unterscheidet. Diese letzteren Integralwerte sind aber jeder kleiner als $\underset{\Phi}{D}(u'-u)$, welcher Wert ja bewiesenermaßen eine infinitesimale Größe ist. Daraus folgt, daß

$$\underset{B}{D}(u'-u) = \vartheta'$$

gesetzt werden kann, unter ϑ' eine infinitesimale Größe verstanden. Aus dieser Gleichung nun wiederum folgt, daß

$$\underset{B}{\mathrm{Max}}\, |u'-u| = \vartheta''$$

gesetzt werden kann, unter ϑ'' eine infinitesimale Größe verstanden. D. h. also: Der Unterschied $|u'-u|$ wird im ganzen Gebiete B gleichmäßig unendlich klein, wenn Φ' sich unbegrenzt Φ nähert.

Stetigkeitsbeweis mittels des allgemeinen Konvergenzprinzips. Es ist instruktiv zu sehen, wie der im vorhergehenden mit Hilfe der Minimaleigenschaft geführte Stetigkeitsbeweis mittels des allgemeinen Konvergenzprinzips ohne Hinzunahme sonstiger Hilfssätze erbracht werden kann. Dieser neue Stetigkeitsbeweis verläuft indirekt.

Wir wollen zunächst dartun, daß das Maximum der Funktion $u(\Phi)$ in Φ, welches wir mit μ bezeichnen wollen, unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, wenn Φ sich stetig ändert. Zu dem Zwecke werde angenommen, daß dem nicht so sei. Alsdann könnten wir eine Folge von Bereichen Φ bestimmen, sie mögen mit

$$\Phi', \Phi'', \Phi''', \cdots$$

bezeichnet werden, welche gegen den Ausgangsbereich Φ konvergieren und für welche die bezüglichen Maxima

$$\mu', \mu'', \mu''', \cdots,$$

d. s. die Maxima des absoluten Betrages der zugehörenden Funktionen

$$u', u'', u''', \cdots$$

bezw. innerhalb $\Phi', \Phi'', \Phi''', \cdots$ gegen ∞ konvergieren. Wir bemerken, daß innerhalb B die Maxima derselben Funktionen bezüglich unterhalb $\mu'+1$, $\mu''+1$, $\mu'''+1$, $\cdots$ bleiben. Die Funktionen

$$\left|\frac{u'}{\mu'}\right|, \left|\frac{u''}{\mu''}\right|, \left|\frac{u'''}{\mu'''}\right|, \cdots$$

haben jetzt als Maximalwerte sämtlich den Wert 1, jedoch die Periodizitätsmoduln $\frac{1}{\mu'}, \frac{1}{\mu''}, \frac{1}{\mu'''}, \cdots$. Dieselben Funktionen besitzen in B, $(B > \Phi)$, Maximalwerte, die bezüglich unterhalb $1+\frac{1}{\mu'}$, $1+\frac{1}{\mu''}$, $1+\frac{1}{\mu'''}$, $\cdots$ bleiben. Da die letztgenannten Werte selbst unterhalb einer festen Schranke bleiben,

ergibt sich mithin aus dem allgemeinen Konvergenzprinzip, daß man aus der Reihe der Funktionen $\frac{u'}{\mu'}, \frac{u''}{\mu''}, \cdots$ eine innerhalb B gleichmäßig konvergente Folge auswählen kann, welche gegen eine Grenzfunktion $\bar{u}$ mit folgenden Eigenschaften konvergiert: $\bar{u}$ ist eine innerhalb B reguläre Potentialfunktion, die gegenüber sämtlichen p Randsubstitutionen von Φ ungeändert bleibt und deren absoluter Betrag in Φ das Maximum 1 besitzt. Das ist aber unmöglich, weil auf Grund der erstgenannten Eigenschaft die Funktion $\bar{u}$ eine Konstante sein muß, welche Konstante nur den Wert 0 haben kann, weil $\bar{u}$ wie alle betrachteten Potentiale im Unendlichen verschwindet. Wir sind also auf einen Widerspruch geführt, und folglich muß für alle Funktionen u, die zu Bereichen Φ einer gewissen Nachbarschaft des Ausgangsbereichs Φ gehören, eine obere Schranke des absoluten Betrages dieser Funktionen innerhalb Φ, daher auch innerhalb B existieren.

Nunmehr können wir leicht den Nachweis führen, daß $u' - u$ innerhalb B gleichmäßig unendlich klein wird, wenn Φ' gegen Φ konvergiert. Wir nehmen zu dem Zwecke wieder das Gegenteil an; d. h. wir nehmen an, daß in einem in B enthaltenen Bezirk β die Funktion $u' - u$, welche im Punkte ∞ verschwindet, ein Maximum des absoluten Betrages besitzt, welches oberhalb einer von 0 verschiedenen positiven Größe γ bleibt, wie nahe auch Φ' an Φ liege. Alsdann ließe sich wieder eine gegen Φ konvergierende Folge von Bereichen bestimmen, die wir mit $\Phi', \Phi'', \Phi''', \cdots$ bezeichnen könnten, sodaß stets $|u^{(\nu)} - u|$ in β ein Maximum des absoluten Betrages $> \gamma$ hätte. Hieraus müßte sich, da alle Funktionen der Folge in B bewiesenermaßen unterhalb einer festen endlichen Schranke bleiben, eine Teilfolge $\Phi^{(n_1)}, \Phi^{(n_2)}, \cdots$ bestimmen lassen, sodaß eine bestimmte Grenzfunktion $\lim\limits_{\alpha=\infty} u^{(n_\alpha)}$ zustande käme, für welche nun natürlich auch der Unterschied gegen u in β ein Maximum des absoluten Betrages $\geqq \gamma$ besitzen müßte und die daher jedenfalls keine Konstante sein könnte. Andererseits müßte jedoch diese Grenzfunktion wie alle Funktionen $u', u'', u''', \cdots$ einen Periodizitätsmodul 1 besitzen und zwar entsprechend derselben Randsubstitution, in bezug auf welche u selbst den Periodizitätsmodul 1 besitzt. Hieraus folgt, daß die erwähnte Grenzfunktion mit u identisch sein muß, daß also ihr Unterschied gegen u innerhalb β identisch 0 ist, während derselbe soeben $\geqq \gamma$ gefunden wurde.

§ 3.

Einführung von Riemanns ($6p$—6)-parametriger Parallelogrammfigur. Stetige Änderung derselben in Abhängigkeit von Φ.

Wir betrachten wieder unsern Bereich Φ mit den p Randkurvenpaaren L_α, L_α' $[\alpha = 1, \cdots, p]$. Indem wir in diesem Bereiche, wie oben, die p Querschnitte Q_α ziehen, erhalten wir den oben mit φ bezeichneten p-fach zusammenhängenden Bereich. Ist J irgend ein zu Φ gehörendes Abelsches Integral erster Art, so besitzt das Differential dJ gemäß einem bekannten Satze der Theorie der Abelschen Integrale $2p-2$ Nullstellen, wobei jede eventuell mit der richtigen Multiplizität zu zählen ist. Es ist bemerkenswert, daß dieser Satz direkt am Bereiche Φ demonstriert werden kann. Zu dem Zwecke erstrecken wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d \log J'(z)$$

über die vollständige Begrenzung des Bereichs Φ. Dieses Integral ist nämlich gleich der zu bestimmenden Anzahl der Nullstellen des Differentials dJ, vermehrt um zwei Einheiten, die von dem unendlich fernen Punkte herrühren. Wir bezeichnen mit dz und dz' zwei zugeordnete Randelemente des Bereichs Φ, welcher, was stets erreichbar ist, der Bedingung genügen möge, daß der unendlich ferne Punkt nicht eine der betrachteten Nullstellen ist und daß auch auf seiner Begrenzung keine Nullstelle liegt. Werden mit z und z' die betrachteten zugeordneten Randpunkte selbst bezeichnet, so können wir in dem auszuwertenden Integrale je zwei Elemente in der Form vereinigen

$$d \log\left(\frac{dJ(z)}{dz}\right) - d \log\left(\frac{dJ(z')}{dz'}\right) = d \log\left(\frac{dz'}{dz}\right),$$

da $dJ(z') = dJ(z)$ ist. Hierdurch ergibt sich für das einzelne Randlinienpaar als Wert des zu untersuchenden Integrales der Wert 2. Denn die Amplitude der Größe $\frac{dz'}{dz}$ vermehrt sich bei Durchlaufung der das Differential dz enthaltenden Linie L um 4π, weil die Amplitude von dz den Zuwachs -2π erfährt, während die Amplitude von dz' den Zuwachs $+2\pi$ erfährt.

Das Integral J ist in φ jedenfalls eindeutig, und wir können vermöge einer geringen Abänderung der Begrenzung unter Aufrechterhaltung der analytischen Randsubstitutionen annehmen, daß keine der $2p-2$ Nullstellen des Differentials dJ auf der Begrenzung von φ liegt. Alsdann ver-

mittelt die Funktion J eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Bereichs φ auf eine mehrblättrige Figur mit $2p-2$ Windungspunkten im Innern, begrenzt von p parallelogrammartigen Rahmen, deren je vier Seiten paarweise durch euklidische Parallelverschiebungen aufeinander bezogen sind. Es ist dies die bekannte mehrblättrige Parallelogrammfigur, welche Riemann in seiner Abhandlung über Abelsche Funktionen § 12*) betrachtet und mit Bezug auf welche Riemann eine Reihe von Bemerkungen macht, welche für seine Ideengänge überhaupt sehr bezeichnend sind.

Wir wollen nun, bevor wir von der soeben erwähnten Riemannschen Normalfigur planmäßigen Gebrauch machen, noch einige unseren Zwecken dienliche Spezialentwicklungen geben. Es kommt uns wegen einer einheitlichen Behandlung darauf an, den Satz zu haben, daß, wie auch φ gegeben sein möge, es stets möglich ist, J so zu wählen, daß die $2p-2$ Nullstellen des Differentials dJ sämtlich *einfache* Nullstellen sind und daß auch keine der Nullstellen auf der Begrenzung von φ, wie dies nun einmal begrenzt ist, liegt. Selbstverständlich würde dann das allgemeine Abelsche Integral erster Art die genannten Eigenschaften ebenfalls besitzen.

Wir formulieren zunächst den der ersten Forderung entsprechenden Satz.

Satz:**) Auf jeder Fläche Φ vom Geschlecht $p \geqq 1$ existiert ein Abelsches Differential erster Art, dessen sämtliche $2p-2$ Nullstellen einfach sind.

Zum Beweise dieses Satzes benötigen wir einige bekannte Tatsachen aus der Theorie der Abelschen Integrale, an welche wir hier mit direktem Bezug auf die Fläche Φ erinnern unter Angabe auch der sehr einfachen Beweishilfsmittel, die unmittelbar auf den Bereich Φ zur Anwendung gelangen.

Wir definieren zunächst für den Bereich φ die p Normalintegrale erster Art $J_1(z), \cdots, J_p(z)$, von welchen $J_\alpha(z)$ durch die Eigenschaft definiert sein soll, für $z=\infty$ zu verschwinden, längs den Querschnitten $Q_1, \cdots, Q_{\alpha-1}, Q_{\alpha+1}, \cdots, Q_p$ den Periodizitätsmodul 0 und längs Q_α den Periodizitätsmodul 2π zu besitzen. Nunmehr normieren wir das zu Φ gehörende Normalintegral zweiter Art mit der Unendlichkeitsstelle z_0 als dasjenige Integral, welches in Φ eindeutig ist und nur im Punkte z_0 unstetig wird, nämlich wie $\frac{1}{z-z_0}$ plus reguläre analytische Funktion. Wir bezeichnen dasselbe mit $J(z_0, z)$. Die Existenz desselben ergibt sich mit Hilfe der kombinatorischen Methoden sofort, wenn man zunächst diejenige in Φ eindeutige, gegenüber den Randsubstitutionen ungeändert

*) Riemann, Ges. Werke Nr. VI.

**) Dieser Satz überträgt sich natürlich auf jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$.

bleibende Potentialfunktion konstruiert, welche im Punkte z_0 unendlich wird wie der reelle Teil von $\frac{1}{z-z_0}$. Ist U diese Potentialfunktion, so besitzt $U+iV$ bereits die gewünschte Unstetigkeit und führt nach Subtraktion einer linearen homogenen Verbindung der J_α sofort zur Funktion $J(z_0, z)$. Die Funktion $J(z_0, z)$ erleidet gegenüber den analytischen Randsubstitutionen des Bereichs Φ gewisse additive Zuwüchse, die Perioden des Normalintegrals zweiter Art. Um die α^{te} Periode zu bestimmen, erstreckt man das Integral $\int J dJ_\alpha$ über die vollständige Begrenzung des Bereichs Φ und findet dadurch für die α^{te} Periode $2\omega_\alpha$ den Wert $J_\alpha'(z_0)$. Nunmehr können wir die bekannte Bedingung dafür aufstellen, daß es eine von einer Konstanten verschiedene, in Φ eindeutige, gegenüber den Randsubstitutionen ungeändert bleibende Funktion geben soll, welche an p voneinander verschiedenen Stellen $z_1, \cdots, z_p$ des Bereichs Φ von der ersten Ordnung unendlich wird, sofern sie an den betreffenden Stellen überhaupt unendlich wird. Eine solche Funktion würde nach Substraktion einer gewissen linearen homogenen Verbindung der zu $z_1, \cdots, z_p$ gehörenden Normalintegrale zweiter Art in eine in Φ eindeutige Integralfunktion erster Art übergehen, bei der notwendig auch die gegenüber den Randsubstitutionen auftretenden Perioden verschwinden würden. Das gibt p lineare homogene Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten jener linearen Verbindung, welche dann und nur dann eine von dem Systeme $0, \cdots, 0$ verschiedene Lösung gestatten, wenn die Determinante

$$(*) \qquad |J_\alpha'(z_\beta)| = 0$$

ist.

Anmerkung. Bei den vorstehenden Betrachtungen spielte der unendlich ferne Punkt eine in gewissem Umfange ausgezeichnete Rolle. Man kann jedoch zweckmäßig den Bereich Φ für die Zwecke dieser Aufstellungen durch eine lineare Transformation in einen ganz im Endlichen liegenden Bereich verwandeln, wobei dann eine der $2p$ Begrenzungslinien umschließende Begrenzungslinie wird. An dieser Vorstellung möge auch im folgenden bei der Herleitung des Hilfssatzes festgehalten werden.

Auf der gegenwärtigen Grundlage gewinnen wir nun folgenden Brill-Noetherschen*) Satz: Es gibt für die Gesamtheit der zu Φ gehörenden Differentiale erster Art keine allen gemeinschaftliche Nullstelle in Φ. — Nehmen wir in der Tat eine solche gemeinschaftliche Nullstelle a in Φ an. Wir wählen dann $p-1$ von a und von einander verschiedene, sonst willkürliche Stellen $z_1, \cdots, z_{p-1}$ in Φ und bestimmen, was sicher möglich

*) Brill-Noether: „Über die algebraischen Funktionen usw." Math. Ann. 7, S. 285. Unsere Beweisführung folgt Picard, Traité d'Analyse Bd. II, S. 449 (2. Aufl.).

ist, ein solches Differential erster Art dw_1, welches in $z_1, \cdots, z_{p-1}$ verschwindet. Dasselbe verschwindet dann auch in a und außerdem noch in $p-2$ weiteren Stellen, welche auch mit den genannten p Stellen zusammenfallen können. Nun gibt es aber noch ein zweites Differential dw_2 von der ersten Art, welches ebenfalls in den letztgenannten $p-2$ Stellen verschwindet und sich von dem Differential dw_1 nicht nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet. Der Quotient $\frac{dw_2}{dw_1}$ wäre eine von einer Konstanten verschiedene Funktion, welche in Φ eindeutig ist und gegenüber den p Randsubstitutionen ungeändert bleibt, dazu nur in $z_1, \cdots, z_{p-1}$ unendlich werden kann und zwar von der ersten Ordnung. Demnach wäre es möglich, für willkürlich gewähltes $z_1, \cdots, z_{p-1}$ eine zugehörende Funktion zu finden, was mit dem vorher gefundenen Satze im Widerspruch steht, nach welchem je p Punkte der Bedingung (*) unterworfen sein müssen, damit eine zugehörende Funktion existiert.

Nunmehr gehen wir zum Beweise des von uns oben S. 73 aufgestellten Satzes über. Wir stellen uns, wie gesagt, vor, daß der Bereich Φ ganz im Endlichen liege. Angenommen, es sei jedes zu Φ gehörende Differential erster Art mit einer mindestens zweifachen Nullstelle behaftet, so würde dies bedeuten, daß es möglich ist, für jede Wahl der Konstanten $c_1, \cdots, c_p$ die beiden Gleichungen

$$(*) \qquad c_1 J_1'(z) + c_2 J_2'(z) + \cdots + c_p J_p'(z) = 0,$$

$$(**) \qquad c_1 J_1''(z) + c_2 J_2''(z) + \cdots + c_p J_p''(z) = 0$$

gleichzeitig durch passende Wahl von z zu befriedigen. Daraus erhalten wir durch Elimination von c_1 die neue Gleichung

$$(***) \qquad c_2(J_2' J_1'' - J_2'' J_1') + \cdots + c_p(J_p' J_1'' - J_p'' J_1') = 0.$$

Diese Gleichung würde demnach für dasselbe z befriedigt werden. Das würde besagen, daß die Größe z, welche nun eben auch durch die Gleichung (***) bestimmt gedacht werden kann, nicht von c_1 abhängt. Ebenso können wir schließen, daß sie nicht von c_2 abhängt, usw. bis c_p, d. h., daß sie eine für alle c feste Größe ist, entgegen dem Brill-Noetherschen Satze.

Um den soeben gegebenen Beweis im einzelnen noch etwas zu präzisieren, seien folgende Bemerkungen gemacht. Die durch die Gleichungen (*) und (**) bestimmte Größe z kann, wenn man $c_1, \cdots, c_p$ frei variieren läßt, nicht an einer und derselben Stelle verharren, weil dadurch diese Stelle eine feste Nullstelle für p unabhängige Differentiale erster Art würde und daher eine feste Stelle für alle Differentiale erster Art. Ferner sei bemerkt, daß die in (***) auftretenden p Klammergrößen Funktionen ihres Argumentes sind, deren keine verschwindet. In der Tat würde das Verschwinden einer solchen Klammergröße besagen, daß die betreffenden

in der Klammer auftretenden Normaldifferentiale erster Art sich nur um konstante Faktoren unterscheiden.

Wir wollen nunmehr zeigen, wie auch der weiteren oben (S. 73) an ein Differential erster Art dW gestellten Forderung genügt werden kann. Wir formulieren folgenden Zusatz.

Zusatz: Das Differential dW erster Art in Φ kann noch der weiteren Bedingung gemäß bestimmt werden, daß keine der $2p-2$ Nullstellen auf einer der Begrenzungslinie des Bereichs Φ oder auf weiteren in Φ etwa angenommenen Linien liegt.

Zum Beweise des Zusatzes gehen wir von einem dW aus, welches bereits $2p-2$ voneinander verschiedene einfache Nullstellen hat, jedoch etwa noch nicht der erwähnten weiteren Bedingung genügt, von welcher im Zusatze die Rede ist. Es seien $dJ_1, \cdots, dJ_p$ die oben bereits betrachteten p linear unabhängigen Differentiale erster Art, die zu Φ gehören. Alsdann bilden wir das Differential

$$d\overline{W} = dW + c\,dJ_1 + c^2 dJ_2 + \cdots + c^p dJ_p,$$

mit c einen variablen komplexen Parameter bezeichnend, welcher auf die Umgebung des Wertes $c=0$ beschränkt werde. Bei Beschränkung von c auf eine hinreichend kleine Umgebung des Wertes 0 unterscheidet sich $d\overline{W}$ von dW so wenig, daß die $2p-2$ Nullstellen von $d\overline{W}$ ebenfalls noch einfach sind, da sie jedenfalls mit c sich stetig ändern. Diese Änderung muß nun aber für jede einzelne Nullstelle sogar eine analytische sein, d. h.: Wir sagen, daß die einzelne Nullstelle z des Differentials $d\overline{W}$ eine in der Umgebung der Stelle $c=0$ reguläre analytische Funktion des Parameters c ist. Dies ergibt sich sofort aus der bekannten Formel für die Nullstelle ζ einer Funktion $f(z)$, nämlich

$$\frac{1}{2\pi i}\int z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

eine Formel, welche gültig ist, sofern längs einer geschlossenen, den Punkt ζ einfach umschließenden Linie integriert wird, welche keine weiteren Nullstellen umschließt. In unserm Falle wird auf diese Weise die Nullstelle ζ durch ein Integral dargestellt, welches von dem Parameter c abhängt, nach welchem man unter dem Integralzeichen unbedenklich differentiieren kann. Ist somit ζ als reguläre analytische Funktion von c für die Umgebung der Stelle $c=0$ erwiesen, so bleibt jetzt nur noch festzustellen, daß ζ in Abhängigkeit von c nicht eine Konstante ist. Diese Möglichkeit wird mit Hilfe des Brill-Noetherschen Satzes folgendermaßen ausgeschlossen. Wäre ζ eine Konstante, so würde ζ für p verschiedene Wahlen von c, etwa $c_1, c_2, \cdots, c_p$, stets denselben Wert erhalten. Die sich so er-

gebenden Differentiale erster Art sind aber jedenfalls linear unabhängig wegen des Nichtverschwindens der Determinante

$$|c_\alpha^\beta| \qquad [\alpha = 1, \cdots, p;\ \beta = 1, \cdots, p].$$

Demnach würde überhaupt jedes Differential erster Art die Nullstelle ζ besitzen, entgegen dem Brill-Noetherschen Satze.

Hiermit ist klar, daß die Nullstellen des Differentials $d\overline{W}$ bei frei variablem c die vollen Umgebungen der Ausgangsstellen beschreiben und daß es mithin möglich ist, durch beliebig kleine Modifikation zu erreichen, daß keine der Nullstellen auf einem gegebenen Liniensystem liegt.

Nachdem der oben formulierte Hilfssatz und Zusatz bewiesen ist, können wir also jetzt ein in φ eindeutiges Abelsches Integral W auffinden, für welches die $2p-2$ Nullstellen von dW alle voneinander verschieden und also alle einfache Nullstellen sind. Die erwähnte Eigenschaft bleibt auch aufrecht erhalten, wenn wir zu W irgend eine lineare homogene Verbindung der Normalintegrale erster Art mit hinreichend klein gewählten Koeffizienten hinzufügen. Wir können daher, um auf eine normale Vorstellung zu kommen, dem zu wählenden Integral W auch noch die Bedingung auferlegen, daß die $2p$ Periodizitätsmoduln sämtlich von Null verschieden sind. Weiter können wir durch eine eventuelle Modifikation der Begrenzung des Bereichs φ oder direkt unter Bezugnahme auf den „Zusatz" erreichen, daß keine der Nullstellen des Differentials dW auf einer Begrenzungslinie des Bereichs φ liegt. Ein so gewähltes Integral wollen wir mit $W(\Phi)$ bezeichnen, wenn wir jetzt schließlich noch vorschreiben, daß dieses W an einer der $2p-2$ Nullstellen von dW den Wert Null annehmen soll, wodurch auch über die additive Konstante verfügt wird. Das Integral $W(\Phi)$ besitzt längs den p Querschnitten Q p Perioden. Durch diese Perioden in Verbindung mit der Bedingung des Verschwindens von W an der gewählten Nullstelle von dW ist W in φ eindeutig definiert, und wir können, indem wir die genannten p Perioden ihrem Werte nach festhalten, $W(\Phi)$ als eine von Φ selbst abhängige Größe betrachten, die sich nun beim Übergange zu einem Nachbarbereiche Φ' in ganz bestimmter Weise ändert. Dabei hat man sich natürlich die Querschnitte Q auch stetig mitgeändert zu denken, eine Änderung, die man übrigens nur an den Endstücken der Q vorzunehmen braucht, wo diese Querschnitte in die Begrenzungslinien von Φ münden.

Wir machen nun die wichtige Bemerkung, daß $W(\Phi)$ unter den genannten Normierungsbedingungen eine stetige Funktion von Φ ist. Für den Nachweis bedarf auf Grund der vorangegangenen Entwicklungen nur noch derjenige Punkt einer Erledigung, der durch die Normierung der additiven Konstanten gegeben ist, insofern als die Stellen a und a', an

welchen W und W', unter W' das zu einem benachbarten Bereiche Φ' gehörende Integral verstanden, der Normierung gemäß verschwinden, allgemein zu reden nicht zusammenfallen. Dieser Nachweis ergibt sich jedoch unmittelbar, wenn man folgendes beachtet. Es möge mit W^* diejenige zu Φ' gehörende Integralfunktion bezeichnet werden, welche sich von W' nur dadurch unterscheidet, daß sie nicht in a', sondern in a verschwindet, also von W' nur durch eine additive Konstante, nämlich den Wert $W'(a)$, verschieden ist. Der Wert dieser Konstanten ist nun in der Tat eine infinitesimale Größe, weil einerseits $a' - a$ eine infinitesimale Größe ist, andererseits die Ableitungen der Funktion W' ebenso wie W' selbst unterhalb einer festen Schranke bleiben, gemäß den Untersuchungen des § 2. Die Untersuchung ist hierdurch auf die Betrachtung der Differenz $W^* - W$ reduziert, welche in a verschwindet und daher nach früheren Entwicklungen gleichmäßig in dem oben S. 66 mit B bezeichneten Bereiche unendlich klein wird, wenn Φ' in Φ übergeht.

Die Funktion $W(\Phi)$ oder W, wie wir sie abgekürzt bezeichnen, leistet eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereichs φ auf eine gewisse mehrblättrige, p-fach zusammenhängende Fläche N, welche $2p-2$ innere Windungspunkte erster Ordnung besitzt, von welchen der eine mit dem Nullpunkte der W-Ebene koinzidiert. Die Begrenzung wird von p parallelogrammartigen Rahmen gebildet, deren je vier Seiten über Kreuz durch p feste (entsprechend den p Querschnitten Q) und p mit Φ veränderlich zu denkende euklidische Parallelverschiebungen aufeinander bezogen sind. Die Fläche N als solche hängt noch von $3p-3$ komplexen Konstanten ab, welche wir, da für die Anwendung nur die nachbarlichen Variationen in Betracht gezogen werden, ohne daß der eigentliche Riemannsche Klassenbegriff als solcher in unsere Betrachtung hineinspielen wird, als die $3p-3$ komplexen Parameter von N bezeichnen. Wir können statt dessen auch von $6p-6$ reellen Parametern reden, indem wir uns für jeden der $3p-3$ beweglichen Windungspunkte und jeden der p beweglichen Verschiebungsvektoren (das sind die $3p-3$ Parameter) die Zerlegung im reellen und imaginären Teil vorgenommen denken.

Wir können uns die einzelne Fläche N dadurch erweitert denken, daß wir entsprechend der Ränderzuordnung die analytische Fortsetzung derselben betrachten, d. h. zunächst $8p$ kongruente Exemplare N an dieselbe angesetzt denken, an jeden Rahmen einen ihn umschließenden Kranz. Die von uns in der Folge zu betrachtenden Variationen der Fläche N werden stets in solcher Beschränkung vorgenommen, daß eine Kollision namentlich zwischen den Windungspunkten und Begrenzungslinien sowie auch zwischen den Windungspunkten untereinander nicht möglich ist. In der Tat wird es für die folgenden Betrachtungen gleichgültig sein, welchen

Grad der Beschränkung wir der Fläche N hinsichtlich ihrer $6p-6$ dimensionalen Variabilität auferlegen, wesentlich wird immer nur sein, daß die Möglichkeit der Bewegung mit $6p-6$ reellen Freiheitsgraden gegeben ist, wobei für die Begrenzungslinien selbst auch ein beliebig kleines Feld ihrer Beweglichkeit zugelassen werden kann.

§ 4.

Einführung des $(6p-6)$-parametrigen Fundamentalbereichs Ψ. Die umgebungstreue Abbildung seines Parametergebiets auf das Parametergebiet der Riemannschen Parallelogrammfigur.

Mit Ψ werde im folgenden ein Fundamentalbereich des Schottkyschen Typus bezeichnet, d. i. ein Bereich der Gattung Φ, jedoch mit p *linearen*, nicht mehr nur regulär analytischen Randsubstitutionen. Diesen Bereich Ψ stellen wir uns dabei noch in bestimmter Normierung vor. Wir denken uns nämlich von den $2p$ Fixpunkten der p Randsubstitutionen die beiden ersten nach 0 und ∞ verlegt, den dritten nach 1, eine Normierung, welche durch eine einzige lineare Substitution erreicht wird. Der so normierte Bereich Ψ wird von der Linie L_1' umschlossen, welche ebenso wie die Linie L_1 den Nullpunkt einfach umschlingt. Auch jetzt können wir, obwohl dies nicht unbedingt erforderlich sein wird, für die Begrenzung des Bereichs Ψ vorschreiben, daß alle $2p$ Begrenzungslinien geschlossene reguläre analytische Linien sind. Die Randsubstitutionen stellen sich der Reihe nach in der Form dar

$$z' = \mu_1 \cdot z, \quad \frac{z'-1}{z'-b_2} = \mu_2\,\frac{z-1}{z-b_2}, \cdots, \frac{z'-a_\alpha}{z'-b_\alpha} = \mu_\alpha\,\frac{z-a_\alpha}{z-b_\alpha} \quad [\alpha = 3, \cdots, p].$$

Die $3p-3$ Größen $\mu_1, \cdots, \mu_p, a_3, \cdots, a_p, b_2, \cdots, b_p$ bilden ein System von $3p-3$ komplexen Größen, welche man im komplexen Gebiet frei variieren kann. Diese Konstanten nennen wir kurz die Parameter des Gebietes Ψ (*Ψ-Parameter*). Entsprechend der Veränderung dieser Parameter wollen wir uns die stetige Veränderung von Ψ so vor sich gehend denken, daß die p Begrenzungslinien $L_1, \cdots, L_p$ festgehalten werden, wodurch jedesmal die Bildkurven $L_1', \cdots, L_p'$ nach Angabe des Parametersystems vollständig bestimmt werden. Bei dieser stetigen Veränderung wird es uns immer nur auf nachbarliche Veränderungen ankommen, wobei Kollisionen von selbst ausgeschlossen sind.

Wir bestimmen nun zu einem Bereiche Ψ, von welchem ausgegangen wird, gemäß den Bestimmungen des § 4 eine zugehörende Integralfunktion erster Art W, wobei wir auch hier durch eine eventuelle geringe Modi-

fikation der Begrenzungslinien*) oder unter Bezugnahme auf den Zusatz S. 76 erreichen, daß W auf den Begrenzungslinien von Ψ und ψ, d. i. die mit p Querschnitten ausgestattete p-fach zusammenhängend gemachte Fläche Ψ, keine Nullstelle seiner Ableitung besitzt. Durch Vermittlung der Funktion W wird die Fläche ψ auf die Normalfläche N abgebildet, und es ergeben sich $3p-3$ Werte für deren Parameter (*N-Parameter*). Nunmehr lassen wir Ψ und damit zugleich ψ stetig variieren mit den $6p-6$ oben genannten reellen Freiheitsgraden. Dabei verändert sich die Fläche N stetig, d. h. sowohl die inneren Windungspunkte als auch die veränderlichen Perioden als auch die Begrenzungslinien selbst variieren stetig.

Es ist nun der Nachweis zu führen, daß die bei der genannten Variation sich ergebenden Wertsysteme für die N-Parameter die $(6p-6)$-dimensionale Umgebung des Anfangswertsystems vollständig erschöpfen, wie klein auch die um das Ausgangswertsystem der Ψ-Parameter gewählte Umgebung sein mag. Dieser Nachweis beruht erstens auf der Tatsache des Bestehens des Unitätssatzes für die uniformisierenden Variablen des Schottkyschen Typus, zweitens auf der Tatsache, daß das stetige eineindeutige Bild eines n-dimensionalen Gebietes im n-dimensionalen Raum wieder ein n-dimensionales Gebiet ist oder, anders ausgedrückt, daß eine solche Abbildung stets *umgebungstreu* ist, d. h. den Charakter eines Punktes als innerer Punkt aufrecht erhält. Innerer Punkt eines Bereichs wird hierbei ein Punkt genannt, von welchem eine volle Umgebung auch noch dem Bereiche angehört.

Im Einzelnen verläuft die Beweisführung folgendermaßen.

Es mögen mit i_0 das Ausgangssystem der Ψ-Parameter, mit m_0 das System der entsprechenden N-Parameter, mit i' und i'', m' und m'' Ψ-Parametersysteme beziehungsweise N-Parametersysteme in der Nachbarschaft der Ausgangssysteme bezeichnet werden. Wir können dann zunächst um i_0 eine Umgebung U im Gebiete der Ψ-Parameter so klein abgrenzen, daß die im Bezirke U sich ergebenden Flächen N und $\bar{N}$ von der Ausgangsfläche N_0 und $\bar{N}_0$ ($\bar{N}$ und $\bar{N}_0$ sind die gemäß dem oben genannten Prinzip durch p Kränze erweiterten Flächen N und N_0) sich so wenig unterscheiden, daß folgenden Bedingungen genügt wird: Innerhalb N_0 werde um jeden inneren Windungspunkt herum ein kleines Kreisflächenstück K abgegrenzt, ebenso werde jede der p Begrenzungslinien von N_0 in einen auf $\bar{N}_0$ konstruierten Rahmen eingebettet, der weder mit den genannten Kreisflächenstücken noch auch ihren Wiederholungen auf

*) Vgl. unten S. 96.

$\bar{N}_0$ kollidiert, (vgl. die schematische Figur 4); schließlich werde in diesem Rahmen für die vier Eckpunkte des Parallelogramms je ein viereckartiger Bezirk in der in Figur 4 angedeuteten Weise abgegrenzt. Die erwähnte Umgebung U soll nun so klein gewählt sein, daß jedes der angeführten Stücke (Windungspunkte, Begrenzungsseiten, Eckpunkte der Begrenzungslinien) der Fläche N jedenfalls in den für dasselbe gezogenen Schranken bleibt. Diesen Bedingungen kann sicher genügt werden wegen der früher bewiesenen Stetigkeit der Funktion $W \equiv W(\Phi)$. Wir können und wollen die Schranken von U noch enger ziehen, indem wir jetzt verlangen, daß insbesondere die Änderung der Begrenzungslinien von N, welche entsprechend dem Bezirke U statthaben kann, so klein sei, daß, sobald gleiche Periodensysteme für zwei verschiedene Flächen N, etwa N' und N'', vorhanden sind, die betreffenden Begrenzungslinien dadurch zur Deckung miteinander gebracht werden können, daß man, ohne sonstige Kollisionen hervorzurufen, erstens die vier Eckpunkte durch kongruente Parallelverschiebung zur Deckung bringt und dann die Begrenzungsseiten einzeln deformiert, und zwar alles dies, ohne daß das oben definierte Feld der Variabilität verlassen wird.

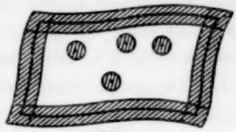


Fig. 4.

Nachdem U so bestimmt ist, können wir behaupten, daß zwei verschiedenen in U gewählten Systemen i' und i'' notwendig zwei verschiedene Systeme m' und m'' entsprechen. Nehmen wir in der Tat an, daß i' und i'' voneinander verschieden sind und trotzdem m' und m'' einander gleich, so würden die Flächen N' und N'' dieselben Randsubstitutionen und dieselben Windungspunkte haben und sich nur hinsichtlich der Lage ihrer Begrenzungslinien voneinander unterscheiden. Die zu i' und i'' gehörenden Schottky-Bereiche Ψ' und Ψ'' liegen in einer z-Ebene. Die beiden Integralfunktionen, welche beziehungsweise Ψ' und Ψ'' auf N' und N'' abbilden, mögen mit W' und W'' bezeichnet werden. Betrachten wir dann die Funktion $z(W')$ einerseits und $z(W'')$ andererseits. Wir behaupten von diesen beiden Funktionen, daß es dieselben Funktionen sein müssen. Gehen wir etwa aus von der Funktion $z(W')$. Diese Funktion ist in bezug auf die Fläche N' auf Grund des Unitätssatzes vollständig charakterisiert durch die Eigenschaft, eine eineindeutige konforme Abbildung der Fläche N' auf einen Bereich der Gattung Ψ zu leisten in der Weise, daß von den p linearen Substitutionen die drei ersten Fixpunkte mit $0, \infty, 1$ zusammenfallen. Dieselben Bemerkungen gelten nun aber auch von der Funktion $z(W'')$, wenn diese Funktion als Funktion in N'' betrachtet wird, welche letztere Fläche sich von N' nur durch eine Deformation der Begrenzung unterscheidet. Demnach ist die Funktion $z(W')$ mit der Funktion $z(W'')$

identisch, womit nun selbstverständlich auch gesagt ist, daß $W' = W''$ ist. Vor allem aber machen wir jetzt den Schluß, daß die p linearen Substitutionen, welche die Funktion $z(W')$ erleidet, d. s. die Randsubstitutionen des Bereiches Ψ' mit den Randsubstitutionen des Bereiches Ψ'' identisch sind. Damit ist gezeigt, daß das Wertsystem i' mit dem Wertsystem i'' zusammenfällt, entgegen der Voraussetzung.

Demnach wird das Gebiet U der Parametersysteme i stetig und eineindeutig im Parametergebiet der N abgebildet. Diese Abbildung muß dann auch einem allgemeinen Satze zufolge („Satz von der Invarianz des Gebietes" bei stetiger eineindeutiger Abbildung eines n-dimensionalen Gebietes im n-dimensionalen Raume) *umgebungstreu* sein, d. h. im Gebiete der m wird jedes Wertsystem einer gewissen Umgebung um das Ausgangswertsystem m_0 auch wirklich angenommen.

Der Beweis dieses Satzes, dessen Gebrauch für eine Dimension in der Analysis ganz geläufig ist, ist erst kürzlich von Herrn Brouwer (Zitat S. 51 unten) allgemein geliefert worden.

Bemerkung: Man kann mit Klein (Math. Ann. 21, S. 211) den Wunsch haben, die Beweisführung für die umgebungstreue Abbildung in unserem Falle der Abbildung des Größengebietes der i auf das Größengebiet der m auf die analytische Natur der Abhängigkeit zu gründen. Dazu würde, nachdem die umkehrbare Eindeutigkeit und Stetigkeit der Beziehung und damit jedenfalls die Unmöglichkeit *identischen* Verschwindens der Funktionaldeterminante festgestellt ist, wesentlich genügen, den *analytischen* Charakter der Beziehung festzustellen. Dies ist in der Tat auch möglich. Es sind nämlich im vorliegenden Falle (Schottky-Typus) die Poincaréschen Reihen offenbar analytische Funktionen der Größen i, da diese Größen frei komplex variiert werden können und da die in bekannter Weise mit dem Flächeninhalte operierende Abschätzung zum Zwecke des Konvergenzbeweises offenbar auch in bezug auf die angegebene Parametervariabilität gleichmäßig ausgeführt werden kann. Man kann nun zwei Quotienten von Poincaréschen Reihen gleicher Dimension so wählen, daß dieselben zwei Funktionen X und Y definieren, zwischen denen eine algebraische, für den betreffenden Fundamentalbereich charakteristische Gleichung entsteht, die nun von den erwähnten Parametern analytisch abhängt. Alsdann sind aber auch die Abelschen Integrale erster Art, die aus dieser Gleichung algebraisch hergeleitet werden können, analytische Funktionen dieser Parameter. Mithin sind auch die Konstanten m analytische Funktionen der Konstanten i.

§ 5.

Der Limessatz.

Von besonderer Wichtigkeit für die im nächsten Paragraphen folgende Durchführung des Kontinuitätsbeweises ist nun der folgende Limessatz.

Limessatz: Es sei F die Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion $y(x)$ vom Geschlecht $p \geqq 1$, und es mögen alle Windungspunkte der Fläche F im Endlichen liegen. Die Fläche F sei durch p Rückkehrschnitte, deren keiner durch einen Windungspunkt oder unendlich fernen Punkt der Fläche F hindurchgehen möge, in eine $2p$-fach zusammenhängende Fläche f verwandelt. Es sei ferner bekannt, daß in jeder beliebigen Nähe der Fläche F noch eine Fläche F' bzw. f' mit denselben (koinzidierenden) Rückkehrschnitten existiert, für welche die auffassungsmäßig zugehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus auch wirklich existiert. Alsdann existiert auch die auffassungsmäßig zu f gehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus.*)

Zur Erläuterung des vorstehenden Satzes bemerken wir noch folgendes. Der Ausdruck „F' soll beliebig nahe an F liegen" soll bedeuten, daß die Windungspunkte der Fläche F' von den Windungspunkten der Fläche F beliebig wenig entfernt sind, wobei im Falle des Vorkommens eines Windungspunktes höherer Ordnung der Fläche F für F' die Auflösung eines derartigen Windungspunktes in Windungspunkte niederer Ordnung zugelassen wird.

Wir gehen nun zum Beweise des Limessatzes über. Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, daß es auf Grund der gestellten Voraussetzungen natürlich in jeder Nähe von F noch unendlich viele Flächen mit den Eigenschaften der Fläche F' gibt. Wir nehmen an, es seien F' und F'' zwei voneinander verschiedene Flächen, welche von F um weniger als ε entfernt sind. Das soll heißen: Die einzelnen Windungspunkte der Flächen F' und F'' sollen von den bezüglichen Windungspunkten der Fläche F um weniger als ε entfernt sein. Wir denken uns um jeden der Windungspunkte der Fläche F auf dieser Fläche je einen Kreis vom Radius ε konstruiert. Wir nennen diese Kreise die Kreise K_ε. In derselben Weise konstruieren wir noch für spätere Zwecke die Kreise K_{ε_1} und K_{ε_2}, wobei $\varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ gedacht wird. Wir bezeichnen gelegentlich auch mit K_ε usw. nicht die Kreislinien, sondern die durch diese Kreise auf F ababgegrenzten kreisförmigen Windungsflächenstücke. Die Größen ε, ε_1, ε_2

*) Diesen Satz und meine erste, unten S. 87, näher bezeichnete, auf dem Verzerrungssatze und allgemeinen Konvergenzprinzipe fußende Beweisidee desselben habe ich zuerst Anfang August 1911 (d. i. vor der Karlsruher Versammlung Sept. 1911) Herrn L. Bieberbach in Leipzig vorgetragen.

mögen von vornherein so klein angenommen werden, daß die von den verschiedenen Windungspunkten herrührenden erwähnten Kreisflächenstücke weder gegenseitig noch mit den Begrenzungslinien von f kollidieren. Nun wählen wir in dem Gebiete $f - \Sigma K_{\varepsilon_1}$, d. i. die Fläche f vermindert um sämtliche Kreisflächenstücke K_{ε_1}, einen endlichen Punkt x_0 und einen davon verschiedenen Punkt x_1, welch letzterer auch mit dem unendlich fernen Punkt zusammenfallen kann. Diese Punkte gehören ebenso den Flächen f' und f'' an, welche ja mit f das Stück $f - \Sigma K_\varepsilon$ gemeinschaftlich haben.

Zu f' und f'' existiert nach Voraussetzung die auffassungsmäßig zugehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus. Wir bezeichnen dieselben mit t' bzw. t''. Diese Größen sind zunächst nur bis auf lineare Substitutionen im Gebiete f' bzw. f'' definiert. Wir normieren sie jedoch durch die Bedingung, daß t' und t'', welche in dem Gebiete f' und f'' als eindeutige Zweige erklärt zu denken sind, an der Stelle x_0 beide unendlich werden sollen wie

$$\frac{1}{x - x_0} + ((0)),$$

unter $((0))$ eine im Punkte x_0 verschwindende, reguläre analytische Funktion verstanden. Nach Einführung dieser Normierung wollen wir nunmehr zur abschätzungsweisen Berechnung des Wertes $t'(x_1) - t''(x_1)$ übergehen. Dazu denken wir uns über F' und F'' die der uniformisierenden Variablen t' bzw. t'' entsprechende Überlagerungsfläche Φ' bzw. Φ'' gebildet. Aus diesen beiden Überlagerungsflächen wollen wir uns in allen relativen Blättern derselben diejenigen Teile ausgeschnitten vorstellen, welche auf F' bzw. F'' durch die Kreislinien K_ε begrenzt werden. Hierdurch entstehen aus Φ' und Φ'' zwei Flächen Φ_ε' und Φ_ε'', welche miteinander identisch sind und übereinstimmend mit Φ_ε bezeichnet werden können. Diese Fläche Φ_ε ist zugleich der analog gebildete Teil der zu F selbst gebildeten Überlagerungsfläche Φ der auffassungsmäßig dazu gehörenden, jedoch noch nicht als existierend festgestellten uniformisierenden Variablen t. Zur Berechnung der Differenz $t'(x_1) - t''(x_1)$ betrachten wir jetzt t'' als Funktion von t'. $t'(x)$ und $t''(x)$ liefern je eine ein-eindeutige konforme Abbildung der Fläche Φ_ε auf ein schlichtes Gebiet T_ε' bzw. T_ε''. Die Funktion $t''(t')$ verhält sich im Unendlichen wie $t'' \equiv t' + ((0))$.

Dem Werte x_1 mögen die Werte t_1' und t_1'' entsprechen. Alsdann ergibt sich, wenn wir die Methode des Cauchyschen Integrals und die Prinzipien des Verzerrungssatzes gemäß unseren Entwicklungen beim Unitätsbeweise anwenden, für den Wert t_1'', d. i. der zu t_1' gehörende Wert der Funktion $t''(t')$, der Ausdruck

$$(*) \qquad t_1'' = t_1' + \frac{1}{2\pi i} \sum \int \frac{t''(t')\,dt'}{t' - t_1},$$

die Integrale erstreckt über die unendlich vielen Begrenzungslinien $\bar{z}_{\varepsilon_1}$ des Bereiches T_{ε_1}', Begrenzungslinien, welche nichts anderes sind als die unendlich vielen bei der Abbildung der Fläche Φ_{ε_1}' mittels der Funktion $t'(x)$ sich ergebenden Bilder der Kreise K_{ε_1}.

Die Formel (*) dient uns nun zur Abschätzung der Größe $t''(x_1) - t'(x_1)$, welche Größe eben durch die Integralsumme selbst auf der rechten Seite der Formel (*) dargestellt wird. Die Abschätzung dieser Integralsumme gelingt nach unserer alten Methode. Um sie gleichmäßig für variables x_1 und so ausführen zu können, daß die Abschätzungsgröße eine zugleich mit ε_1 unendlich klein werdende Größe wird, wollen wir für ε_1 jetzt den Wert 2ε, für ε_2 den Wert 4ε wählen. Ferner wollen wir noch einen von ε unabhängigen Wert $\alpha > 4\varepsilon$ und einen ebenfalls von ε unabhängigen Wert $\alpha_1 > \alpha$ wählen und diesen Werten entsprechend die Kreise K_α und K_{α_1} auf F, F', F'' gezogen denken. x_0 und x_1 werden jetzt außerhalb der Kreisflächenstücke K_{α_1} liegend vorgestellt, x_0, wie gesagt, fest, x_1 jedoch in diesem Bezirke frei variabel. Zur Abschätzung bemerken wir zunächst, daß einerseits erfordert wird die Angabe einer positiven von null verschiedenen unteren Schranke für den Nenner $t' - t_1'$, andererseits eine obere Schranke für die Zählersumme. Beide Schranken werden durch den Verzerrungssatz geliefert.

Was zunächst die untere Schranke für $t' - t_1'$ anbetrifft, so erwähnen wir unter Rückbeziehung auf die entsprechenden Entwicklungen beim Unitätsbeweise, daß der Zweig $t'(x)$, welcher im Punkte x_0 unendlich wird, eine Abbildung der zwischen den einzelnen K_α und K_{α_1} enthaltenen Ringe auf schlichte Gebiete entwirft, deren jedes eine Minimaldistanz seiner Begrenzungslinien besitzt, die sich nach den Grundsätzen des Verzerrungssatzes in Verbindung mit dem Vorbereitungssatze S. 87 in „U. d. a. K. II" abschätzen läßt. Diese Minimaldistanz ist jedenfalls größer als der absolute Betrag der Größe $t' - t_1'$ während der Integration. Zur Abschätzung der Zähler aber bemerken wir, daß dieselbe nach unseren Abschätzungsprinzipien auf die Abschätzung der Summe der Quadrate der Umfänge aller $\bar{K}_{2\varepsilon}'$ und aller $\bar{K}_{2\varepsilon}''$ hinausläuft, deren erstere in der t'-Ebene, letztere in der t''-Ebene liegen. Nun hat der einzelne Ring zwischen K_ε und $K_{4\varepsilon}$ eine von der Größe von ε unabhängige Gestalt. Er kann durch Vermittlung einer Wurzeloperation auf einen schlichten Kreisring abgebildet werden, welcher durch Ähnlichkeitstransformation noch so abgeändert werden kann, daß der dem Kreise $K_{3\varepsilon}$ entsprechende Kreis der Einheitskreis wird und dann die beiden anderen Kreise ganz bestimmte von ε unabhängige Kreise werden. Hieraus schließen wir, daß alle Kurven $\bar{K}_{2\varepsilon}'$ und $\bar{K}_{2\varepsilon}''$, sofern sie eben in schlichte eineindeutige Bildbereiche der erwähnten Kreisringe eingebettet sind, den Prinzipien des Verzerrungssatzes unter-

worfen sind. Die Summe der Quadrate der Umfänge steht dann zur Summe der von allen diesen Linien umschlossenen Flächeninhalte $J_{2\varepsilon}$ in einem endlichen von ε unabhängigen Verhältnis, und es bleibt also die *Summe dieser Flächeninhalte* abzuschätzen. Um nun diese Flächeninhalte abzuschätzen, bemerken wir zunächst, daß dieselben kleiner sind als die Flächeninhalte J_α, welche von den Kurven $\bar{K}_\alpha'$ und $\bar{K}_\alpha''$ umschlossen werden, die in der t'- und t''-Ebene den Kreisen K_α entsprechen. Die Summe dieser Flächeninhalte ist selbstverständlich endlich und unterhalb einer von der Wahl von F' und F'' unabhängigen Schranke enthalten gemäß dem Vorbereitungssatze des Verzerrungssatzes. Wir zeigen nun, daß das Verhältnis $J_{2\varepsilon} : J_\alpha$ zugleich mit ε unendlich klein wird, wenn mit $J_{2\varepsilon}$ und J_α irgend zwei der erwähnten Flächeninhalte bezeichnet werden, von welchen $J_{2\varepsilon}$ in J_α enthalten ist.

Wir denken uns zum Zwecke dieses Nachweises außer den Kreisen mit den Radien ε, 2ε, 4ε noch die weiteren Kreise mit den Radien $8\varepsilon, 16\varepsilon, \cdots, 2^\nu\varepsilon$ konstruiert, wobei ν die größte ganze Zahl sei, für welche noch $2^\nu\varepsilon < \alpha$ ist. Auf diese Weise haben wir innerhalb jedes Kreises K_α im ganzen ν Ringe von gleichem Radienverhältnis konstruiert. Von diesen ν Ringen möge der erste und letzte außer Betracht gelassen werden; alsdann gilt für die übrigen $\nu - 2$ Ringe der Satz, daß jeder derselben nach außen und innen von einem der ν Ringe gewissermaßen umsäumt wird. Die so in K_α entstehenden $\nu - 2$ Ringe mit dem Radienverhältnis $1:8$ sind untereinander ähnlich, und es finden daher auf die Abbildungen dieser Ringe in der t'-Ebene und t''-Ebene die gestaltlich beschränkenden Gesetze des Verzerrungssatzes Anwendung. Bezeichnen wir die den genannten Kreisen in der t'-Ebene und t''-Ebene entsprechenden Linien oder vielmehr die von diesen Linien umschlossenen einzelnen Flächeninhalte mit $J_{2\varepsilon}, J_{4\varepsilon}, \cdots, J_{2^\nu\varepsilon}$, so gibt es auf Grund des Verzerrungssatzes eine von der Wahl von ε und von λ unabhängige Konstante $Q < 1$, sodaß man hat

$$J_{2\varepsilon} < QJ_{4\varepsilon} < Q^2J_{8\varepsilon} < \cdots < Q^{\lambda-1}J_{2^\lambda\varepsilon} < \cdots < Q^{\nu-1}J_{2^\nu\varepsilon},$$

wobei noch

$$J_{2^\nu\varepsilon} < J_\alpha$$

ist, also

$$J_{2\varepsilon} < Q^{\nu-1}J_\alpha.$$

Dies gilt für jedes einzelne $J_{2\varepsilon}$ im Verhältnis zu J_α, also auch für die zu betrachtenden Summen von Flächeninhalten. Die Summe aller $J_{2\varepsilon}$ ist mithin in der Tat eine mit ε unendlich klein werdende Größe.

Nachdem nunmehr feststeht, daß die Größe $t_1'' - t_1'$ im Gebiete $(f - \Sigma K_\alpha)$ gleichmäßig unendlich klein wird, wenn nur ε unendlich klein wird, ist damit gezeigt, daß eine Grenzfunktion

$$t = \lim_{\varepsilon = 0} t'$$

existiert, welche als Resultat einer gleichmäßigen Konvergenz im Gebiete $(f - \Sigma K_\alpha)$ erscheint. Die Grenzfunktion t ist in diesem Bezirke eindeutig und regulär, sie wird in x_0 unendlich wie

$$t \equiv \frac{1}{x - x_0} + ((0)),$$

d. h. genau so wie t', und sie vermittelt eine eineindeutige konforme Abbildung des Gebietes $(f - \Sigma K_\alpha)$ auf einen schlichten Bereich mit linearer Ränderzuordnung. Diese Funktion t existiert nun aber auch im ganzen Gebiet f. In der Tat kann man ja die Kreise K_α beliebig klein wählen, und immer bleibt unser Konvergenzbeweis gültig. Demnach existiert jedenfalls die Funktion t auch noch in beliebiger Nähe des Windungspunktes der Fläche f, und da sie nun in dieser beliebigen Nähe jedenfalls auf Grund des schlichten Abbildungscharakters beschränkt bleibt, so muß sie sich auch in den Windungspunkten selbst noch regulär verhalten, d. h. in der Weise, daß sie auch die Umgebung dieser Windungspunkte durchaus schlicht und stetig abbildet bis in die Windungspunkte selbst hinein.

Die Funktion $t(x)$ ist mithin die zu f gehörende uniformisierende Variable, deren Existenz jetzt bewiesen ist.

Es ist ebenso wie oben in § 2 von Interesse, den nunmehr bewiesenen auf S. 83 formulierten Limessatz auch mit Hilfe des *allgemeinen Konvergenzprinzips* darzutun.

Wir haben einerseits die mit p Rückkehrschnitten aufgeschnittene Fläche F, welche in der Aufschneidung oben mit f bezeichnet wurde, ferner F', der Fläche F benachbart mit denselben (koinzidierenden) Rückkehrschnitten, nach der Aufschneidung bezeichnet mit f'. Die zu f' gehörende uniformisierende Variable t' wird im Punkte x_0 unendlich wie

$$\frac{1}{x - x_0} + ((0)).$$

Dabei dachten wir uns den Punkt x_0 fest, wenn F' gegen F konvergiert. Es werde nunmehr um den Punkt x_0 ein Kreis K_R vom Radius R beschrieben, welcher auf F und F' ein gewöhnliches Kreisflächenstück K_R begrenzt. Alsdann wird das Maximum des absoluten Betrages der Funktion $t'(x)$ in dem Gebiete $(f' - K_R)$ wegen des Abbildungscharakters dieser Funktion offenbar auf der Linie K_R angenommen, und wir wollen beweisen, daß dieses Maximum M' unterhalb einer endlichen von der Wahl von F' unabhängigen Schranke bleibt. Für diesen Nachweis könnten wir uns auf den in „U. d. a. K. II." (Math. Ann. 69, S. 46) bewiesenen Hilfssatz (Vorbereitungssatz des Verzerrungssatzes) berufen. Wir können aber diesen Nachweis auch aus dem allgemeinen Konvergenzprinzip selbst gewinnen.

Dazu nehmen wir an, daß M' beliebig groß werden könnte. Alsdann gäbe es eine Folge von Flächen F', die gegen F konvergieren und zugehörende Funktionen t', für welche das betrachtete Maximum M' in der Grenze unendlich groß wird. Die Funktionen $\frac{t'}{M'}$ der Folge würden dann auf der Kreislinie K_R als Maximum des absoluten Betrages sämtlich den Wert 1 haben. Andererseits würden diese Funktionen im Punkte x_0 unendlich wie

$$\frac{\frac{1}{M'}}{x-x_0} + ((0)).$$

Wir könnten nun aus der Folge der Funktionen $\frac{t'}{M'}$ eine innerhalb $f-K_R$ nach vorläufigem Ausschluß der Windungspunkte selbst gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion τ konvergierende neue Folge herausgreifen. Diese konvergente Folge würde aber auch auf K_R selbst, sowie innerhalb des Kreises K_R gleichmäßig konvergieren, weil sie jedenfalls auf einer Kreislinie $K_{R'}$ konvergiert, wenn $R' > R$ gewählt wird, und weil die Funktionen $\frac{t'}{M'} - \frac{\frac{1}{M'}}{x-x_0}$ innerhalb $K_{R'}$ regulär sind und im Punkte x_0 verschwinden. Daraus folgt, daß die genannte Grenzfunktion τ die Eigenschaften besitzt, auf K_R den Wert 1 als Maximum des absoluten Betrages zu haben und in x_0 zu verschwinden, ferner die Eigenschaft, daß das Maximum des absoluten Betrages der Funktion τ im Gebiete $f-K_R$ auf der Kreislinie K_R erreicht wird. Hieraus ergibt sich ein Widerspruch, weil τ nun eine Funktion wäre, welche nicht konstant ist und doch an einem regulären Punkte ein Maximum ihres Betrages erreicht.*)

Nachdem somit feststeht, daß die Funktionen t' im Gebiete $f-K_R$ unterhalb einer festen Schranke bleiben, kann man nunmehr eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen t' bestimmen, gleichmäßig konvergent zunächst innerhalb $f-K_R$, dann aber auch auf K_R und innerhalb K_R, weil jedenfalls auf $K_{R'}$ $(R'>R)$ gleichmäßige Konvergenz stattfindet und weil $t' - \frac{1}{x-x_0}$ innerhalb $K_{R'}$ regulär ist und im Punkte x_0 verschwindet. Die Funktion

$$t = \lim_{F'=F} t'$$

besitzt offenbar die Eigenschaften der für F zu bestimmenden uniformisierenden Variablen. Man bemerke, um dies einzusehen, daß ihre Existenz natürlich auch über die Begrenzung von f hinaus als erwiesen zu betrachten ist, weil ja die Funktionen t' auch über die Begrenzung von f

*) Vgl. hiermit eine Entwicklung S. 235 meiner Abhandlung in J. f. Math. 138.

hinaus existieren und nur Werte annehmen, welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als das Maximum des absoluten Betrages der in $f' - K_R$ angenommenen Werte.

§ 6.

Durchführung des Kontinuitätsbeweises.

Wir gehen nunmehr nach den vorbereitenden Entwicklungen der §§ 1—5 zur Durchführung des Kontinuitätsbeweises über.

Es soll gezeigt werden für eine gegebene Riemannsche Fläche F vom Geschlecht $p \geqq 2$, daß zu derselben nach ihrer Aufschneidung zu einer $2p$-fach zusammenhängenden Fläche F_0 mittels p getrennter Rückkehrschnitte eine uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus $t \equiv t(x, y)$ gehört, durch deren Vermittlung F_0 umkehrbar eindeutig konform auf einen schlichten Bereich mit linearer Randänderung abgebildet wird. Daß die gestellte Aufgabe nicht mehr als eine Lösung gestatten kann, ist das Ergebnis des in der Abhandlung „U. d. a. K. II." geführten Unitätsbeweises. Die tatsächliche Exsitenz der Größe soll nun eben gezeigt werden.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Fläche F_0 in der schon oben § 1 angewandten Weise auf einen schlichten Bereich Φ_2 mit regulär analytischer Ränderzuordnung abgebildet. Die $2p$ Begrenzungslinien des Bereiches Φ_2 modifizieren wir unter Aufrechterhaltung der analytischen Randsubstitutionen nach der Methode des § 1 so, daß dieselben sämtlich geschlossene reguläre analytische Linien sind. Der unendlich ferne Punkt wird übrigens als innerer Punkt des Bereiches Φ_2 gedacht.

Wir stellen jetzt neben den Bereich Φ_2 irgend einen Bereich Φ_1 von der Gattung der oben betrachteten Bereiche Φ, welcher zudem *lineare* Ränderzuordnung besitzt. Einen solchen Bereich erhalten wir sofort, wenn wir bei einem von $2p$ Vollkreisen begrenzten schlichten Kreisbereich die $2p$ Kreise irgend wie paarweise durch lineare Substitutionen aufeinander beziehen unter richtiger Beachtung des Umlaufssinnes.

Das Uniformisierungsproblem, welches wir behandeln, ist durch den Übergang zum Bereiche Φ_2 in ein Abbildungsproblem für diesen Bereich verwandelt, nämlich das Problem der konformen Abbildung des Bereiches Φ_2 mit analytischer Ränderzuordnung in einen Bereich der Gattung Φ mit linearer Ränderzuordnung in der Art, daß bei der Abbildung zugeordnete Randpunkte wieder in zugeordnete Randpunkte übergehen. Diese Abbildungsaufgabe wird für den Bereich Φ_1 durch die identische Abbildung gelöst. Da die Aufgabe nur abgesehen von einer linearen Substitution bestimmt ist, führen wir vorteilhafterweise für den abgebildeten Bereich die Normierung des § 4 ein. D. h. wir normieren ihn so, daß die drei

ersten Fixpunkte der linearen Randsubstitutionen mit 0, ∞, 1 zusammenfallen. Nennen wir die solcherweise normierten Bereiche Ψ, so haben wir entsprechend Φ einen durch eine lineare Substitution aus Φ_1 hervorgehenden Bereich Ψ_1 und entsprechend Φ_2 einen zu bestimmenden Bereich Ψ_2.

Der Beweis für die Existenz des Bereiches Ψ_2 zerfällt nun in folgende Beweisschritte.

1. In der Mannigfaltigkeit der Φ läßt sich von Φ_1 nach Φ_2 eine Überführungslinie Ω konstruieren.

2. Ist Φ^* irgend ein Φ der Überführungslinie, für welches das zugehörende Ψ, zu bezeichnen mit Ψ^*, existiert, so existiert auch für die auf der Überführungslinie Ω dem Bereiche Φ^* benachbarten Bereiche jedesmal ein zugehörendes Ψ, sofern man sich nur auf eine hinreichend kleine Nachbarschaft beschränkt.

3. Ist Φ^* irgend ein Φ der Überführungslinie Ω, in dessen beliebiger Nähe auf Ω noch Bereiche Φ existieren, für welche das zugehörende Ψ vorhanden ist, so gibt es auch zu Φ^* noch ein zugehörendes Ψ.

In der Tat können wir aus den vorstehenden drei Sätzen folgern, daß auch zu Φ_2 ein zugehörendes Ψ_2 vorhanden ist. Denn da zu Φ_1 ein Ψ_1 existiert, so kann man auf der Überführungslinie Ω nach Satz 2 ein Stück weitergehen mit der Gewißheit, daß dabei zu jedem Φ ein zugehörendes Ψ existiert. Nehmen wir nun an, daß zu Φ_2 kein zugehörendes Ψ_2 vorhanden wäre, so müßte es auf Ω ein Φ^* geben, das sicher von Φ_1 verschieden ist, jedoch mit Φ_2 zusammenfallen kann, von der Art, daß für alle Φ der Linie Ω von Φ_1 bis Φ^* (Φ^* exkl.) jeweilig ein zugehörendes Ψ existiert, während hinter Φ^* in beliebiger Nähe von Φ^* selbst stets noch ein Φ gefunden werden kann, für welches es ein zugehörendes Ψ nicht gibt. Ein solches Φ^* kann nun aber andererseits nicht existieren; denn dieses Φ^* müßte wegen Satz 3 jedenfalls selbst noch ein zugehörendes Ψ besitzen, und dann müßten wegen Satz 2. auch nach Φ^* in einer gewissen Nähe von Φ^* noch alle Φ ein zugehörendes Ψ haben, was der Definition von Φ^* widerspricht. Also ergibt sich in der Tat für Φ_2 ein zugehörender Bereich Ψ_2.

Wir hätten uns sonach zu überlegen, inwiefern die drei Sätze 1, 2, 3 gelten.

Satz 1 ist unmittelbar bewiesen durch die Entwicklungen des § 1.

Satz 2 finden wir aus den Entwicklungen des § 2—4 in folgender Weise. Wir bestimmen zu Φ^* ein Differential erster Art dW^*, dessen sämtliche Nullstellen einfach sind, so, daß keine der Nullstellen auf einer Begrenzungslinie von Φ^* noch auch auf einem der p Querschnitte liegt, durch deren Einführung die Fläche Φ^* in eine p-fach zusammenhängende Fläche φ^* verwandelt wird. Durch W^* wird φ^* abgebildet auf die Normal-

fläche N^* mit einem gewissen Parametersystem m^*. Indem wir von Φ^* zu solchen Φ übergehen, die Φ^* auf der Linie Ω hinreichend benachbart sind, wird die zugehörende Funktion W eine Abbildung von Φ auf eine Fläche N liefern, deren Konstantensysteme m sich beliebig wenig von dem Konstantensystem m^* unterscheidet, und es werden die p Begrenzungslinien der Fläche N sich beliebig wenig von den entsprechenden Begrenzungslinien der Fläche N^* unterscheiden. Gehen wir nun andererseits von Ψ^* aus und denken uns auf Ψ^* das Differential dW^* überpflanzt, so wird Ψ^* durch W^* auf dieselbe Fläche N^* abgebildet. Läßt man jetzt Ψ die $(6p-6)$-dimensionale Umgebung von Ψ^* beschreiben, indem man das Parametersystem i die volle Umgebung des zu Ψ^* gehörenden Invariantensystems i^* beschreiben läßt, so wird dabei nach Früherem die zugehörende Fläche N eine Variation ausführen, bei welcher die ganze Umgebung des Konstantensystems m^* in erschöpfender Weise ausgefüllt wird. Darin liegt der Beweis des Satzes 2. Denn man kann jetzt auf Ω die Nachbarschaft von Φ^* soweit einschränken, daß man beim Übergange von einem Φ dieser Nachbarschaft zu dem entsprechenden N in dem sicher voll ausgefüllten Bezirk der Konstanten m um m^* herum bleibt. Der Umstand, daß hier in der Regel zwar ein Zusammenfallen der Konstantensysteme m für ein Ψ und ein Φ bewirkt wird, nicht jedoch auch ein Zusammenfallen der Begrenzungslinien der beiden betreffenden Figuren N, gibt nicht zu Bedenken Anlaß, weil wir gemäß den genaueren in § 4 gegebenen Präzisierungen die zu betrachtenden nachbarlichen Variationen jedenfalls soweit einschränken können, daß eine Identität der Konstantensysteme für zwei Flächen N unmittelbar auch die deformatorische Äquivalenz der betreffenden Begrenzungslinien zur Folge hat.

Es bleibt somit nur noch Punkt 3. zu erledigen. Der Satz 3. ist wesentlich eine Folge des in § 5 bewiesenen Limessatzes. Zum Beweise bestimmen wir zu Φ^* wie vorher ein Differential dW^*. Es gibt dann, wie aus dem Zusatz S. 76 sofort ersichtlich ist, ein von dW^* verschiedenes Differential $d\overline{W}^*$, welches allen Bedingungen des Differentials dW^* genügt und außerdem so beschaffen ist, daß es mit dW^* keine Nullstelle gemeinschaftlich hat. Der Quotient $\frac{d\overline{W}^*}{dW^*}$ ist eine in Φ^* eindeutige Funktion mit $2p-2$ einfachen Unendlichkeitsstellen und vermittelt eine konforme Abbildung des Bereiches Φ^* auf eine längs p Rückkehrschnitten aufgeschnitten zu denkende und als solche mit f^* bezeichnete Fläche F^*, deren sämtliche Windungspunkte im Endlichen liegen. Der analog gebildete Quotient für die auf Ω vorbenachbarten Bereiche Φ liefert eine Abbildung dieser Flächen auf Flächen F bzw. f, welche sich von F^* im Sinne der in § 5 S. 83 eingeführten Terminologie beliebig wenig unter-

scheiden, da der Quotient ebenso wie die Differentiale selbst stetige Funktionen in Abhängigkeit von Φ sind, sodaß insbesondere auch die Windungspunkte der Fläche F beliebig wenig von den entsprechenden Windungspunkten der Fläche F^* entfernt sind. Es kann der Fall eintreten, daß jetzt die Begrenzungslinien der Fläche f durch die Windungspunkte selbst hindurchgehen. In diesem Falle ist aber sofort eine Abhilfe möglich, dadurch, daß man ein durch einen Windungspunkt gehendes Linienstück, von welcher Ordnung auch der betreffende Windungspunkt sein mag, ersetzen kann durch ein diesen Windungspunkt umkreisendes Linienstück.*) Auf diese Weise ist es stets möglich, auf die Voraussetzungen des Beweises unseres Limessatzes in § 5 zu kommen. Der Umstand, daß für die verschiedenen Flächen F die Begrenzungslinien von f sich nicht decken, wie in § 5 beim Beweise des Limessatzes angenommen wurde, ist ebenfalls belanglos, da jedenfalls alle diese Linien durch Deformation gleichwertig sind, wenn wir uns nur auf hinreichend dem Bereiche Φ^* benachbarte Bereiche Φ beschränken. Jetzt haben wir in f^* eine Fläche, für welche die Existenz der uniformisierenden Variablen noch nicht bekannt ist, andererseits in beliebiger Nähe Flächen f, für welche die Existenz bekannt ist. Nach dem Limessatze existiert daher auch zu f^* die uniformisierende Variable, d. h.: Es gehört zu Φ^* auch ein Bereich Ψ^*.

Wir haben im Vorhergehenden den Satz 3 durch Bezug auf den § 5 für Riemannsche Flächen F bewiesenen Limessatz erledigt. Wollen wir von dem *allgemeinen Konvergenzprinzip* Gebrauch machen, so können wir eine direkte, nur die Flächen Φ und Ψ selbst in Betracht nehmende Erledigung geben.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Funktion, welche Φ auf Ψ abbildet, als eine Funktion in Φ^* betrachtet, was bei hinreichender Nähe des Bereiches Φ an Φ^* keine Schwierigkeit darbietet. Die Funktion $t(z)$, welche diese Abbildung vermittelt, liefert eine schlichte Abbildung des Bereiches Φ^* auf einen Bereich Ψ^* mit noch nicht linearer Ränderzuordnung. Die Abbildung erstreckt sich dabei ein Stück über den Bereich Φ^* hinaus auf ein Gebiet, das wir mit Φ_+ bezeichnen können. Wir sind daher in der Lage, für den Bereich $\overline{\Psi}^*$, da die Abbildungsfunktion $t(z)$ sich im Unendlichen verhält wie

$$t \equiv z + ((0)),$$

auf Grund des Verzerrungssatzes Abschätzungen anzugeben, welche unabhängig von der Wahl des Φ^* benachbarten Bereiches Φ sind, insbesondere können wir behaupten, daß die Begrenzungslinien des Bereiches $\overline{\Phi}^*$ alle

*) Vgl. auch das analoge Vorkommnis in § 7.

in einem endlichen Bezirk bleiben (vgl. den mehrfach erwähnten Hilfssatz in „U. d. a. K. II." S. 46 und die Entwicklungen in der vorliegenden Abhandlung S. 87 ff., welche gestatten, diesen Satz selbst mit Hilfe des allgemeinen Konvergenzprinzips zu beweisen). Man ist nun im Stande, eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen $t(z)$ der genannten Art zu bilden, welche zu Bereichen Φ gehören, die ihrerseits gegen Φ^* konvergieren. Die Grenzfunktion, die sich ergibt, vermittelt dann offenbar eine Abbildung des Bereiches Φ^* auf einen Bereich Ψ^* mit linearer Ränderzuordnung, wie verlangt wird.

§ 7.

Die Einheit der Fundamentalbereiche Ψ.

In § 1 haben wir die Einheit der Bereiche Φ mit analytischer Ränderzuordnung dargetan. Dieser Beweis in Verbindung mit dem nunmehr bewiesenen Fundamentaltheorem gestattet uns jetzt den Nachweis des analogen Satzes von der Einheit der Bereiche Ψ mit linearer Ränderzuordnung zu führen.

Wir präzisieren zunächst den von uns zu beweisenden Satz. Wir verstehen unter Ψ einen Bereich mit $2p$ regulären analytischen Randkurven, die paarweise durch lineare Substitutionen aufeinander bezogen sind. Der unendlich ferne Punkt sei innerer Punkt des Bereiches Ψ. Mit Ψ_1 und Ψ_2 mögen irgend welche speziell gewählte Bereiche der Gattung Ψ bezeichnet sein. Alsdann wird behauptet, daß es möglich ist, in der Mannigfaltigkeit der Ψ eine Überführung des Bereiches Ψ_1 in den Bereich Ψ_2 vorzunehmen. Ähnlich, wie wir in § 1 von einer Überführungslinie Ω in der Φ-Mannigfaltigkeit sprachen, wollen wir jetzt von einer Überführungslinie ω in der Ψ-Mannigfaltigkeit sprechen. Die Linie ω verläuft natürlich auch im Gebiete der Bereiche Φ. Die Bedingung der beständig linearen Ränderzuordnung bedeutet insofern eine Erschwerung der ursprünglichen in § 1 behandelten Aufgabe, eben vermöge der genannten Nebenbedingung.

Wir gehen zur Bestimmung der Linie ω von einer Linie Ω aus, welche im Gebiete der Bereiche Φ den Übergang von Ψ_1 nach Ψ_2 darstellt. Auch die Bereiche Φ enthalten sämtlich den unendlich fernen Punkt in ihrem Innern. Es gehört nun zu jedem Bereiche Φ der Linie Ω ein ganz bestimmter Bereich Ψ auf Grund des bewiesenen Fundamentaltheorems. Um diesen Bereich Ψ zu einem völlig normierten zu machen, stellen wir die determinierende Bedingung, daß Φ auf Ψ in der Weise abgebildet sein soll, daß die Abbildungsfunktion $t(z)$ im Unendlichen in der Form

$$t \equiv z + ((0))$$

entwickelbar ist. Die Linie ω wird nun direkt erklärt als Bild der Linie Ω, d. h. wir ordnen jedem Bereiche Φ der Linie Ω den zugehörenden Bereich Ψ zu. Dabei werden die Bereiche $\Phi_1 = \Psi_1$ und $\Phi_2 = \Psi_2$ sich selbst zugeordnet. Es kommt nur darauf an zu zeigen, daß Ψ sich stetig ändert, wenn Φ auf der Linie Ω stetig fortschreitet.

Für diesen Stetigkeitsbeweis dienen uns die Entwicklungen des § 2 als Grundlage. Vorweg können wir über die Beziehung der Bereiche Φ zu den Bereichen Ψ längs der ganzen Linie Ω einige Bemerkungen machen, deren Gültigkeit unmittelbar durch den Verzerrungssatz gewährleistet wird: Alle Bereiche Ψ der Überführungslinie ω besitzen die Eigenschaft, daß die zugehörenden Begrenzungslinien in einem gewissen endlichen Bezirke β bleiben, der für die ganze Überführungslinie gleichmäßig bestehen bleibt. Für die Begrenzungslinien der Bereiche Ψ existiert ferner eine längs der ganzen Linie ω gleichmäßig bestimmbare Minimalgröße derselben usw. Vgl. die entsprechenden Bemerkungen in § 1, S. 60.

Gehen wir nun zu dem Stetigkeitsbeweise selbst über.

Wir wählen irgend einen Bereich Φ^* der Linie Ω mit den zugehörenden Ψ^*. Mit Φ bezeichnen wir jetzt einen auf Ω dem Bereiche Φ^* benachbarten Bereich, mit Ψ den zugehörenden Bereich mit linearer Ränderzuordnung. Wir konstruieren wie oben S. 91 einen Quotienten $\frac{d\,\overline{W}^*}{d\,W^*} \equiv x^*(z)$ im Bereiche Φ^*, welcher in Φ^* eine Funktion mit $2p-2$ einfachen Unendlichkeitsstellen definiert. Wir nehmen zunächst an, daß keine der Unendlichkeitsstellen dieser Funktion im unendlich fernen Punkt der z-Ebene liegt und daß keine Nullstelle der Ableitung dieser Funktion auf einer der $2p$ Begrenzungslinien von Φ^* liegt, schließlich, daß auch der unendlich ferne Punkt bei der Abbildung auf einen gewöhnlichen endlichen Punkt der als Bild von Φ^* sich ergebenden Riemannschen Fläche F^* abgebildet wird. (Für die hierdurch ausgeschlossenen Fälle vgl. die weiter unten gemachten Bemerkungen.) Dieser endliche Punkt heiße x_0^*; die Ebene des Bereiches F^* bezeichnen wir als x-Ebene. Die Funktion $z(x^*)$, welche die konforme Abbildung der Fläche F^* oder f^*, d. i. die längs den hier in Betracht kommenden p Rückkehrschnitten aufgeschnittene Fläche F^*, auf den Bereich Φ^* vermittelt, verhält sich im Punkte x_0^* wie

$$t^*(x^*) \equiv \frac{A^*}{x^* - x_0^*} + B^* + ((0)),$$

unter A^* und B^* gewisse Konstanten verstanden, von welchen A^* jedenfalls von 0 verschieden ist. Betrachten wir jetzt die Abbildung von f^* auf die Fläche Ψ^*, so ergibt sich für die Abbildungsfunktion $t^*(x^*)$ eine Entwicklung in derselben Gestalt mit denselben Konstanten A^* und B^*. In der Tat muß ja die Differenz $t^* - z^*$ im Punkte x_0^* gemäß der oben

für die Abbildung von Φ^* auf Ψ^* gestellten Normierungsbedingung verschwinden.

Nunmehr gehen wir von Φ^* zu dem Nachbarbereiche Φ über. Die Funktion $x^*(z)$ ändert sich stetig beim Übergang von Φ^* zu Φ, wobei an Stelle von $x^*(z)$ die neue Funktion $x(z)$ tritt. Daraus ergibt sich, daß die Funktion $z(x)$ auf der Fläche F (Abbild von Φ) sich verhält wie

$$\frac{A^* + \varepsilon_1}{x - (x_0{}^* + \varepsilon_2)} + (B^* + \varepsilon_3) + ((0)),$$

unter ε_1, ε_2, ε_3 drei Größen verstanden, welche sämtlich unendlich klein werden, wenn Φ sich auf Ω dem Bereiche Φ^* unbegrenzt nähert. Es ist ferner x eine Größe, welche sich ebenfalls der Größe x^* unbegrenzt nähert bei der erwähnten Annäherung. Man beachte übrigens, daß wir unsere Aufmerksamkeit besonders auf das Verhalten der Funktionen auf den Begrenzungslinien der Fläche f zu richten haben. Die Stetigkeit in der Umgebung dieser Linie ist das uns eigentlich Interessierende. Es sei deswegen die Tatsache hervorgehoben, daß für die Ableitungen $\left|\frac{dz}{dx^*}\right|$ und $\left|\frac{dz}{dx}\right|$ von 0 und ∞ verschiedene obere und untere Schranken bestimmt werden können, welche für eine gewisse um die Begrenzungslinien von f^* abgegrenzte Umgebung derselben gültig sind und von der Wahl des Bereiches Φ, sofern derselbe nur genügend nahe an Φ^* liegt, unabhängig sind. Diese Schranken werden wieder durch den Verzerrungssatz in Verbindung mit dem „Vorbereitungssatz" desselben geliefert. Wir können nun von der Funktion $z(x)$ zu einer Funktion $\bar{z}(\bar{x})$ übergehen, welche aus $z(x)$ durch eine mittels einer infinitesimalen Ähnlichkeitstransformation in der x-Ebene ausgeführte Werteüberpflanzung entsteht. Die Ähnlichkeitstransformation soll diejenige ähnliche Abänderung der Fläche F in eine Fläche $\bar{F}$ definieren, durch welche, wenn dabei x in $\bar{x}$ übergeht, die Funktion $\bar{z}(\bar{x})$ an der Stelle $\bar{x} = x_0{}^*$ dieselbe Entwicklung bekommt, wie $z(x^*)$. Nachdem diese Überpflanzung ausgeführt ist, ergibt sich nunmehr, daß die Differenz $t - t^*$ insbesondere in der Umgebung der Begrenzungslinien von f^* eine stetige infinitesimale Größe ist, und zwar wesentlich nach derselben Methode, nach welcher wir in § 5 den Limessatz bewiesen haben.

Hiermit ist dann aber auch in Anbetracht der allgemeinen Vorbemerkungen auf S. 93 der gewünschte Nachweis des stetigen Übergangs des Bereiches Ψ in den Bereich Ψ^* bei unbegrenzter Annäherung des Bereiches Φ an den Bereich Φ^* erbracht. Die Konstanten des Bereichs Ψ erscheinen somit als stetige Funktionen des Überführungsparameters, wenn wir uns so ausdrücken dürfen. Insofern nun bei allen Ψ der gewonnenen Überführung generell eine Streifenbreite um die Begrenzungslinien von Ψ herum existiert, in welcher die Randsubstitutionen von Ψ ohne störende

Kollisionen ausführbar sind, ergibt sich, daß der Übergang von Ψ_1 nach Ψ_2 in endlich vielen Schritten ausgeführt werden kann, deren einzelner entweder eine bloße Parameteränderung der Substitutionen ist, die im Gebiete dieser Parameter geradlinig erfolgt, wobei von den p Begrenzungslinienpaaren je eine Linie festgehalten wird, oder aber bloße erlaubte Abänderungen der Begrenzungslinien bei festgehaltenen Substitutionen.

Wir haben für den soeben geführten Nachweis einige Annahmen in bezug auf die Funktion $x^*(z)$ gemacht. Sind diese Annahmen nicht erfüllt, so gelangen wir in jedem Falle durch geringe Modifikationen des Beweisverfahrens zu dem gewünschten Ziele. Diese Modifikationen wollen wir jetzt bezeichnen. Die im folgenden getrennt betrachteten Möglichkeiten können auch kombiniert auftreten, die Art der vorzunehmenden Beweismodifikation wird jedoch auch dann sofort klar sein.

Betrachten wir etwa den Fall, daß die Funktion $\frac{d\,\overline{W}^*}{d\,W^*} \equiv x^*(z)$ auf der Begrenzung des Bereiches Φ^* eine Nullstelle ihrer Ableitung besitzt. In diesem Falle könnte man daran denken, dieser Unbequemlichkeit durch eine geringe Modifikation der Differentiale oder eines derselben aus dem Wege zu gehen. Wir können indes diesen Fall auch durch eine Modifikation der Begrenzungslinien selbst auf den allgemeinen vorher betrachteten Fall zurückbringen in folgender Weise. Es seien etwa L_1^* und $L_1^{*\prime}$ die zwei betroffenen Begrenzungslinien des Bereiches Φ^*. Alsdann können wir L_1^* durch eine benachbarte, ebenfalls geschlossene reguläre Linie $\overline{L}_1^*$ ersetzen und entsprechend $L_1^{*\prime}$ abändern. Hierdurch ist Φ^* durch einen Bereich $\overline{\Phi}^*$ mit denselben Randsubstitutionen ersetzt. Ist nun Φ der betrachtete, Φ^* benachbarte Bereich, so können wir diesem Φ einen $\overline{\Phi}^*$ wieder benachbarten Bereich $\overline{\Phi}$ dadurch entsprechen lassen, daß wir die Begrenzungslinien L_1 und L_1' ersetzen durch $\overline{L}_1^*$ und $\overline{L}_1^{*\prime\prime}$, indem wir unter $\overline{L}_1^{*\prime\prime}$ diejenige geschlossene reguläre Linie verstehen, welche vermöge der zu Φ gehörenden Randsubstitution der Linie $\overline{L}_1^*$ entspricht. Der gefundene neue Bereich $\overline{\Phi}$ liegt natürlich jetzt nicht mehr auf der Linie Ω, er ist vielmehr der Linie Ω benachbart und bestimmt im Gebiete der Bereiche der Gattung Φ ein Linienstück $\overline{\Omega}$, welches insofern als Linienstück bezeichnet wird, als es nur für ein gewisses Stück der Linie Ω um Φ^* herum erklärt ist. Jetzt zeigen wir nach der vorher dargelegten Methode, daß bei $\overline{\Phi}$ einer stetigen Begrenzung auf $\overline{\Omega}$ eine stetige Bewegung auf $\overline{\omega}$ entspricht, wobei $\overline{\omega}$ ein Linienstück der Ψ-Mannigfaltigkeit ist, welches ω benachbart verläuft. Dann ist aber nun auch die stetige Bewegung auf Ω selbst an der Stelle Φ^* klar, weil die entsprechenden Bereiche auf $\overline{\Omega}$ und Ω einfach durch gewisse kleine und genau zu übersehende Deformationen der Begrenzungslinien entstehen.

Betrachten wir weiter den möglicherweise vorkommenden Fall, daß die Abbildung, welche die Funktion $x^*(z)$ leistet, im Unendlichen nicht schlicht ist, sodaß die Umgebung des Punktes $z = \infty$ auf ein Windungsflächenstück der Fläche F^* abgebildet wird. Alsdann wenden wir folgendes Schlußverfahren an. Wir wählen einen endlichen Punkt a der z-Ebene, den wir dem unendlich fernen Punkt beliebig nahe nehmen können. Die Wahl des Punktes a soll jedoch der Bedingung unterliegen, daß die Funktion $x^*(z)$ die Umgebung dieses Punktes auf die z-Ebene schlicht abbildet oder, anders ausgedrückt, daß die Ableitung dieser Funktion in a einen von Null verschiedenen endlichen Wert hat. Wir denken uns nun mit den Bereichen Φ^* und Φ, die wir betrachten, eine Transformation durch reziproke Radien $\zeta = \frac{1}{z-a}$ vorgenommen, sodaß der Punkt a in ∞ transformiert wird. Dadurch gewinnen wir aus dem betrachteten Linienstück auf Ω ein Linienstück $\overline{\Omega}$, welches jetzt nach dem zuerst betrachteten allgemeinen Fall behandelt werden kann, weil der für Φ^* aufgestellte Quotient der beiden Differentiale erster Art nach der Überpflanzung auf $\overline{\Phi}^*$ die allgemeinen Voraussetzungen erfüllt. Wir finden so, daß $\overline{\Omega}$ ein Linienstück $\overline{\omega}$ von Bereichen $\overline{\Psi}$ stetig entspricht, welche durch Funktionen $\tau(\zeta)$ aus $\overline{\Phi}$ hervorgehen. Andererseits entspricht jedem Bereiche $\overline{\Psi}$ auf $\overline{\omega}$ ein Bereich Ψ auf ω vermöge einer linearen Substitution wegen des Unitätssatzes. Der Beweis, daß die Menge ω auch einen stetigen Zug im Gebiete der Gattung Ψ repräsentiert, erfordert demnach nur den Beweis, daß die erwähnte lineare Substitution sich stetig ändert. Dies aber ergibt sich daraus, daß die erwähnte lineare Substitution sich aus den Anfangsgliedern der Entwicklung der Funktion $\tau(z)$ für $z = \infty$ bestimmt, eine Entwicklung, welche von der Form

$$\tau(z) = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \cdots$$

sein muß, wobei B von 0 verschieden ist. Dabei ändern sich A, B, C, stetig mit Φ, da sie ja durch bestimmte Integrale aus dem sich stetig ändernden $\tau(z)$ dargestellt werden können. Die Funktion $t(z)$ wird nun als diejenige lineare Funktion von $\tau(z)$ zu bestimmen sein, welche sich im Unendlichen wie $z + ((0))$ verhält. Diese lineare Funktion ändert sich aber in der Tat stetig mit A, B, C.

Es ist wiederum von Interesse festzustellen, daß der nunmehr bewiesene Satz von der Einheit der Bereiche Ψ sich auf Grund des bewiesenen Fundamentaltheorems verhältnismäßig einfach mit Hilfe des *allgemeinen Konvergenzprinzips* beweisen läßt, aus der Einheit der Bereiche Φ direkt. In der Tat ergibt sich die Stetigkeit der Änderung von Ψ bei

Änderung von Φ ganz ähnlich, wie der Stetigkeitsnachweis der Abelschen Integrale erster Art auf Grund der Bemerkung, daß einerseits für die bei stetiger Änderung von Φ in Betracht kommenden Bereiche Ψ durch den Verzerrungssatz bestimmte Schranken geliefert werden, welche die Anwendung des allgemeinen Konvergenzsatzes unmittelbar auf $t(z)$ ermöglichen, daß andererseits der Unitätssatz gilt. Es erübrigt sich auf Grund früherer Bemerkungen und Entwicklungen hierauf noch näher einzugehen.

Es sei schließlich noch auf eine dritte Möglichkeit der Beweisführung hingewiesen, welche auf dem iterierenden Verfahren beruht. In der Tat kann man bemerken, daß die Konvergenzabschätzung für das iterierende Verfahren gleichmäßig für alle Φ der Überführungslinie Ω ausgeführt werden kann, woraus dann die stetige Abhängigkeit der Funktion $t(z)$ in Abhängigkeit von Φ folgt mit Rücksicht auf die entsprechende stetige Abhängigkeit der beim iterierenden Verfahren auftretenden Näherungsfunktionen in Abhängigkeit von Φ. Hiermit aber ist wieder ein Beweis für die Einheit der Bereiche Ψ gegeben.

Zweiter Teil.

Die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven: Das Hauptkreistheorem.

§ 8.

Problemstellung und Unitätssatz.

Es sei nunmehr (x, y) eine reelle algebraische Kurve mit mindestens einem wirklich vorhandenen reellen Zuge. Wird entsprechend der in „U. d. a. K. I." gewählten Bezeichnung mit F_s die zu $y(x)$ gehörende Riemannsche Fläche bezeichnet, welche in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrisch ist, so hat F_s entsprechend den reellen Zügen der algebraischen Kurve ein System geschlossener und voneinander getrennt verlaufender Symmetrielinien (Rückkehrschnitte), deren Anzahl höchstens $p + 1$ ist, wenn p das Geschlecht der Riemannschen Fläche F_s ist. Umgekehrt kann man sich auch eine in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrische Riemannsche Fläche F_s gegeben denken, für welche die zu betrachtende Symmetrie auf der Riemannschen Fläche mindestens einen festen Punkt und daher auch feste Linien aufweist, die sich notwendig als ein System voneinander völlig getrennt verlaufender geschlossener Rückkehrschnitte darstellen; es ist dann gemäß den von uns in „U. d. a. K. I." S. 184 ff. (Math. Ann. 67) gegebenen Entwicklungen stets möglich, zu F_s eine zugehörende irreduzible reelle algebraische Kurve (x, y) vermöge einer

Funktion $y(x)$ zu konstruieren, welche zur Fläche F_s eigentlich gehört und auf den genannten Symmetrielinien reelle Werte annimmt, woraus sich dann von selbst weiter ergibt, daß diese Funktion an keiner weiteren reellen Stelle der Fläche F_s einen reellen Wert annimmt. Wir bemerken, daß F_s durch das System der Symmetrielinien entweder in zwei zueinander symmetrische Hälften zerlegt wird (*orthosymmetrischer* Fall in Kleins Bezeichnungsweise) oder ein Ganzes bleibt (*diasymmetrischer* Fall).

Wir formulieren nun das folgende Problem

Uniformisierungsproblem: Es soll eine relativ zur Fläche F_s unverzweigte uniformisierende Variable $t \equiv t(x, y)$ bestimmt werden, welche die Eigenschaft besitzt, daß die von ihr auf den reellen Zügen der Kurve (x, y) oder, was dasselbe ist, auf den erwähnten Symmetrielinien der Fläche F_s angenommenen Werte reell sind. (Die Forderung, daß die Größe $t(x, y)$ linear-polymorph sein soll, wird nicht gestellt, wird sich jedoch als eine Folge der bereits angeführten Bedingungen herausstellen.)*)

Wir analysieren jetzt das gestellte Problem und suchen insbesondere bis zu der Einsicht zu gelangen, daß es nicht mehr als eine uniformisierende Variable mit den gewünschten Eigenschaften geben kann, und daß diese uniformisierende Variable notwendig *linear*-polymorph sein muß, sofern sie überhaupt existiert.

Zu dem Zwecke machen wir zunächst die Bemerkung, daß die Größe $t(x, y)$ auf Grund ihrer vorausgesetzten Eigenschaften an einer Stelle (x, y), die nicht einem reellen Zuge der Kurve (x, y) angehört, keinen reellen Wert haben kann. Wäre dies nämlich der Fall, so müßte $t(x, y)$, weil auf den reellen Zügen reell, aus Gründen der analytischen Symmetrie auch an dem zu (x, y) konjugierten Kurvenpunkte $(\bar{x}, \bar{y})$ denselben reellen Wert annehmen. Das widerspricht jedoch der Uniformisierungseigenschaft der Größe $t(x, y)$.

Es werde jetzt im orthosymmetrischen Falle die eine Hälfte der Fläche F_s, im diasymmetrischen Falle jedoch die längs den Symmetrielinien aufgeschnittene Fläche F_s mit $[F_s]$ bezeichnet. Die Fläche $[F_s]$ werde wie in „U. d. a. K. I." durch Q**) Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche $[F_0]$ verwandelt. Wird $[F_0]$ durch Vermittlung der Funktion $t(x, y)$ konform abgebildet, so ergibt sich als Bild von $[F_0]$ ein schlichtes einfach zusammenhängendes Flächenstück φ_0, welches die Achse des Reellen nicht durchsetzt, jedoch in $2Q$ getrennt liegenden Strecken an die Achse des Reellen anstößt. Betrachten wir diese konforme

*) Diese Formulierung habe ich bereits 1907 in meiner Gött. Nachr.-Note „über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven" gewählt.

**) Q ist im orthosymmetrischen Falle gleich p, im diasymmetrischen Falle gleich $2p$.

Abbildung in ihrem weiteren Verlaufe, wenn wir die Überschreitung der Q Querschnitte, jedoch noch nicht die Überschreitung der Symmetrielinien gestatten, so werden offenbar die verschiedenen sich ergebenden Zweige der Funktion $t(x, y)$ lauter verschiedene Bilder der Fläche $[F_0]$ entwerfen, welche in ihrer Gesamtheit sich notwendigerweise zu einem einfach zusammenhängenden Gebiet γ oberhalb der Achse des Reellen zusammenschließen, welches nunmehr offenbar nicht mehr nur in endlich vielen, sondern allgemein zu reden, in unendlich vielen getrennten Stücken an die Achse des Reellen anstößt. Gestatten wir nunmehr auch die Überschreitung der Symmetrielinien, so wird der Effekt aus Gründen der analytischen Symmetrie nur der sein, daß wir ein zu γ symmetrisches Gebiet $\bar{\gamma}$ erhalten, welches mit γ zusammen ein, allgemein zu reden, unendlich-vielfach zusammenhängendes Gebiet T bildet, das in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrisch ist und welches durch analytische Transformationen vermöge der Nebeneinanderlagerung von lauter Bildern eines Bereiches Φ entsteht, der seinerseits von φ_0 und seinem Spiegelbilde $\bar{\varphi}_0$ gebildet wird und Q analytische Randsubstitutionen aufweist. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, auf die erwähnten unendlich vielen Bilder des Bereiches Φ den Verzerrungssatz zur Anwendung zu bringen und zwar in folgender Gestalt: Wird für irgend einen der erwähnten Bildbereiche von Φ mit r die Summe der Längen der in ihm enthaltenen reellen Strecken bezeichnet, mit u der Umfang der vollständigen Begrenzung desselben Bereiches, so hat das Verhältnis $r : u$ einen Wert, der zwischen zwei von 0 und ∞ verschiedenen endlichen Schranken bleibt, die nicht von der Wahl des genannten Bildbereiches abhängen. Beachtet man nun, daß offenbar die Summe aller r, d. h. die Gesamtlänge der reellen Strecken, welche der Bereich T enthält, endlich ist, wenn man, was unwesentlich ist, von der einen durchs Unendliche gehend gedachten, in Φ selbst enthaltenen reellen Strecke absieht, so ergibt sich hieraus, daß die Summe aller u konvergent ist. Wenn man also den Bereich T nach und nach durch Näherungsbereiche ausschöpft, indem man immer mehr Bilder von Φ hinzunimmt, so wird der nicht reelle Begrenzungsteil des Näherungsbereiches eine Gesamtlänge besitzen, welche schließlich unendlich klein wird. Das heißt aber, daß der Bereich T die ganze Ebene ausfüllt und daß folglich exklusive von, allgemein zu reden, unendlich vielen diskreten reellen Punkten die einzelne analytische Randsubstitution des Bereiches Φ, welche offenbar T in sich selbst transformiert, eine reelle lineare Substitution ist, nämlich eine Substitution, welche die obere Halbebene eineindeutig in sich transformiert, wobei zu beachten ist, daß dieser Satz in der Tat ja nur voraussetzt, daß die Eindeutigkeit der Abbildung für alle nicht reellen Punkte der oberen Halb-

ebene feststeht. Es versteht sich nun von selbst, daß überhaupt alle relativen Zweige der Funktion $t(x, y)$, gleichgültig, ob man zu denselben lediglich durch Überschreitung von Querschnitten oder auch durch Zuhilfenahme von Überschreitungen der Symmetrielinien gelangt sei, durch reelle lineare Substitutionen verknüpft sind, da der Überschreitung einer Symmetrielinie in der x-Ebene ja stets nur eine Spiegelung an der Achse des Reellen entspricht. Auch ist jetzt klar, daß die Größe $t(x, y)$ durch ihre Eigenschaften bis auf eine lineare Substitution vollständig bestimmt ist, weil die Annahme der Existenz zweier verschiedener derartiger Größen, etwa t_1 und t_2, zu einer konformen Beziehung der beiden Ebenen aufeinander führen würde, bei welcher die obere Halbebene der einen Ebene eineindeutig konform auf die obere, eventuell untere, Halbebene der anderen Ebene bezogen wird.

Zum Schlusse dieses Paragraphen werde noch darauf hingewiesen, daß der Unitätsbeweis in dem Umfange, wie wir ihn hier geführt haben, sich einfacher führen läßt, insbesondere ohne Bezugnahme auf den allgemeinen Verzerrungssatz, wenn man die lineare Abhängigkeit der Zweige untereinander zunächst mit in die Voraussetzung aufnimmt. Ist dann der Existenzbeweis dieser uniformisierenden Variablen t^* geführt, so kann man die allgemeinere postulierte Größe t in Abhängigkeit von t^* durch das Cauchysche Integral darstellen, wobei man in der t^*-Ebene wegen der Linearität der Substitutionen die Endlichkeit des Verhältnisses $r : u$ unter alleiniger Bezugnahme auf den Verzerrungssatz für lineare Funktionen erkennt. Damit ist aber für unsere Abschätzungsmethode das Erforderliche erreicht. Es ergibt sich, daß t eine lineare Funktion von t^* sein muß.

§ 9.

Auffassung der gesuchten uniformisierenden Variablen als einer uniformisierenden Variablen des Schottkyschen Typus und damit zusammenhängender Existenzbeweis.

Die von uns zu bestimmende linear-polymorphe Uniformisierungstranszendente $t(x, y)$ läßt sich leicht als eine uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus, wie wir sie im ersten Teile vorliegender Abhandlung betrachtet haben, charakterisieren. Das ist zunächst unmittelbar einleuchtend in dem Falle, daß F_s eine orthosymmetrische Riemannsche Fläche ist. In der Tat brauchen wir in diesem Falle nur die beiden zueinander symmetrischen Hälften $[F_s]$, aufgeschnitten längs den p Querschnitten, längs den Symmetrielinien wieder zusammenzuheften, so haben wir wieder F_s, nunmehr aufgeschnitten längs p die Fläche F_s nicht zerstückenden Rückkehrschnitten, deren jeder einzelne zu sich selbst sym-

metrisch ist und die Symmetrielinien in zwei Punkten durchsetzt. Nennen wir diese $2p$-fach zusammenhängende Fläche f_0 und denken uns zu f_0 die zugehörende uniformisierende Variable t des Schottkyschen Typus nach der im ersten Teile entwickelten Methode bestimmt, so läßt sich nun von dieser uniformisierenden Variablen zeigen, daß die Werte, welche dieselbe auf den Symmetrielinien annimmt, sämtlich auf einem und demselben Kreise der t-Ebene liegen, welcher Kreis vermöge einer linearen Transformation in die Achse des Rellen verwandelt werden kann.

Der Beweis wird folgendermaßen geführt. Man denke sich neben der in der angegebenen Weise bestimmten Funktion $t(x, y)$ die Funktion $t'(x, y) \equiv \bar{t}(\bar{x}, \bar{y})$ gebildet, indem man mit $\bar{t}(\bar{x}, \bar{y})$ den zu $t(\bar{x}, \bar{y})$ konjugiert-komplexen Wert bezeichnet. Alsdann ist unmittelbar einleuchtend, daß die Größe $t'(x, y)$ ebenso wie $t(x, y)$ eine zu f_0 gehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus darstellt. Zwei derartige uniformisierende Variable müssen nun gemäß dem für die uniformisierenden Variablen des Schottkyschen Typus geltenden Unitätssatze durch eine lineare Substitution ineinander übergehen. Es seien jetzt t_1, t_2, t_3, t_4 irgend vier Werte, welche die Größe t auf dem Symmetrieliniensystem der Fläche F_s annimmt, alsdann sind $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{t}_4$ die entsprechenden Werte, welche die Funktion t' auf dem Symmetrieliniensystem an denselben Punkten annimmt. Diese vier Werte gehen nun aus den erstgenannten vier Werten vermöge der oben erwähnten linearen Substitution hervor. Dabei bleibt das Doppelverhältnis ungeändert. Dieses Doppelverhältnis geht andererseits in seinen konjugierten Wert über. Diesen beiden Bedingungen wird nur genügt, wenn das Doppelverhältnis reell ist, wenn also die vier Punkte t_1, t_2, t_3, t_4 auf einem Kreise liegen. Hiermit ist aber gezeigt, daß alle von $t(x, y)$ auf den Symmetrielinien angenommenen Werte auf einem und demselben Kreise liegen, da man zu drei festgewählten Werten t_1, t_2, t_3, welche den Kreis bestimmen, jeden beliebigen weiteren auf einer Symmetrielinie angenommenen Wert als den Wert t_4 wählen kann.

Sei jetzt die Fläche F_s *diasymmetrisch*. In diesem Falle ist es ebenfalls möglich, die Größe t als eine zu F_s gehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus zu charakterisieren. Dazu sind allerdings die weiter unten in § 11 gegebenen Entwicklungen erforderlich. Einfacher und für den gegenwärtigen Zweck des Existenzbeweises ausreichend ist es, von der Fläche F_s überzugehen zu einer relativ zu F_s zweiblättrigen Überlagerungsfläche $\bar{F}_s$, welche aus F_s entsteht, indem man die Fläche $[F_s]$ in zwei kongruent übereinander liegenden Exemplaren denkt und diese nun längs den sämtlichen Symmetrielinien über Kreuz zu einer einzigen Fläche, eben der Fläche $\bar{F}_s$ zusammenheftet. Diese Fläche $\bar{F}_s$ ist gemäß ihrer Konstruktion orthosymmetrisch, indem sie eben aus zwei zu-

einander symmetrischen Hälften hergestellt ist. Diese orthosymmetrische Fläche ist vom Geschlecht $2p$. Die Anzahl ihrer Symmetrielinien (reelle Züge der zugehörenden reellen algebraischen Kurve) ist doppelt so groß als die entsprechende Anzahl bei F_s. Die Fläche $\bar{F}_s$ ist gemäß dem Schottkyschen Typus dadurch aufgeschnitten zu denken, daß man die oben S. 99 erwähnten $Q = 2p$ Querschnitte in dem benutzten zweiten Exemplare $[F_s]$ symmetrisch wiederholt.

§ 10.

Selbständiger Kontinuitätsbeweis des Hauptkreistheorems.

Es ist wegen verschiedener dabei zur Geltung kommender Gesichtspunkte von Interesse, auch einen selbständigen Beweis des Hauptkreistheorems mittels Kontinuitätsmethode zu geben.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Fläche $[F_0]$, d. i. im orthosymmetrischen Falle*) die längs p Querschnitten aufgeschnittene Fläche $[F_s]$, konform auf einen Bereich φ_0 mit p regulären Randsubstitutionen und $2p$ reellen Begrenzungsstücken abgebildet, welcher ganz oberhalb der Achse des Reellen liegt. Eine solche Abbildung erhalten wir in der wünschenswerten Form, indem wir uns den Bereich $[F_0]$ über seine $2p$ Querschnittseiten der Begrenzung hinaus ein Stück fortgesetzt denken durch Ansetzung von $2p$ bandartigen Flächenstreifen, welche sich ebenfalls bis an die Symmetrielinien heranerstrecken. Die so erweiterte einfach zusammenhängende Fläche $[F_0]$ möge mit $[F_0]'$ bezeichnet werden. Nun werde der einfach zusammenhängende Bereich $[F_0]'$ eineindeutig konform auf die obere Halbebene abgebildet. Dabei wird $[F_0]$ auf einen Bereich φ_0 abgebildet, welcher zusammen mit seinem Spiegelbilde $\bar{\varphi}_0$ einen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich Φ_s mit p regulären analytischen Randsubstitutionen bildet. Es gilt, den Nachweis zu führen, daß der Bereich Φ_s eineindeutig konform auf einen Bereich Ψ_s derselben Gattung wie Φ_s abgebildet werden kann, für welchen jedoch die erwähnten p regulären Randsubstitutionen reelle *lineare*, nicht mehr nur analytische Substitutionen sind. Sowohl bei Φ_s als auch bei Ψ_s werden wir zweckmäßig die Annahme machen, daß der unendlich ferne Punkt dem Innern des Bereiches angehört, und wir können uns auch vorstellen, daß für die zu bestimmende Abbildung, bei welcher natürlich die zu Φ_s gehörenden Stücke der Achse des Reellen in die entsprechenden Stücke des Bereiches Ψ_s übergehen sollen, der unendlich ferne Punkt sich selbst entsprechen soll.

Bereiche von der Gattung Ψ_s erhalten wir sofort, wenn wir $2p$ die

*) Den diasymmetrischen Fall können wir nach der vorher geschilderten Methode unter den orthosymmetrischen Fall subsumieren.

Achse des Reellen orthogonal schneidende Kreise, die sich gegenseitig ausschließen, durch reelle hyperbolische Substitutionen irgendwie aufeinander beziehen, wobei nur in bezug auf die Paarung der Kreise der Bedingung zu genügen ist, daß dieselbe in topologischer Beziehung der bei Φ_s bestehenden Paarung entspricht, sodaß bei Durchlaufung der Begrenzung der oberen Hälfte von Φ_s und Ψ_s entsprechende Stücke in gleicher Weise sich folgen.

Wir bemerken, wenn wir jetzt die Kette der den Kontinuitätsbeweis im allgemeineren Falle des ersten Teiles der Abhandlung bildenden Entwicklungen der Reihe nach durchgehen, zunächst, daß die Bereiche der Gattung Φ_s ein *einheitliches Kontinuum* bilden, sofern wir eben nur solche Bereiche als Bereiche Φ_s in Betracht ziehen, bei welchen auch die oben erwähnte Reihenfolge in der Paarung dieselbe ist. Dieser Nachweis der Einheit der Bereiche Φ_s vollzieht sich ganz analog dem obigen Beweise; nur wird man, was nicht die geringste Schwierigkeit bietet, bei allen Deformationen stets die Symmetrie im Auge zu behalten haben. Betrachten wir andererseits die Bereiche Ψ_s, so können wir zu Ψ_s zunächst die entsprechenden p Abelschen Integrale erster Art bilden, in dem wir von den Potentialen $u_1, \cdots, u_p$ ausgehen, welche in Φ_s eindeutig sind und wegen ihrer Unität aus Gründen der Symmetrie offenbar an spiegelbildlich symmetrischen Punkten des Bereiches Φ_s denselben Wert annehmen. Für diese Potentiale ist daher längs sämtlichen dem Bereiche Φ_s angehörenden Stücken der Achse des Reellen die Ableitung in Richtung der Normalen zu dieser Achse gleich Null, woraus folgt, daß die zugehörenden konjugierten Potentiale $v_1, \cdots, v_p$ längs jedes derartigen Stückes konstant sind und daß die p linear unabhängen Integralfunktionen $w_\alpha = u_\alpha + i v_\alpha$ p reelle Abelsche Differentiale erster Art dw_α liefern, welche sich bei stetiger Änderung von Φ_s ebenfalls stetig ändern.

Wir haben uns nun weiter der Existenz einer $(3p-3)$-parametrigen *Normalfigur* zu vergewissern. Zu einer solchen gelangen wir folgendermaßen. Wir bemerken vorab, daß das allgemeinste zu Φ_s gehörende reelle Abelsche Differential erster Art eine reelle lineare Kombination der obengenannten p Differentiale dw_α ist. Dies ergibt sich durch Betrachtung der Periodizitätsmoduln aus dem Umstande, daß für ein solches Differential dw notwendigerweise der reelle Teil von w eine Funktion sein muß, die längs den reellen Stücken von Φ_s die normale Ableitung Null hat und daher gemäß dem Spiegelungsprinzip für Potentialfunktionen in Φ_s eindeutig sein muß. Ist sie doch in jeder einzelnen Hälfte von Φ_s jedenfalls eindeutig, weil eine derartige Hälfte ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Nun ergibt sich der dem Brill-Noetherschen (S. 74) analoge Satz, daß die *reellen* Differentiale erster Art nicht eine allen gemeinschaftliche Nullstelle

besitzen können, und daraus folgern wir nach Analogie eines oben (S. 75) gegebenen Beweises, daß das *allgemeine reelle Differential dw erster Art nur einfache Nullstellen* haben wird, welche teils einzeln auftreten und dann reell sind, teils konjugiert angeordnet sind, eine Unterscheidung, auf welche es jedoch für unsere Zwecke nicht näher ankommt. Die Normalfigur wird nun gefunden, indem man ein reelles dw mit nur einfachen Nullstellen zu Φ_s bestimmt und die Normierung von w in Abhängigkeit von Φ_s dadurch gibt, daß man vorschreibt, der imaginäre Teil von w solle im Unendlichen, also auf dem ganzen betreffenden Stück der Achse des Reellen verschwinden und gegenüber den analytischen Randsubstitutionen des Bereiches Φ_s in seinem reellen Teile feste Periodizitäsmoduln bewahren, schließlich solle der reelle Teil von w in einer Nullstelle von dw verschwinden. Im übrigen hat man sich den Bereich Φ_s dabei, um einen Zweig von w zu isolieren, längs sämtlichen Stücken der Achse des Reellen mit Ausnahme des durchs Unendliche gehenden aufgeschnitten vorzustellen, sodaß dadurch der Bereich Φ_s in einen einfach zusammenhängenden, in bezug auf die Achse zu sich selbst symmetrischen Bereich verwandelt wird. Das Bild dieses einfach zusammenhängenden Bereiches, welches sich bei der konformen Abbildung durch das normierte Integral erster Art w ergibt, ist die gewünschte $(3p-3)$-parametrige zweckdienliche Normalfigur. Als frei veränderliche Bestimmungsstücke dieser Figur sind die $2p-3$ Bestimmungsstücke für die Lage der Windungspunkte der Normalfigur einerseits und andererseits p Periodizitätsmoduln des imaginären Teils zu bezeichnen, deren unabhängige Wahl nach folgender Regel getroffen werden kann. Man denke sich $[F_s]$, wie oben näher bezeichnet, durch p Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt. Man hat dann einerseits die Wertdifferenzen längs diesen p Querschnitten zu geben, welche jedoch entsprechend den σ vorhandenen geschlossenen Begrenzungslinien von $[F_s]$ im ganzen $\sigma-1$ Bedingungen unterworfen sind, für deren Erfüllung man beachte, daß $p-(\sigma-1)$ eine gerade Zahl $2p'$ ist, indem p' die Anzahl der innerhalb $[F_s]$ möglichen getrennten die Fläche $[F_s]$ nicht zerfällenden Rückkehrschnittpaare ist, längs welchen die $2p'$ Periodizitätsmoduln frei gegeben werden können. Abgesehen von den $2p'$ Größen sind die den Übergang von einer Symmetrielinie zur andern entsprechenden Wertdifferenzen des imaginären Teiles zu geben, was noch $\sigma-1$ weitere Bestimmungsstücke der Normalfigur sind.

Es dürfte überflüssig sein, noch weiter auf den Kontinuitätsbeweis des Hauptkreistheorems einzugehen. Erwähnt sei nur noch, daß der Nachweis der analytischen Abhängigkeit zwischen den Konstanten des Bereiches Ψ_s einerseits und den Konstanten der Normalfigur andererseits im vorliegenden Falle durch den Hinweis auf gewisse von Schottky gebildete

Reihen*) erledigt wird, welche in dem hier betrachteten Falle von Bereichen Ψ_s tatsächlich auch noch bei komplexer Variation der Konstanten der linearen Randsubstitution wegen des Erfülltseins der Schottkyschen Bedingung der Konvergenz der Radiensumme konvergieren und auch direkte Darstellungen für die Abelschen Integrale erster Art geben, was mit Hilfe der Poincaréschen Reihen nicht möglich ist.

Es mag weiter noch besonders darauf hingewiesen werden, wie auch hier die Einheit der symmetrischen Riemannschen Flächen eines bestimmten Typus sich als die Einheit der Bereiche Φ_s wiederspiegelt. Dabei ist jedoch hervorzuheben, daß hier noch das Analogon für den Fall der diasymmetrischen Riemannschen Flächen fehlt, die wir in diesem Paragraphen vermöge der in § 9 entwickelten Vorstellung unter die orthosymmetrischen Flächen subsumiert haben. Diese Zurückführung kann für die Frage der Einheit dieser Flächen nicht mehr herangezogen werden. Vielmehr ist eine selbständige Betrachtung erforderlich, deren Wesen in der Lösung eines bestimmten Analysis-situs-Problems liegt. In der Tat prägt sich in den Bereichen der Gattung Φ_s der diasymmetrische Typus aus, wenn die Paarung der Randkurven mindestens für ein Paar mit der Modifikation vorgenommen gedacht wird, daß nun nicht mehr bei der analytischen Zuordnung die obere Hälfte des Kurvenbogens wieder der oberen Hälfte und die untere der unteren entspricht, sondern umgekehrt. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man sich einem derartig gebildeten Bereiche Φ_s eine reelle algebraische Gleichung zugeordnet denkt, nach der allgemeinen Methode zwei Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ bildend, die in Φ_s eindeutig sind, gegenüber den Randsubstitutionen ungeändert bleiben und auf den reellen Achsenstücken reell sind, die ferner die Eigenschaft haben, daß (x, y) ein dem Bereiche Φ_s eigentlich zugehörendes irreduzibles algebraisches Gebilde ist. Indem man mit $x(z)$ den Bereich Φ_s konform abbildet, wird Φ_s in eine zu sich selbst symmetrische Riemannsche Fläche F_s übergeführt, welche Symmetrielinien besitzt und nun durch dieselben offenbar nicht zerfällt, hingegen in zwei zueinander symmetrisch einfach zusammenhängende Stücke zerlegt wird, wenn man zu den Symmetrielinien p zu sich selbst symmetrische, das Symmetrieliniensystem je in zwei Punkten schneidende geeignete Rückkehrschnitte (entsprechend den Randkurven von Φ_s) hinzunimmt, welche, wie auch die Figur eines Φ_s zeigt, für sich genommen keinen Zerfall der Fläche F_s bewirken. Wir sehen auf diese Weise im Zusammenhange mit den Kontinuitätsideen eine ganz bestimmte Frage entstehen, nämlich die im folgenden Paragraphen behandelte *Frage der*

---

*) F. Schottky: „Über eine spezielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Substitution ihres Arguments ungeändert bleibt." J. f. Math. 101, S. 227 ff.

symmetrischen Aufschneidung der symmetrischen, insbesondere auch der diasymmetrischen Riemannschen Fläche. Auch die Frage nach einer durch ein reelles Abelsches Integral zu definierenden $(3p-3)$-parametrigen Normalfigur der diasymmetrischen Flächen erledigt sich dann analog wie oben bei den orthosymmetrischen Flächen. Natürlich ist a posteriori die Figur Ψ_s selbst mit der linearen Ränderzuordnung eine $(3p-3)$-parametrige Normalfigur.

§ 11.

Die symmetrische Aufschneidung der symmetrischen Riemannschen Flächen und damit zusammenhängende neue Formulierung des Hauptkreistheorems.

Es soll in diesem Paragraphen der folgende Satz begründet werden.

Satz: Jede symmetrische Riemannsche Fläche F_s mit Symmetrielinien kann, wenn p das Geschlecht dieser Fläche ist, durch p die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte, deren jeder einzelne das Symmetrieliniensystem an genau zwei Stellen durchkreuzt, in eine $2p$-fach zusammenhängende Fläche verwandelt werden.

Zusatz: Diese $2p$-fach zusammenhängende Fläche zerfällt in zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften, wenn man die Fläche F_s außer längs den erwähnten p Rückkehrschnitten auch noch längs sämtlichen Symmetrielinien aufschneidet.

Bevor wir an den Beweis der Existenz der p Rückkehrschnitte gehen, seien vorab einige Bemerkungen gemacht. Zunächst erkennt man unmittelbar, daß jeder auf der Fläche F_s gezogene, zu sich selbst symmetrische Rückkehrschnitt, welcher eine Symmetrielinie in einem Punkte kreuzt, dieselbe oder eine andere Symmetrielinie notwendig noch einmal treffen muß und auch nicht mehr als einmal. Die beiden Treffpunkte sind notwendig Punkte, in welchen der Rückkehrschnitt die Symmetrielinie durchschneidet.

Nehmen wir an, daß es uns gelungen sei, p zu sich selbst symmetrische Rückkehrschnitte der in dem Satze geforderten Art zu finden, so folgern wir zunächst die Richtigkeit des Zusatzes.

Durch das vollständige System der Symmetrielinien wird die Fläche F_s, wenn wir etwa den diasymmetrischen Fall betrachten, in eine $2p$-fach zusammenhängende Fläche $[F_s]$ verwandelt. Das Ausziehen der p Rückkehrschnitte stellt sich in dieser Fläche $[F_s]$ als ein Ziehen von $2p$ Querschnitten dar. Dabei muß jedenfalls die Fläche $[F_s]$ in Stücke zerfallen. Nehmen wir jetzt an, daß die Anzahl der Stücke, in welche $[F_s]$ zerfällt, größer als 2 ist, so unterscheiden wir paarweise zueinander symmetrische Stücke und zu sich selbst symmetrische Stücke. Denken wir uns jetzt

diese Stücke, wie sie liegen, längs den Symmetrielinien wieder zusammengeheftet, so wird notwendigerweise jedes zu sich selbst symmetrische Stück und jedes Paar zueinander symmetrischer Stücke nach der Heftung je ein besonderes Flächenstück liefern. Diese Flächenstücke stellen nun aber das Resultat der Aufschneidung der Fläche F_s durch die p Rückkehrschnitte allein (ohne Hinzunahme der Symmetrielinien) dar und bilden also in Wahrheit ein in sich zusammenhängendes Flächenstück. Demnach zerfällt $[F_s]$ durch die $2p$ Querschnitte genau in zwei zueinander symmetrische Flächenstücke und diese sind dann selbstverständlich einfach zusammenhängend.

Was nun den Beweis des *Satzes* selbst anbetrifft, nämlich den Beweis der Existenz der p Rückkehrschnitte, so versteht sich derselbe für den Fall, daß die Fläche F_s *orthosymmetrisch* ist, also durch das vollständige System der Symmetrielinien in zwei zueinander symmetrische Hälften zerlegt wird, von selbst, da man nur nötig hat, die eine Hälfte, welche notwendig den Zusammenhang $p+1$ besitzt, durch p Querschnitte einfach zusammenhängend zu machen, wie das auch in Math. Ann. 67, S. 203 und oben S. 99 geschehen ist, und die symmetrische Hälfte in symmetrischer Weise aufzuschneiden.

Eine Schwierigkeit bietet lediglich der Fall, in welchem die Fläche F_s *diasymmetrisch* ist, d. h. durch das System der Symmetrielinien noch nicht in Stücke zerlegt wird. Ist σ die Anzahl der Symmetrielinien, so ist jedenfalls $\sigma \leq p$.*)

Die Fläche $[F_s]$ ist dann $2p$-fach zusammenhängend und besitzt 2σ Begrenzungslinien. Nun wählen wir in $[F_s]$ einen beliebigen Punkt P. Mit P' werde der zu P spiegelbildlich symmetrische Punkt bezeichnet. Wir konstruieren innerhalb $[F_s]$ eine sich selbst nicht treffende Verbindungslinie l von P nach P', darauf die zu l spiegelbildlich symmetrische Verbindungslinie l' von P' nach P. Indem wir uns vorstellen, daß wir die Linie l und gleichzeitig die Linie l' durchlaufen, ausgehend von P bzw. P' und darauf achtend, daß wir in demselben Moment immer in spiegelbildlich symmetrischen Punkten sind, unterscheiden wir zwei Fälle: es kann erstens sein, daß die Linie l mit l' keinen Punkt gemeinschaftlich hat außer P und P'; in diesem Falle ist die aus l und l' zusammengesetzte Linie ein Rückkehrschnitt R. Es kann zweitens sein, daß die Linien l und l' außer P und P' noch andere Punkte gemeinschaftlich haben.

---

*) σ kann jeden ganzzahligen positiven Wert $\leq p$ haben, wie man sich am Beispiele der symmetrischen hyperelliptischen Fläche mit teils reellen, teils konjugiert-imaginären Windungspunkten sofort klarmachen kann. σ kann nicht größer als p sein, weil dann eben σ die Fläche nicht zerstückende Symmetrielinien vorhanden wären. (Klein.)

In diesem Falle werden wir zunächst solche gemeinschaftliche Punkte, in welchen nicht ein Durchschneiden der beiden Linien l und l' stattfindet, dadurch beseitigen können, daß wir sie an den betreffenden Stellen durch eine kleine Deformation voneinander entfernen, eine Operation, die wir immer an spiegelbildlich symmetrischen Punkten zugleich und in symmetrischer Weise vornehmen. Sind jedoch S und S' zwei zueinander symmetrische Schnittpunkte der beiden Linien l und l', so beseitigen wir dieselben folgendermaßen. Wir beachten, daß die Linie l durch die Punkte S und S' in drei Stücke l_1, l_2, l_3 zerlegt wird und daß entsprechend l' in die zu l_1, l_2, l_3 bzw. spiegelbildlich symmetrischen Stücke l_1', l_2', l_3' zerlegt wird. Wir lassen nun an Stelle der Linien $l_1 + l_2 + l_3$ die neue Linie $l_1 + l_2' + l_3$ als Verbindungslinien von P nach P' treten. Bezeichnen wir jetzt diese Verbindungslinien mit l, die zu l spiegelbildlich symmetrische $l_1' + l_2 + l_3'$ mit l', so besitzen die neuen Linien l und l' ein Paar von Schnittpunkten weniger als die alten Linien l und l'. Offenbar können wir so durch einen endlichen Prozeß zu zwei Linien l und l' gelangen, welche sich nicht mehr schneiden und demnach, nach Beseitigung der jetzt allerdings vorhandenen Treffpunkte gemäß obiger Vorschrift, zusammen einen Rückkehrschnitt R bilden. Durch den Rückkehrschnitt R kann nun die Fläche $[F_s]$ möglicherweise in zwei zueinander symmetrische Stücke zerfallen, deren Einzelnes dann notwendig den Zusammenhang $p + 1$ haben wird. Dieser Zerfall tritt sicher dann ein, wenn $\sigma = p$ ist. Ist jedoch $\sigma < p$, so kann man an Stelle des gefundenen Rückkehrschnittes R sofort einen anderen treten lassen, der ebenso wie R zu sich selbst symmetrisch ist, ferner keine Symmetrielinie trifft und keinen Zerfall der Fläche $[F_s]$ bewirkt. Zu dem Zwecke mögen etwa mit f und f' die erwähnten beiden Hälften bezeichnet werden. Man kann dann, da der Zusammenhang der Fläche f größer ist als die Anzahl der Begrenzungslinien dieser Fläche, einen durch das Innere von f gehenden Querschnitt Q konstruieren, der den Punkt P mit dem Punkte P' verbindet und durch welchen die Fläche f nicht zerfällt. Nimmt man zu Q den spiegelbildlich symmetrischen Querschnitt Q' hinzu, der ganz innerhalb f' verläuft, so bilden Q und Q' zusammen auf F einen zu sich selbst symmetrischen Rückkehrschnitt, durch welchen nunmehr die Fläche F offenbar nicht in Stücke zerlegt wird, sondern in eine neue zu sich selbst symmetrische $2p$-fach zusammenhängende Fläche $[\overline{F}_s]$ verwandelt wird.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß es möglich ist, in $[F_s]$ einen zu sich selbst symmetrischen, die Fläche $[F_s]$ nicht zerstückenden, sondern in eine ebenfalls $2p$-fach zusammenhängende, zu sich selbst symmetrische Fläche $[\overline{F}_s]$ mit $2\sigma + 2$ Begrenzungslinien verwandelnden Rückkehrschnitt R zu konstruieren. Indem wir das vorstehend entwickelte Kon-

struktionsverfahren wiederholt anwenden, zunächst auf die Fläche $[\bar{F}_s]$, darauf auf die neugewonnene Fläche $[\bar{\bar{F}}_s]$ usw., gelangen wir zur Konstruktion von $p+1-\sigma=\varrho$ voneinander getrennten Rückkehrschnitten in $[F_s]$, durch welche die Fläche $[F_s]$ in zwei zueinander symmetrische $(p+1)$-fach zusammenhängende Hälften f und f' zerlegt wird.*)

Nunmehr kann man in folgender Weise zu p zu sich selbst symmetrischen Rückkehrschnitten gelangen, deren jeder das System der Symmetrielinien in zwei Punkten schneidet.

Wir zerlegen die Fläche f durch $p+\varrho$ ($\varrho = p+1-\sigma =$ Anzahl der gefundenen Rückkehrschnitte R) sich gegenseitig nicht treffende Querschnitte in $\varrho+1$ einfach zusammenhängende Stücke und zwar in der Weise, daß wir zunächst die σ Symmetrielinien durch $\sigma-1$ in f verlaufende Querschnitte miteinander in Verbindung bringen, darauf jeden der Rückkehrschnitte R durch zwei Querschnitte mit den Symmetrielinien verbinden, wobei wir noch bei jedem einzelnen Rückkehrschnitt R die Einmündungspunkte der zugehörenden beiden Querschnitte so wählen, daß die spiegelbildlich symmetrischen Punkte dieser Einmündungsstellen einerseits und die genannten Einmündungsstellen selbst andererseits auf dem Rückkehrschnitt voneinander nicht separiert werden, was z. B. dadurch erreicht wird, daß die beiden Einmündungsstellen hinreichend nahe beieinander gewählt werden. Nachdem f und symmetrisch f' in dieser Weise aufgeschnitten sind, stellen wir nunmehr auf den Rückkehrschnitten R die Verbindung zwischen f und f' wieder her und zwar für jeden Rückkehrschnitt nur längs dem Stück zwischen den Einmündungsstellen und dem dazu symmetrischen Stücke. Auf diese Weise sind an Stelle von f und f' zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Flächen getreten, welche durch $2p$ paarweise zueinander symmetrische Querschnitte in $[F_s]$ entstehen, deren je zwei zusammengehörende sich auf F_s zu einem Rückkehrschnitt der in unserem zu beweisenden Satze geforderten Art zusammenschließen.

Wir erwähnen zum Schluß dieses Abschnittes noch die folgende nunmehr gleichmäßig für den orthosymmetrischen und diasymmetrischen Fall geltende Formulierung des Hauptkreistheorems.

Zweite Formulierung des Hauptkreistheorems: Jede reelle algebraische Kurve (x, y) vom Geschlecht p mit mindestens einem reellen Zuge läßt

*) Diese ϱ Rückkehrschnitte, deren Existenz man am Beispiel der hyperelliptischen Flächen sofort feststellen kann, kommen auch bei Klein und Weichhold (Zitate im „U. d. a. K. I" S. 184 Math. Ann. 67) vor, doch wird ein einwandfreier Existenzbeweis nicht gegeben. Die für das Hauptkreistheorem wichtige durch unsern Satz S. 107 geforderte Aufschneidung ist von Klein und Weichold noch nicht betrachtet worden.

sich durch reelle automorphe Funktionen mit p reellen Gruppenerzeugenden uniformisieren, welch letztere geometrisch durch $2p$ die Achse des Reellen orthogonal schneidende, sich gegenseitig nicht treffende Kreise in paarweiser Zuordnung definiert werden können. Je nachdem die zu $y(x)$ gehörende Riemannsche Fläche diasymmetrisch oder orthosymmetrisch ist, befinden sich unter den genannten p erzeugenden reellen Substitutionen solche, welche die obere und untere Halbebene vertauschen, oder nicht.

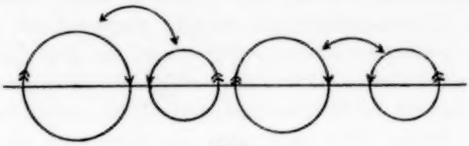


Fig. 5.

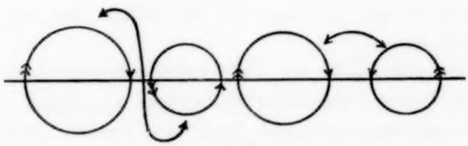


Fig. 6.

Durch die beistehenden Figuren, in welchen übrigens die Reihenfolge in der Paarung der Kreise noch auf alle möglichen Weisen variiert zu denken ist, wird der Typus der erwähnten Fundamentalbereiche schematisch erläutert, wobei man bemerke, daß es in der Tat keine Schwierigkeit hat, die Begrenzung als aus Vollkreisen gebildet vorzustellen, weil anderenfalls die betreffenden über den Durchschnittspunkten mit der Achse des Reellen konstruierten Vollkreise sofort statt der nicht kreisförmigen Begrenzungslinien gesetzt werden können.

§ 12.

Die Komposition irgendwelcher Hauptkreisgruppen.

Wir haben in „U. d. a. K. I.“ die allgemeinsten auf der Achse des Reellen diskontinuierlichen Hauptkreisgruppen aufgestellt, die aus der Uniformisierung reeller algebraischer Kurven entspringen und aus endlich vielen Erzeugenden hervorgehen. Dieser allgemeinen Auffassung gemäß ergibt sich eine gewisse Erweiterung des Hauptkreistheorems, auf die wir jedoch an dieser Stelle nicht näher eingehen wollen. In jedem orthosymmetrischen oder diasymmetrischen Einzelfalle ist es dabei übrigens möglich, einen in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrischen Fundamentalbereich aufzustellen, zu dessen Herstellung die Entwicklungen

des vorangehenden Paragraphen die Grundlage bilden. Wir können nun den Gedanken der Uniformisierung reeller algebraischer Kurven noch in der Weise weiterführen, daß wir auch die Komposition von verschiedenen Hauptkreisgruppen in Betracht ziehen, was nach folgender Regel zu geschehen hat. Man nehme jeder Hauptkreisgruppe entsprechend einen Kreis in der Ebene an, der Bedingung gemäß, daß die Gesamtheit dieser Kreise sich gegenseitig ausschließen, und nun denke man sich in den so bestimmten mehrfach zusammenhängenden, den unendlich fernen Punkt enthaltenden Bereich β ein Fundamentalpolygon dadurch eingezeichnet, daß man jedem einzelnen der genannten Kreise entsprechend die eine Hälfte der beiden zueinander symmetrischen Hälften des bezüglichen Hauptkreispolygons in β konstruiert. Jetzt ist das Fundamentalpolygon mit seinen sämtlichen Randsubstitutionen fertig, wenn man *auch die Spiegelung an den genannten Hauptkreisen als Erzeugende* einführt. Diesem Fundamentalpolygon entspricht dann allerdings nur erst die eine Hälfte des zugeordneten algebraischen Gebildes.

Hiermit ist eine *Kette von Uniformisierungsproblemen* bezeichnet, in welchen das in diesem Abschnitt ausführlicher dargelegte oben formulierte Hauptkreistheorem einerseits und der Schottkysche Uniformisierungsfall andererseits, bei welchem der halbe Fundamentalbereich einfach von $p+1$ Vollkreisen begrenzt wird und die Erzeugenden die $p+1$ Spiegelungen an diesen Kreisen sind, als äußerste und jedenfalls auch interessanteste Glieder erscheinen. Allerdings ist der erwähnte Schottkysche Fall auf einen bestimmten orthosymmetrischen Typus Riemannscher Flächen F_z beschränkt, der durch die Bedingung definiert ist, daß die Anzahl der reellen Züge gleich $p+1$ ist, unter p das Geschlecht der Riemannschen Fläche F_z verstanden.

Dritter Teil.

Die Uniformisierung durch allgemeine kanonische uniformisierende Variable.

§ 13.

Die Uniformisierung durch automorphe Funktionen mit p Paaren parabolischer Erzeugenden. (Ineinanderschiebung von Parallelogrammen).

Der Fall, daß p Parallelogramme mit $2p$ parabolischen Substitutionen (Fig. 7a) ineinandergeschoben werden, bietet der Erledigung unter Zugrundelegung des von mir in Math. Ann. 69, 72 („U. d. a. K. II und III“) gelieferten Unitätsbeweises keine neue Schwierigkeit dar. Als Bereiche Φ mit regulärer analytischer Ränderzuordnung haben wir jetzt zu betrachten

die alten im ersten Teile angeführten Φ; jedoch hat man sich für jedes einzelne Paar von Randkurven (entsprechend der Aufschneidung der Riemannschen Fläche F durch p Rückkehrschnitt*paare*) eine Verbindungslinie Q hergestellt zu denken, die zwei zugeordnete Randpunkte verbindet, auf deren durchgängig regulären Charakter es übrigens nicht weiter ankommt (vgl. Fig. 7b).

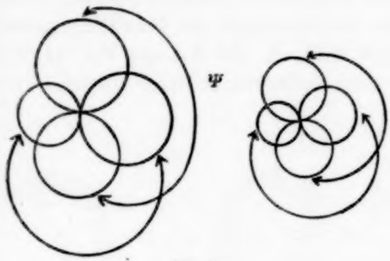


Fig. 7a.

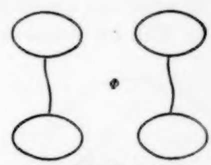


Fig. 7b.

Man erkennt nun unmittelbar, daß man es in der Hand hat, die Überführung zweier Φ-Bereiche stets so zu machen, daß dabei auch noch die Verbindungslinien Q in die korrespondierenden Verbindungslinien übergehen. Dieser Tatsache entspricht in dem Kontinuum der Riemannschen Flächen F vom Geschlecht p der Satz, daß die mit p Rückkehrschnittpaaren aufgeschnittenen gleichvielblätterigen Riemannschen Flächen vom Geschlecht p ein Kontinuum bilden. Doch wird dieser Satz als solcher von uns nicht gebraucht. Er könnte aus der genannten auf die Φ sich beziehenden Tatsache jedoch gefolgert werden.

Die Bereiche Ψ, d. s. die jetzt zu betrachtenden Fundamentalbereiche mit linearer Ränderzuordnung, werden $(6p-6)$-parametrig normiert, indem man von den p Fixpunkten einen nach 0, einen nach ∞ bringt und für letzteren noch festsetzt, daß eine der parabolischen Substitutionen die Form $z' = z + 1$ haben soll.

Die Durchführung des Kontinuitätsbeweises selbst bedarf gar keiner neuen Bemerkung, wenn man wieder mit dem Auswahlverfahren vorgeht. Will man dies nicht, so ist noch besonders zu erläutern, wie im vorliegenden Falle die Existenz einer oberen Schranke für die in Ψ zu definierenden Potentiale $u_1, \cdots, u_p$ folgt. Der Nachweis der Stetigkeit dieser Potentiale bietet jedoch dann keine neue Schwierigkeit, da nach dem Endlichkeitsbeweise auch die Endlichkeit der Ableitungen allgemein feststeht und deswegen die jetzt auftretenden Begrenzungsecken der Ψ keine Schwierigkeiten machen.

Der *Endlichkeitsbeweis* kann wieder wie oben durch Betrachtung des

Dirichletschen Integrals geführt werden. Es kommt natürlich, wie erwähnt, nur darauf an, ihn für die Ψ zu führen, da er für die Φ genau so wie früher gilt, insofern als die Querschnitte Q auf die Definition der u keinen Einfluß haben. Haben wir aber einen Bereich Φ und dazu ein Potential u, welches jetzt definitionsgemäß bei einer der parabolischen Substitutionen den Periodizitätsmodul 1 hat, bei allen anderen jedoch sich reproduziert, so machen wir eine Hilfsabbildung des betreffenden Parallelogrammes durch eine Exponentialfunktion, so daß das eine Seitenpaar des Parallelogrammes in eine und dieselbe Linie verwandelt wird, in der Art der Fig. 8a, 8b. In Fig. 8b denke man sich jetzt einen schraffierten Ring eingezeichnet

Fig. 8a.

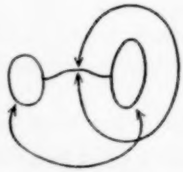


Fig. 8b.

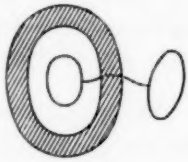


Fig. 8c.

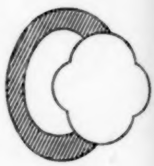


Fig. 8d.

(vgl. Fig. 8c), und die Potentialfunktion h gebildet, die auf der einen Randkurve dieses Ringes konstant 0, auf der anderen konstant 1 ist, darauf dieselbe auf die Fig. 8a überpflanzt (Fig. 8d). Alsdann hat das Dirichletsche Integral $D_R(h)$ einen Wert, der auch für alle Nachbarbereiche Ψ' von Ψ beibehalten werden kann, da man in Fig. 8c den gewählten Ring jedenfalls bei hinreichend kleinen Veränderungen der Fig. 8c und entsprechend 8a festhalten kann.

Der Satz von der Invarianz des Gebiets läßt sich genau so wie oben S. 82 vermeiden, da die Poincaréschen Reihen offenbar wieder analytisch von den sämtlich frei komplex veränderlichen Konstanten des Bereichs Ψ abhängen.

§ 14.

Beweis des Sicheltheorems (Uniformisierung $p = 0$ mit einem durch Ineinanderschiebung von elliptischen und parabolischen Sicheln gebildeten Fundamentalbereich).

Auf der einen Seite (t-Ebene) haben wir eine Figur Ψ der Form Fig. 9a (Ineinanderschiebung mehrerer elliptischer und eventuell parabolischer Sicheln), auf der anderen Seite (x-Ebene) die schlichte Ebene mit n Einschnitten nach den elliptischen bzw. parabolischen Stigmata

(Fig. 9b), welche Ebene wir in dieser Aufschneidung mit Φ bezeichnen werden. Die Figg. 9a und 9b haben offenbar dieselbe Konstantenzahl. Wir

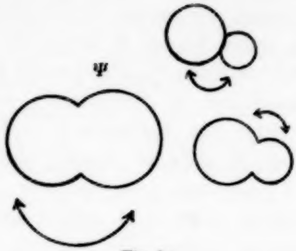


Fig. 9a.

Fig. 9b

denken sie uns in der Weise in Beziehung gesetzt, daß im Unendlichen $t = x + ((0))$ sich entwickeln läßt. Dann gilt der Unitätssatz. Die x-Figuren bilden evidentermaßen ein Kontinuum. Die Funktion $x(t)$ zu einem gegebenen Bereich Ψ kann man mit den kombinatorischen Methoden bilden. Es muß sodann gezeigt werden, daß $x(t)$ eine stetige Funktion in Abhängigkeit von Ψ ist. Dazu genügt es, die Stetigkeit des in der t-Ebene zu definierenden Potentials U nachzuweisen, das im Unendlichen wie $\xi + ((0))$ unendlich wird, wenn $z = \xi + i\eta$ gesetzt wird, ferner eindeutig ist in dem Fundamentalbereich Ψ und sich reproduziert gegenüber den Randsubstitutionen dieses Bereiches. Um die Stetigkeit von $U \equiv U(\Psi)$ zu erkennen, müssen wir zunächst die Endlichkeit nachweisen unabhängig von stetiger Veränderung des Bereiches Ψ. Dies folgt unmittelbar aus meinem Hilfssatze I, S. 46 der Abhandlung „U. d. a. K. II." betreffend Funktionen mit der Unstetigkeit $\frac{1}{z} + ((0))$ oder dem ganz analogen und ganz analog zu beweisenden Hilfssatze für Potentialfunktionen, die unstetig werden wie $r^{-1} \cos \varphi + ((0))$.

Nachdem die Endlichkeit der Funktion U feststeht, steht sie offenbar, wenn nur elliptische Sicheln vorkommen, keine parabolischen, auch über den Fundamentalbereich hinaus ein Stück fest und zwar gleichmäßig bei stetiger Abänderung. Hieraus folgt jetzt durch Differenzbildung und Berechnung des Dirichletschen Integrals ganz analog wie oben § 2 die Stetigkeit der Funktion $U(\Psi)$ zunächst im Falle des Fehlens parabolischer Sicheln.

Die parabolischen Sicheln können wir gleichförmig mit den elliptischen folgendermaßen behandeln. Wir bilden eine durch eine Linie L abgegrenzte Umgebung B einer solchen Sichel durch eine Exponentialfunktion (bei elliptischen Sicheln Potenz mit ganzzahligen positiven Ex-

ponenten) auf ein Gebiet β ab in der Weise, wie die Figg. 10a und 10b erläutern. Ändern wir die parabolische Sichel stetig ab, so wollen wir uns doch L fest denken. Die Linien λ und q werden sich dann auch stetig ändern. Indem wir einmal die Funktion U für einen ersten Bereich Ψ betrachten, das andere Mal für einen Nachbarbereich Ψ' und entsprechend mit U' bezeichnen, denken wir uns jetzt die Differenz $U' - U$ für den Bezirk B dadurch erklärt, daß wir B' auf β' abbilden und nun die Funktion U' auf β' überpflanzen. Dadurch ist sie auch in β erklärt und sie kann rückwärts auf B überpflanzt gedacht werden. Die dadurch in B erklärte Funktion U' nenne ich $\overline{U}'$. Sie genügt dann vollständig den automorphen Randbedingungen längs der zu B gehörenden parabolischen Sichel. Sie weist jedoch längs der Linie L einen kleinen Unterschied gegen die eigentlichen Randwerte von U' auf, ein Unterschied, der sich aber einschließlich der Ableitungen nach allen Richtungen gleichmäßig längs der ganzen Linie L auf 0 reduziert bei unbegrenzter stetiger Annäherung von Ψ' an Ψ. Rechnen wir nun das Dirichletsche Integral $D(U' - U)$ über den ganzen Bereich Ψ aus, indem wir in B augenblicklich unter U' die Funktion $\overline{U}'$ verstehen, so ergibt sich ein Randintegral über L zu beiden Seiten, nämlich $\int (U' - U) \frac{d(U' - U)}{dn} ds$ und dieses Integral reduziert sich in der Tat auf 0 beim Grenzübergang, indem entsprechende Integralelemente zu beiden Seiten von L sich ausgleichen.

Fig. 10a.

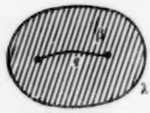


Fig. 10b.

Hiermit ist gezeigt, daß einer stetigen Veränderung der Fig. 9a eine stetige Veränderung der Fig. 9b entspricht, wobei wegen der gleichen Parameterzahl und des Unitätssatzes alle Freiheitsgrade der Fig. 9b erschöpft werden. Dabei wird man sich nun wieder entweder auf den Satz von der Invarianz des Gebiets bei stetiger eineindeutiger Abbildung beziehen können oder auch diesen Satz vermeiden durch Bezugnahme auf die analytische Abhängigkeit der Mannigfaltigkeiten, welche jetzt sofort durch den Hinweis auf die für t als Funktion von x bestehende Differentialgleichung 3. Ordnung erledigt wird, welche abgesehen von gewissen akzessorischen Parametern, zwischen welchen noch transzendente analytische Gleichungen bestehen, direkt aufgestellt werden kann und die singulären Punkte der x-Ebene wie auch die genannten akzessorischen Parameter rational enthält.

Jetzt kann man im Gebiete der Fig. 9b ohne weiteres eine Überführung von jeder Figur in jede andere vornehmen. Es kommt nun darauf an, die Unmöglichkeit einer Grenzstelle Φ^* auf der Überführungslinie

nachzuweisen. Man kann dies mit Hilfe des Konvergenzprinzips folgern, indem man beachtet, daß die Funktion $t(x)$ in einem Gebiet, das den unendlich fernen Punkt der x-Ebene ausschließt, auf Grund des oben erwähnten Hilfssatzes I aus „U. d. a. K. II." unterhalb einer endlichen Schranke bleibt. Im Falle des Vorkommens nur elliptischer, nicht auch parabolischer Sicheln kann man jedoch durch analoge Betrachtungen wie auf S. 94 u. 95 die Stetigkeit der Funktion $t(x)$ in Abhängigkeit von der Fig. 9b beweisen, indem man jetzt mit den Endpunkten der Einschnitte ähnlich verfährt wie dort mit den Windungspunkten. In der Tat liegt ja für die uniformisierende Variable $t(x)$ an jedem Endpunkte der Einschnitte stets ein Windungspunkt bestimmter Ordnung.

Wir bemerken übrigens noch, daß wir, was auch eine Art Kontinuitätsschlußverfahren ist, den Fall parabolischer Sicheln auch als Grenzfall elliptischer Sicheln mittels des Auswahlverfahrens behandeln können, wie dies in „U. d. a. K. II." § 19 geschehen ist.

§§ 15—18.

Beweis der allgemeinen Kleinschen Fundamentaltheoreme. (Ineinanderschiebung von Grenzkreispolygonen.)

§ 15.

Einleitende Bemerkungen.

Wir gehen nunmehr zum Beweise der allgemeinsten Fundamentaltheoreme mittels der Kontinuitätsmethode über. Dabei wollen wir uns für die Zwecke der Darstellung eine unwesentliche Beschränkung auferlegen, insofern als wir annehmen wollen, daß die jetzt zu betrachtenden Fundamentalbereiche Ψ durch Ineinanderschiebung wirklicher Grenzkreispolygone entstehen, unter Weglassung solcher komponierenden Fundamentalbereiche, deren zugehörendes Polygonnetz entweder die volle Ebene oder die ganze Ebene exklusive eines oder zweier Punkte bedeckt. Diese Beschränkung ist von der Art, daß der Leser namentlich auf Grund der vorangegangenen Entwicklungen in § 13—14 sofort erkennt, daß auch die angedeutete weitere Allgemeinheit keine neuen Schwierigkeiten mit sich bringt. Wir denken uns den Fundamentalbereich Ψ wieder als einen Bereich, welcher den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthält. Das einzelne an der Komposition beteiligte Grenzkreispolygon vom Geschlecht p' möge im Falle $p'=0$ so begrenzt sein, daß die Begrenzung einer Aufschneidung der schlichten Ebene $(p'=0)$ entspricht, bei welcher die verschiedenen relativen Windungsstellen mit einem in der Ebene willkürlich gewählten Punkte M' durch je einen Einschnitt verbunden sind, so daß die Anzahl der Seiten eines solchen Polygons $2n'$ beträgt, wenn n' die Anzahl der

erwähnten relativen Windungspunkte (Stigmata) ist. Ist jedoch das Geschlecht $p' \geqq 1$, so denken wir uns das Polygon in der Weise begrenzt, daß die Begrenzung einer Aufschneidung der zugehörenden Riemannschen Fläche mittels p' getrennter Rückkehrschnittpaare entspricht, welche untereinander dadurch verbunden sind, daß von jedem der p' Kreuzungspunkte ein Schnitt nach einem willkürlichen Punkte M' der zugehörenden Riemannschen Fläche gemacht ist. Im ganzen würde dem Bereiche Ψ eine Riemannsche Fläche F zugehören, welche nun durch σ getrennte Schnittsysteme in eine σ-fach zusammenhängende schlichtartige Fläche F_0 verwandelt erscheint, wenn σ die Anzahl der den Bereich Ψ bildenden einzelnen Grenzkreispolygone darstellt.

Für den im folgenden zu liefernden Kontinuitätsbeweis ist erstlich die Frage nach der tatsächlichen Existenz von Fundamentalbereichen Ψ eines beliebigen zu betrachtenden Typus einerseits, andererseits die Frage nach dem Grade der Variationsmöglichkeit derartiger Fundamentalbereiche Ψ zu beantworten. Beide Fragen boten bei den bisher behandelten Uniformisierungsproblemen keine Schwierigkeit dar. Hier jedoch bedürfen sie einer besonderen Untersuchung. Wir könnten uns dazu auf die ausführliche Behandlung der Theorie der Polygongruppen, wie sie Fricke in Bd. II des Werkes Fricke-Klein: „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“ gegeben hat, berufen, eine Theorie, durch welche tatsächlich eine direkte geometrische Lösung der beiden erwähnten Fragen gegeben wird. Wir ziehen es jedoch vor, dies nicht zu tun, weil einerseits diese Theorie im ganzen doch ziemlich kompliziert ist und weil andererseits durch eine solche Bezugnahme der independente Charakter unserer Arbeiten gestört würde. Wollte man das Grenzkreistheorem selbst mittels der Kontinuitätsmethode behandeln, so würde eine derartige direkte geometrische Untersuchung der Hauptkreisgruppen allerdings unvermeidlich sein, eine Untersuchung, die übrigens nur dann Schwierigkeiten verursacht, wenn kein Stigma ∞ vorkommt, in welchem Fall wir dem Polygon stets die in „U. d. a. K. III.“, Math. Ann. 72, S. 482 geschilderte einfache Gestalt geben können, welche über Existenz und Variationsmöglichkeit unmittelbar Aufschluß gibt. Im allgemeinen Falle stützen wir uns bezüglich der Existenz von Grenzkreispolygonen jedes einzelnen Typus auf die Existenz der Grenzkreisvariablen zu gegebener unsignierter oder irgendwie signierter Riemannscher Fläche, wie wir dieselbe in „U. d. a. K. I.“ mittels der Methode der Überlagerungsfläche bewiesen haben, und nehmen nun in den beiden folgenden Paragraphen diese so begründete Existenz der Grenzkreispolygone auch als Grundlage zur exakten Bestimmung der Variationsmöglichkeit dieser Polygone in der Nachbarschaft jedes einzelnen derselben.

§ 16.
Die Variationsmöglichkeit der Grenzkreispolygone vom Geschlecht Null.

Wir betrachten zunächst den Fall $p' = 0$ oder, unter Weglassung der Akzente in diesem Paragraphen, $p = 0$. Wir bringen drei der Stigmata nach 0, 1, ∞. Alsdann denken wir uns die kanonische Aufschneidung gemäß Fig. 11 (5 Stigmata). Die Abbildung der aufgeschnittenen x-Ebene ($\equiv \Phi$) auf das Grenzkreispolygon Π (t-Ebene) mit dem Einheitskreise als Grenzkreis sei so normiert, daß ein Punkt 0 in den Nullpunkt und eine bei 0 gegebene Richtung in die Richtung der positiven Achse des Reellen übergehen soll. Wir haben uns nun vorzustellen, daß die $n - 3$ von 0, 1, ∞ verschiedenen Stigmapunkte frei variieren und außerdem das Richtungselement bei 0. Das sind $2n - 3$ reelle Parameter.

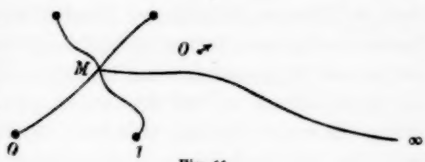


Fig. 11.

Es kommt jetzt zunächst darauf an, zu zeigen, daß die Größe $t(x)$ eine stetige Funktion der genannten $2n - 3$ Konstanten ist. Das ergibt sich sofort mit dem Auswahlkonvergenzprinzip. Wir brauchen nur zu zeigen, daß, wenn ein Wertsystem der $2n - 3$ Parameter gegen ein Ausgangswertsystem konvergiert, dann auch $t(x)$ gegen die Ausgangsfunktion konvergiert. Wäre dies nun nicht der Fall, so würden wir eine Folge von Wertsystemen der $2n - 3$ Konstanten, die gegen das Ausgangssystem konvergieren, so bestimmen können, daß dennoch die Funktion $|t^*(x) - t_0(x)|$, unter $t_0(x)$ die Ausgangsfunktion verstanden, in einem Bezirke der t-Ebene noch Werte oberhalb einer endlichen von Null verschiedenen Schranke bekäme. Da nun jedenfalls alle Funktionen $t(x)$ in der aufgeschnittenen x-Ebene erklärt sind und dem absoluten Betrage nach überhaupt < 1 bleiben, so kann man jetzt eine neue Folge auswählen, die sicher gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion kann keine Konstante werden, weil dann der nichteuklidische Inhalt des Polygons sich allmählich auf Null reduzieren müßte, während er doch nur von der Signatur abhängt, also konstant ist. Die Grenzfunktion wird daher auch eine Abbildung der Ausgangsfigur der x-Ebene auf ein Grenzkreispolygon liefern, demnach mit der Funktion $t_0(x)$ identisch sein, während sie sich doch andererseits von $t_0(x)$ soweit unterscheiden müßte, daß das Maximum der Differenzfunktion in einem Gebiete der x-Figur oberhalb der genannten Schranke liegt, was ein Widerspruch ist.

Hiermit ist die stetige Änderung des Grenzkreispolygons Π in Abhängigkeit von Φ unter den oben angegebenen Normierungsbedingungen bewiesen. Wir bemerken nun weiter, daß unter Beschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung des Ausgangsparametersystems die erhaltenen Polygone Π alle untereinander verschieden sein müssen, so daß zwei der Polygone niemals dieselben $2n$ elliptischen Eckpunkte aufweisen können. Nehmen wir in der Tat an, es würden sich für zwei Parametersysteme, die hinreichend benachbart sind, dieselben elliptischen Eckpunkte, oder, was dasselbe ist, elliptischen Randsubstitutionen ergeben, so würden die beiden Polygone offenbar deformatorisch äquivalent sein. Daher würde zu beiden Polygonen dieselbe Hauptfunktion $x(t)$ gehören, welche so normiert zu denken ist, daß drei der elliptischen Eckpunkte in 0, 1, ∞ übergehen. Dann aber würden sich auch für die anderen elliptischen Eckpunkte sowie für den Nullpunkt und das positive reelle Richtungselement im Nullpunkt genau dieselben Stellen und dasselbe Richtungselement in der x-Ebene ergeben.

Es ist nun übrigens auch klar, daß wir durch die vermöge der $2n-3$ in der x-Ebene definierten Parameter bestimmte Variationsmöglichkeit des Grenzkreispolygons Π tatsächlich überhaupt die Variationsmöglichkeit dieses Polygons in der Nachbarschaft des Ausgangspolygons Π_0 erschöpft haben. Dies folgt daraus, daß einer geringen Veränderung des Polygons Π_0 eine geringe Veränderung der Hauptfunktion $x(t)$ entspricht und folglich ein nur wenig verändertes Parametersystem. Die Stetigkeit der Hauptfunktion bzw. des Potentials U mit der Unstetigkeit $r^{-1}\cos\varphi$ folgt genau ebenso wie in § 14 mit oder ohne Zuhilfenahme des Auswahlkonvergenzsatzes.

Man wird wünschen, die stetige Abhängigkeit der Funktion $t(x)$ von dem Parametersystem durch einen Schluß nachzuweisen, bei welchem man sich nicht des Auswahlkonvergenzsatzes bedient und welcher dadurch die Möglichkeit einer Abschätzung der Abweichung bietet. Dies ist nun nach Analogie der Entwicklungen in § 5 folgendermaßen möglich, wobei wir den Fall eines festen Richtungselementes O betrachten, nur die $n-3$ Stigmapunkte variieren lassend. Der allgemeine Fall würde, wie man sofort bemerkt, eine wesentlich neue Betrachtung nicht erfordern, da eine alleinige Veränderung des Richtungselementes O unter Festhaltung der Stigmapunkte lediglich eine lineare Transformation in der t-Ebene bedingt.

Wir können, wenn die Abweichung der Stigmapunkte in der x-Ebene von den Ausgangspunkten kleiner als ε ist, ähnlich wie in § 5 Kreise vom Radius 2ε konstruieren und nun die beiden Überlagerungsflächen betrachten exkl. der aus allen Blättern ausgestanzt zu denkenden Kreisflächenstücke. Diese beiden Überlagerungsflächen sind durch die Identität aufeinander bezogen. In der t-Ebene bekommen wir entsprechend eine Abbil-

dung des unendlich-vielfach durchlöcherten Einheitskreises auf die in anderer homologer Weise durchlöcherte Einheitskreisfläche, wobei die Löcher sich beidemal gegen die Peripherie hin häufen. Wegen der Konstanz des nichteuklidischen Flächeninhaltes der in Betracht zu ziehenden Grenzkreispolygone sowie wegen des Verzerrungssatzes ergeben sich Beschränkungen über die Nähe, bis zu welcher die Löcher an den Mittelpunkt des Einheitskreises herantreten können. Sie müssen in gewisser Distanz bleiben. Andererseits muß die Summe der Quadrate der Umfänge der erwähnten Löcher eine Größe sein, die zugleich mit ε unendlich klein wird (vgl. § 5). Nun ist die erwähnte Abbildung des Einheitskreises auf sich selbst mit der Methode des Cauchyschen Integrals zu untersuchen. Dazu müssen wir noch die Spiegelung des Innern des Einheitskreises an der Peripherie vornehmen und dadurch die erwähnte Abbildung gewissermaßen fortgesetzt denken eben vermöge der Spiegelungsdefinition (vgl. § 7 in „U. d. a. K. III."). Nunmehr kann man die Abbildungsfunktion aus den l. c. angeführten Gründen ausdrücken durch das Cauchysche Integral, erstreckt über alle Löcher, sowohl die inneren als auch die äußeren plus einer ganzen linearen Funktion, welche aus dem über einen unendlich weiten Kreis erstreckten Integrale resultiert. Es zeigt sich demnach, daß die Abbildungsfunktion in der Grenze in eine ganze lineare Funktion übergeht. Diese ganze lineare Funktion muß sich aber notwendigerweise auf die Funktion z selbst reduzieren, weil einerseits bei der Abbildung das positive reelle Richtungselement im Nullpunkte in sich übergeht, wodurch zunächst eine Drehung ausgeschlossen ist, andererseits die Annahme eines von 1 verschiedenen Vergrößerungsfaktors notwendig zur Folge hätte, daß die beiden Polygone nicht denselben nichteuklidischen Flächeninhalt haben könnten, da bei einer Vergrößerung stets jedes Flächenelement in bezug auf den Einheitskreis auch eine Vergrößerung seines nichteuklidischen Flächeninhaltes erfährt. Die erwähnte Möglichkeit wird auch durch den Umstand ausgeschlossen, daß bei der betrachteten Abbildung der unbegrenzten Annäherung an den Einheitskreis wieder die unbegrenzte Annäherung an den Einheitskreis entspricht, was sich in der die Abbildung approximativ darstellenden linearen Funktion nur dann ausprägen kann, wenn der Vergrößerungsfaktor derselben in der Grenze Eins wird.

§ 17.

Die Variationsmöglichkeit der Grenzkreispolygone mit von null verschiedenem Geschlecht.

Wir betrachten nunmehr den Fall eines Grenzkreispolygons vom Geschlecht $p \geqq 1$ beliebiger Signatur. Nur werde angenommen, daß kein

Stigma ∞ vorkommt, in welchem Falle wir uns ja auf die bezüglichen Bemerkungen in § 15 berufen können.

Wir verfahren analog $p = 0$, indem wir die Variationsmöglichkeit von der Normalfigur aus durch die betreffende Parameterzahl charakterisieren; d. h. wir nehmen unsere $(6p-6)$-parametrige Riemannsche Normalfläche mit lauter einfachen Windungspunkten und haben darauf die n Stigmapunkte und außerdem das Richtungselement O. Das sind im ganzen $6p - 3 + 2n$ Konstanten. Wir können uns die Riemannsche Normalfläche jetzt noch in der Weise zu einer einfach zusammenhängenden Fläche aufgeschnitten denken, daß wir von je einem Eckpunkte der p begrenzenden Parallelogramme einen Schnitt nach einem Punkte M auf der Normalfläche führen, welchen Punkt wir dann noch mit den Stigmapunkten durch je einen Einschnitt verbinden. Auf diese Weise unterscheiden wir $6p + 2n$ Seiten der vollständigen Begrenzung der Normalfigur entsprechend den $6p + 2n$ Seiten des Grenzkreispolygons.

Wir können nun die stetige Abhängigkeit des Grenzkreispolygons von der $(6p-3+2n)$-parametrigen Normalfigur mit Hilfe des Auswahlkonvergenzsatzes genau wie oben im Falle $p = 0$ beweisen. Wollen wir uns jedoch dieses bequemen Prinzips nicht bedienen, so verfahren wir in Analogie mit dem Falle $p = 0$ folgendermaßen. Wir bilden in der Ebene der Normalfigur, die wir als w-Ebene bezeichnen, ein zweites irgendwie in p Periodizitätsmoduln normiertes Integral erster Art w_1. Dann ist zu zeigen, daß w_1 stetig von der Normalfigur abhängt, was von w, welches sich selbst identisch bleibt, selbstverständlich ist. Dazu sind auf Grund der früheren analogen Entwicklungen (§ 2) nur zwei Fragepunkte besonders zu erledigen. *Erstens*: Angabe einer oberen Schranke für w_1, die gültig bleibt bei stetiger Veränderung der Normalfigur. *Zweitens*: Anbringung geeigneter Modifikationen an den genannten früheren Entwicklungen wegen der vorhandenen beweglichen Windungspunkte der Normalfigur.

Der erste Punkt erledigt sich sehr einfach, indem man jedem einzelnen der begrenzenden Parallelogramme entsprechend, (Fig. 12), einen Ring R konstruieren kann, welcher jetzt nur in der Idee geschlossen ist. Man braucht dazu nur zwei einander zugeordnete Seiten eines Parallelogramms so durch einen Flächenstreifen zu verbinden, daß die auf den erwähnten Parallelogrammseiten liegenden Begrenzungsteile des idealen Ringes einander entsprechen, wie in Fig. 12, wobei man zweckmäßigerweise zwei solche zugeordnete Seiten nimmt, die durch eine feste Substitution der $(6p-6+2n)$-parametrigen Normalfigur auf einander bezogen sind. In der Tat sind ja bei der vorzunehmen-

Fig. 12.

den Veränderung der Normalfigur p Randsubstitutionen fest zu denken, und es ist zulässig, von jedem der p Parallelogramme je eine der beiden bezüglichen Substitutionen als fest zu denken. Auf diese Weise wird der erwähnte Hilfsring ein gegenüber der Beweglichkeit der Figur fester Ring bleiben und deswegen die eine zugehörende in dem ideal geschlossenen Ringe eindeutige reguläre Potentialfunktion h mit den konstanten Randwerten 0 und 1 eine brauchbare Vergleichsfunktion für die Vergleichung der Dirichletschen Integralwerte.

Der zweite Punkt erledigt sich dadurch, daß man um die einzelnen Windungspunkte der Ausgangsnormalfläche und der variierten Fläche Windungskreise beschreibt von einem gemeinschaftlichen Radius ϱ, dessen Größe bei der Stetigkeitsuntersuchung festgehalten wird. Die zu betrachtende Differenz der beiden Potentiale u und u' (vgl. S. 116) wird dann auch in den erwähnten Kreisflächenstücken bis in die Windungspunkte selbst hinein einen eindeutigen Sinn bekommen mittels einer, durch kleine, die verschobenen Windungspunkte in die Ausgangswindungspunkte überführende Parallelverschiebungen der erwähnten Kreisflächenstücke bewirkten Werteüberpflanzung nach Analogie der entsprechenden Operation S. 116, wobei nun auf Grund der vorher bewiesenen Beschränktheit der Potentiale u und u' und daher auch ihres Gefälles die an der Grenze der genannten Kreisflächenstücke bewirkte Diskontinuität nur einen unendlich kleinen Beitrag zum Werte des Dirichletschen Integrales der Funktion $(u'-u)$ liefert, indem entsprechende Elemente der beiden Ufer sich ausgleichen.

Die Funktion $\frac{dw}{dw_1}$ liefert nun eine Abbildung der Riemannschen Normalfläche auf eine Riemannsche Fläche F, welche sich stetig ändert bei stetiger Änderung der Riemannschen Normalfläche. Die Untersuchung der stetigen Abhängigkeit des Grenzkreispolygons Π von der Normalfläche bzw. der Funktion $t(w)$, welche diese Abhängigkeit vermittelt, ist damit auf die entsprechende Untersuchung der Abhängigkeit des Grenzkreispolygons von der Riemannschen Fläche F zurückgeführt. Diese Untersuchung vollzieht sich nun aber nach denselben Prinzipien, die wir im Falle $p=0$ anwandten.

Hiermit wäre zunächst gezeigt, daß, wenn wir die $6p-6+2n$ Konstanten der Normalfigur wenig ändern, das Grenzkreispolygon Π sich auch wenig ändert und zwar so, daß sich jeder Wahl des Konstantensystems entsprechend auch verschiedene Polygone ergeben in dem Sinne, daß dieselben der Lage der Begrenzung nach nur wenig voneinander abweichen und daß das System der Randsubstitutionen sicher nicht für zwei verschiedene Konstantensysteme dasselbe ist. D. h. aber, daß wir das Grenzkreispolygon $(6p-6+2n)$-parametrig variieren können.

Daß wir damit überhaupt die Bewegungsfreiheit des Grenzkreispoly-

gons erschöpfend charakterisiert haben, erfordert jetzt, wie im Falle $p = 0$, noch den Nachweis, daß auch die Riemannsche Normalfigur sich stetig in Abhängigkeit von dem Grenzkreispolygon ändert, d. h. den Nachweis der stetigen Abhängigkeit der Abelschen Integrale erster Art bzw. der Potentiale u von dem Grenzkreispolygon, wenn man sich dasselbe ausgehend von einem Polygon Π_0 irgendwie in ein Polygon Π desselben Typus stetig abgeändert vorstellt.

Diesen Nachweis, welcher sich mittels des Auswahlkonvergenzsatzes wieder gemäß der Methode S. 70 führen läßt, führen wir unabhängig von diesem Prinzip in der Art, daß wir wieder ein Ringpotential h konstruieren, welches nun allerdings nicht mehr fest sein wird. Wir betrachten von dem Grenzkreispolygon ein System von sechs aufeinander folgenden Seiten entsprechend einem Begrenzungsparallelogramm der Riemannschen Normalfigur mit zugehörendem Einschnitt nach dem Punkt M. Wir bekommen so das Bild der Figur 13a und bilden nun aus lauter

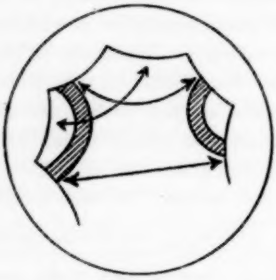


Fig. 13a.

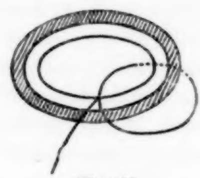


Fig. 13b.

kreisförmigen Begrenzungsstücken den Ring R, dessen Bahn sich aus dem Schema der Figur 13b ergibt, welche einen Rückkehrschnitt mit konjugiertem Rückkehrschnitt und Einschnitt nach dem Kreuzungspunkte des Rückkehrschnittpaares zeigt und die den Analysis-situs-Umständen entsprechende Ringlage. Am zweckmäßigsten wird diese Ringfigur in der Ebene des Grenzkreispolygons so aufgestellt, daß man dieselbe zunächst an den vier Austrittsstellen aus dem Polygon festlegt durch Wahl zweier die Begrenzung treffender *fest*zuhaltender Kreisflächen und Bestimmung mit dem Polygon *beweglicher*, durch die beiden in Betracht kommenden Substitutionen gelieferter Bilder (s. Figur 14a) und darauf einfach den Ring vervollständigt durch eine Kette *fest* zu denkender Kreisflächen nach Art der Figur 14b.

Man hat nun $D_R(h) = \int \frac{dh}{dn}\, ds$, das letztere Integral erstreckt über die eine Begrenzungslinie des Ringes, zu untersuchen und zu zeigen, daß

sich eine endliche Größe ergibt, durch welche dieses Integral gleichmäßig für die Polygone einer gewissen zu betrachtenden Nachbarschaft des Ausgangspolygons abgeschätzt wird. Wir zerlegen zum Zwecke dieser Ab-

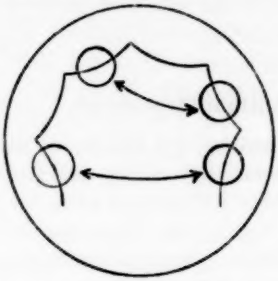


Fig. 14a.

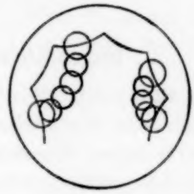


Fig. 14b.

schätzung den im Grenzkreispolygon eingezeichneten Ring in endlich viele Stücke und machen nun eine Abschätzung für das einzelne durch lokale Hilfsabbildung auf einen gestreckten Winkel (Fig. 15) übertragen zu denkende Randstück. Es ist klar, daß in der Hilfsfigur 15 das für die Halbkreisfläche gebildete Hilfspotential $\bar{h}$, welches auf dem gradlinigen Begrenzungsstück gleich 1 ist, auf dem Halbkreise jedoch gleich 0, in dem ganzen Halbkreise kleiner als h ist, weil es auf dem Rande $\leqq h$ ist. Daher ist die normale Ableitung längs des geradlinigen Begrenzungsstückes für die Funktion $\bar{h}$ größer als für die Funktion h. Nun hat $\bar{h}$ auf dem in Figur 15 sichtbaren Spiegelhalbkreise den Wert 2 und ist durch die Randwerte 0, 2 für das ganze Innere des Kreises der Figur 15 erklärt durch das Poissonsche Integral (wesentlich eine Arkustangensfunktion) darstellbar. Daraus ergibt sich für die Ableitung von h längs der inneren in Figur 15 stärker ausgezogenen Hälfte des Kreisdurchmessers eine Abschätzung durch das Maximum des Wertes den die Ableitung von $\bar{h}$ auf diesem Stück annimmt. Nun beachte man, daß man die ganze Begrenzungslinie des Ringes in der angegebenen Weise abschätzend durchlaufen kann, wobei die Wahl von endlich vielen solcher Hilfsfunktionen genügt. Der Umstand, daß die Begrenzungslinie des zu untersuchenden Ringes nicht geradlinig, sondern aus Kreisbogenstücken gebildet ist und daher auch Ecken aufweist, bietet dabei keine Schwierigkeit, weil man durch elementare Hilfsfunktionen (Potenzabbildung und Inversion) auf den betrachteten Fall der Figur 15 kommt. Das Resultat ist eine Abschätzung des vollständigen über die ganze Begrenzungslinie des Ringes erstreckten Integrales $\int \frac{dh}{dn}\, ds$ lediglich

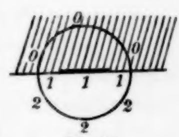


Fig. 15.

aus den Bestimmungsstücken der Ringfigur, eine Abschätzung, welche ganz offenbar stetig von diesen Bestimmungsstücken abhängt und daher auch gleichmäßig für den mit dem Grenzkreispolygon sich stetig verändernden Ring ausgeführt werden kann.

§ 18.

Durchführung des Kontinuitätsbeweises.

Der Fall $p=0$. Wir betrachten zunächst den Fall $p=0$, in welchem dann auch alle komponierenden Fundamentalbereiche das Geschlecht 0 haben. Wir haben einerseits die schlichte x-Ebene mit einer der Signatur entsprechenden Aufschneidung (siehe Figur 16a). Den unendlich fernen Punkt wollen wir uns im Innern denken. Parabolische Stigmata seien zunächst ausgeschlossen. Wir haben in der Figur 16a $n_1+n_2=n$ relative Windungspunkte (in der Figur speziell $n_1=4$, $n_2=5$). Die Frage der Konstruktion einer Überführungslinie zwischen irgend zwei x-Figuren, die

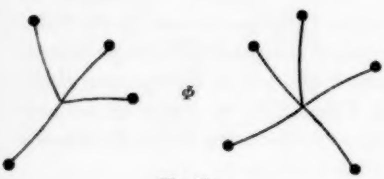


Fig. 16a.

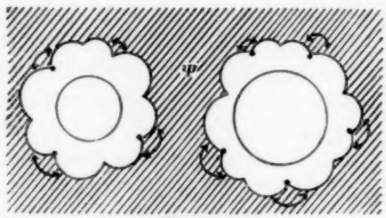


Fig. 16b.

wir jetzt mit Φ zu bezeichnen hätten, bietet offenbar überhaupt keine Schwierigkeit dar, da diese Überführbarkeit unmittelbar evident ist. Andererseits haben wir in der t-Ebene zwei ineinandergeschobene Grenzkreispolygone der betreffenden Signatur zu betrachten, welche einen Fundamentalbereich Ψ bilden (Figur 16b). Beiderseits haben wir in Anbetracht der in § 16 bestimmten Variationsmöglichkeit der Grenzkreispolygone bei festem Grenzkreise, der hier variabel wird, im ganzen dieselbe Konstantenzahl, nämlich $2n$. Wir können jetzt in der t-Ebene diejenige Fundamentalfunktion $x(t)$ bilden, die automorph ist, eindeutig, und im Unendlichen die Form $x=t+((0))$ hat. Diese Funktion ändert sich nach früheren Prinzipien stetig und erschöpft jedesmal die volle Variationsmöglichkeit der Figuren Φ. Nun wird eine Grenzfigur Φ^* auf der Überführungslinie angenommen und dann durch Nachweis der Stetigkeit der Funktion $t(x)$ nach den Prinzipien des Unitätsbeweises der Abhandlung III, im übrigen jedoch ganz analog dem Beweise in § 5, oder mit Auswahlkonvergenzprinzip gemäß S. 87ff., gezeigt, daß auch noch für Φ^* ein zugehörendes

Grenzkreispolygon existiert. Wir haben dabei hier noch den Vorteil, daß die in § 5 in Betracht gezogene Möglichkeit der Auflösung eines Windungspunktes höherer Ordnung der Riemannschen Fläche F^* hier nicht in Betracht kommt, weil nur die Windungspunkte der Funktion $t(x)$ vorhanden sind, die ihre Ordnung behalten.

Der Fall $p \geqq 1$. In diesem Falle hat die Figur Φ in der z-Ebene, für welche man die Überführungslinie konstruiert, die Form der Figur 17 ($p=3$), welche aus Figur 1 entsteht, indem in diese (für $p=3$) eine Einzeichnung gemacht wird, entsprechend der Aufschneidung der Riemannschen Fläche, die dem jetzt zu beweisenden Fundamentaltheorem zugrunde liegt. Im übrigen wird Φ von F aus durch denselben Abbildungsprozeß gewonnen, wie oben S. 52. Die weitergeführte Aufschneidung spielt eben bei dieser Abbildung nur die Rolle einer mitzuübertragenden Einzeichnung in diejenige $2p$-fach zusammenhängende Fläche, welche aus F durch Aufschneidung dieser Fläche mittels p Rückkehrschnitten hervorgeht. Wir haben sogleich einen Fall mit Stigmata ins Auge gefaßt, (zwei ineinander geschobene Grenzkreispolygone, das eine vom Geschlecht 2, das andere vom Geschlecht 1, dazu ein bzw. zwei Stigmata endlicher Ordnung).

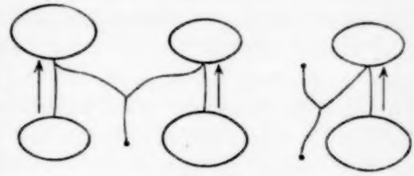


Fig. 17.

In der t-Ebene haben wir zwei einen Bereich Ψ bildende ineinandergeschobene Grenzkreispolygone der betreffenden Signaturen. Die nachbarliche Variationsmöglichkeit des Fundamentalbereichs Ψ beherrschen wir nach §§ 16 und 17, weil wir sie für jedes einzelne Grenzkreispolygon beherrschen.

Jetzt gehen wir zur Riemannschen Normalfläche über durch ein allgemeines Abelsches Integral erster Art. Wir denken uns in diese Riemannsche Normalfläche die entsprechende Einzeichnung gemacht. Die $(6p-6+2n)$-parametrige Normierung der Figur Ψ geschieht im Falle der Figur 17 dadurch, daß wir den einen Grenzkreis als Einheitskreis wählen mit der Bedingung, daß der Fundamentalbereich selbst ganz im Inneren des Einheitskreises liegen soll, während wir den zweiten Grenzkreis konzentrisch mit dem Einheitskreise wählen. Ferner schreiben wir vor, daß einer der Fixpunkte der Substitutionen*) des zweiten Grenzkreis-

*) Diese Substitutionen sind, da wir hier Stigmata der Ordnung ∞ ausschließen, bekanntlich entweder elliptisch oder hyperbolisch. In der Tat lehrt folgende Betrachtung, daß eine Gruppe G der betrachteten Art keine parabolische Substitution enthalten kann. An Stelle des Grenzkreises werde die obere Halbebene gesetzt, die als

polygons auf der positiven Seite der Achse des Reellen liegen soll. Haben wir mehr als zwei komponierende Polygone, so können wir an Stelle dieser Fixpunktnormierung die Bestimmung treten lassen, daß der Mittelpunkt eines dritten Grenzkreises auf der positiven Seite der Achse des Reellen liegen soll. Die so normierte Figur Ψ läßt sich dann in der Tat durch $6p - 6 + 2n$ Parameter hinsichtlich ihres Freiheitsgrades eineindeutig charakterisieren (natürlich nur für eine hinreichend kleine Umgebung jedes einzelnen zu betrachtenden Bereichs Ψ). Wir haben erstens die Konstanten des umschließenden Grenzkreispolygons, welche voll in Anspruch genommen werden, nämlich $6p_1 - 3 + 2n_1$, wenn p_1 das Geschlecht dieses Polygons, n_1 die Zahl der Stigmata ist. Das innere Polygon liefert seinerseits $6p_2 - 3 + 2n_2$ Parameter. Diese Parameter sind erstens die Größe $\varrho < 1$ des Radius des zugehörenden Grenzkreises, zweitens die Polygonkonstanten, die jetzt wegen der getroffenen Fixpunktnormierung nur $6p_2 - 4 + 2n_2$ betragen und transzendent gefunden werden gemäß dem in § 17 angegebenen Prinzip, wobei erstens eine Hilfsabbildung des Polygons auf ein zum Einheitskreis als Grenzkreis gehörendes Polygon vorzunehmen ist vermöge der Substitution $t' = \frac{\varrho}{t}$ und ferner auf der Riemannschen Normalfläche das Richtungselement in O lediglich durch den seine Lage fixierenden Punkt O auf genannter Fläche zu ersetzen ist.

Die Durchführung des Kontinuitätsbeweises bietet nunmehr im einzelnen nichts Neues gegen früher, wenn man meinen allgemeinen Unitätsbeweis in der Abhandlung „U. d. a. K. III." für die allgemeinen Fundamentaltheoreme zugrunde legt. Wir haben wieder wie in § 5 die Möglichkeit ohne Auswahlverfahren oder auch wie S. 92 mit Auswahlverfahren zum Ziele zu gelangen, wobei im letzteren Falle eine spezielle Bezugnahme auf die Prinzipien des Unitätsbeweises nicht erforderlich ist.

Die parabolischen Fälle. Für die parabolischen Fälle, die wir bisher noch ausgeschlossen haben, haben wir oben § 15 bereits die Freiheitsgrade der Polygone bestimmen können unabhängig von der Uniformisierung. Stützt man sich auf die Uniformisierung, so steht wieder bequemer-

vorkommend angenommene parabolische Substitution habe die Form $\tau' = \tau + 1$. Dann enthält der Kreis mit $2ni$ als Mittelpunkt und n als Radius mindestens $2n$ in bezug auf G äquivalente Punkte. Dieser Kreis K_n, der mit der Achse des Reellen die feste Doppelverhältnisinvariante 2 besitzt (Durchmesser durch Abstand von der Achse des Reellen), ist nun vermöge G äquivalent einem Kreise K_n', der aus K_n entsteht, indem man von dem Punkte $2ni$ durch eine Substitution von G zu dessen äquivalenten Punkt im Fundamentalbereich übergeht und durch dieselbe Substitution K_n mittransformiert. Da nun alle Kreise K_n' die feste Invariante 2 haben, so ist klar, daß alle K_n' in einem endlichen Teilbezirke der oberen Halbebene liegen, welcher sich nicht bis an die Achse des Reellen heranerstreckt und daher nur endlich viele äquivalente Punkte fassen kann, deren Anzahl *nicht* mit n ins Unendliche wachsen kann.

weise das Auswahlverfahren zur Verfügung, um die stetige Änderung des Polygons zu erkennen und damit zugleich die stetige Bewegung der parabolischen Eckpunkte. Dasselbe gilt für die Durchführung des Kontinuitätsbeweises, wo auch das Auswahlverfahren schnell zum Ziele führt. Übrigens habe ich schon in III. gezeigt, wie diese Fälle sich, wenn man einmal das Hilfsmittel des Auswahlverfahrens anzuwenden gestattet, unmittelbar als Grenzfälle der anderen Fälle (elliptische Stigmata) behandeln lassen oder auch auf Grund der Bemerkung, daß ein Grenzkreispolygon mit parabolischen Eckpunkten stets als Grenzfall eines eigentlichen Hauptkreispolygons betrachtet werden kann, welches eine auf dem Hauptkreise eigentlich diskontinuierliche Gruppe bestimmt.

Die Einheit der allgemeinen Fundamentalbereiche Ψ. Es ergibt sich nun, ohne daß neue Betrachtungen erforderlich wären, wieder der Satz, daß die allgemeinsten Fundamentalbereiche, die durch Ineinanderschiebung entstehen, tatsächlich bei Festhaltung der Signatur ein einziges Kontinuum bilden. Wesentlich ist hierbei die Bemerkung, daß dieser Nachweis das Fundamentaltheorem als bewiesen voraussetzt, wobei dahingestellt bleibt, ob ein direkter elementarer Beweis dieses Satzes möglich ist.

E. Schlußbemerkungen.

Der vorliegenden Abhandlung IV beabsichtige ich demnächst noch eine weitere Abhandlung V folgen zu lassen.

Über eine besondere Art von Integralgleichungen.

Von

C. Runge in Göttingen.

Einige physikalische Probleme führen auf die folgende Art von Integralgleichungen

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)\,\varphi(u-x)\,dx \quad \text{und} \quad f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\varphi(u-x)\,dx.$$

Im ersten Fall sind die Funktionen $f(u)$ und $k(x)$, im zweiten Falle die Funktion $f(u)$ allein gegeben. In beiden Fällen ist die Funktion $\varphi(x)$ gesucht.

Beide Aufgaben lassen sich in einfacher Weise durch Entwicklung nach Hermiteschen Polynomen lösen. Was zunächst die erste Aufgabe betrifft, so sei

$$k(x) = e^{-x^2}[a_0 + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots],$$
$$\varphi(x) = e^{-x^2}[b_0 + b_1 g_1(x) + b_2 g_2(x) + \cdots],$$

wo $e^{-x^2} g_n(x)$ den n^{ten} Differentialquotienten von e^{-x^2} bedeutet. Wenn man diese beiden Entwicklungen in das Integral einsetzt, so erhält man

$$f(u) = \sum a_\lambda b_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x) e^{-x^2} g_\mu(u-x) e^{-(u-x)^2} dx \quad \begin{pmatrix} \lambda, \mu = 0, 1, 2, \cdots \\ g_0(x) = 1 \end{pmatrix},$$

und nachdem man λ-mal partiell integriert hat,

$$f(u) = \sum a_\lambda b_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} g_{\lambda+\mu}(u-x) e^{-(u-x)^2} dx.$$

Unter dem Integralzeichen wird nun statt x eine neue Integrationsvariable $\xi = \sqrt{2}x - \frac{u}{\sqrt{2}}$ eingeführt. Das Integral geht dadurch über in

$$\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda+\mu}\left(\frac{u}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) e^{-\xi^2} d\xi,$$

und wenn man $\frac{u}{\sqrt{2}} = v$ schreibt,

$$\frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda+\mu}\left(\frac{v-\xi}{\sqrt{2}}\right) e^{-\xi^2} d\xi.$$

Nun gilt für die ganze rationale Funktion $g_n(x)$ eine Art von binomischem Satz, der folgendermaßen lautet:

$$\sqrt{2}^n g_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = g_n(x) + \binom{n}{1} g_{n-1}(x) g_1(y) + \binom{n}{2} g_{n-2}(x) g_2(y) + \cdots + g_n(y),^{*)}$$

wo $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\cdots$ die gewöhnlichen Binomialkoeffizienten bedeuten. Multipliziert man mit $e^{-\xi^2}$, setzt $x = v$, $y = -\xi$ und integriert über ξ von $-\infty$ bis $+\infty$, so verschwinden nach den bekannten Eigenschaften der Hermiteschen Polynome auf der rechten Seite alle Glieder mit Ausnahme des ersten und es ergibt sich demnach,

$$\frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda+\mu}\left(\frac{v-\xi}{\sqrt{2}}\right) e^{-\xi^2} d\xi = \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \frac{g_{\lambda+\mu}(v)}{\sqrt{2}^{\lambda+\mu}} \sqrt{\pi},$$

und damit

$$f(u) = f(\sqrt{2}v) = \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \sum a_\lambda b_\mu \frac{g_{\lambda+\mu}(v)}{\sqrt{2}^{\lambda+\mu}}$$

$$= \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}\left(a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \frac{g_1(v)}{\sqrt{2}} + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \frac{g_2(v)}{\sqrt{2}^2} + \cdots\right).$$

---

*) Das Binomialtheorem läßt sich unschwer durch einen Schluß von n auf $n+1$ beweisen. Man differentiiert die Gleichung nach x und ersetzt auf beiden Seiten die Ableitungen durch die Ausdrücke, die sich aus dem Bildungsgesetz der Funktionen g_n ergeben,

$$g_n'\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{x+y}{\sqrt{2}} g_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) + g_{n+1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$

und

$$g_\lambda'(x) = 2x g_\lambda(x) + g_{\lambda+1}(x).$$

Dann ergibt sich

$$\sqrt{2}^{n-1}\left(2\frac{x+y}{\sqrt{2}} g_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) + g_{n+1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= 2x\sqrt{2}^n g_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) + g_{n+1}(x) + \binom{n}{1} g_n(x) g_1(y) + \cdots + \binom{n}{1} g_1(x) g_{n-1}(y).$$

Jetzt vertauscht man x und y und addiert die Seiten der neuen Gleichung links und rechts dazu. Dann kann man

$$2(x+y)\sqrt{2}^n g_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$

auf beiden Seiten wegheben und erhält das Theorem für $n+1$.

Denken wir uns also die Funktion $f(u) = f(\sqrt{2v})$ in die Reihe entwickelt

$$f(\sqrt{2v}) = e^{-v^2}[c_0 + c_1 g_1(v) + c_2 g_2(v) + \cdots],$$

so ist

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} c_0 = a_0 b_0, \qquad \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{\pi}} c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ &\frac{\sqrt{2}^3}{\sqrt{\pi}} c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Durch diese Kette von Gleichungen läßt sich aus der Reihe der c_λ, wenn die Reihe der a_λ als bekannt vorausgesetzt wird, die Reihe der b_λ ermitteln (a_0 als von Null verschieden vorausgesetzt). Die Berechnung der Größen b_λ kann in der Form einer Division zweier Potenzreihen ausgeführt werden. Der Dividendus ist die Potenzreihe

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(c_0 + c_1 \sqrt{2}t + c_2(\sqrt{2}t)^2 + \cdots\right),$$

der Divisor die Reihe

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots.$$

Die Größen b_λ sind dann die Koeffizienten der Potenzreihe, die den Quotienten darstellt.

Die zweite Aufgabe läßt sich sogleich auf die erste zurückführen. Ist nämlich $a_\lambda = b_\lambda$ und sollen die Größen a_λ aus den Größen c_λ ermittelt werden, so läßt sich das ebenfalls durch die Kette der Gleichungen (I) ausführen, die in diesem Falle übergehen in

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} c_0 = a_0^2, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{2}\, c_1 = 2 a_0 a_1, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{2}^2 c_2 = a_1^2 + 2 a_0 a_2, \quad \text{etc.}$$

Oder zwischen den entsprechenden Potenzreihen muß die Beziehung bestehen

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(c_0 + c_1 \sqrt{2}t + c_2(\sqrt{2}t)^2 + \cdots\right) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)^2.$$

Das heißt, es ist aus der linken Seite die Quadratwurzel auszuziehen. Damit sind die Koeffizienten a_λ bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenwechsel eindeutig bestimmt.

Um die Konvergenz der betrachteten Entwicklungen braucht man sich, soweit physikalische Probleme in Betracht kommen, keine Sorgen zu machen. Denn bei diesen können wir immer annehmen, daß die Funktionen $k(x)$ und $\varphi(x)$ und demnach auch $f(x)$ für hinreichend große absolute Beträge von x Null sind, und damit ist die Konvergenz der Entwicklungen gegeben.

The Scattering of Sound Waves by a Cone.

By

H. S. Carslaw of Sydney (Australia).

The problem of the disturbance produced by a Point-Source of Sound in an Infinite Medium containing a Rigid Obstacle has been solved for the case when the obstacle is a Sphere*), and when it consists of two planes intersecting at any angle**). This paper contains the solution of the case when the obstacle is a Right Circular Cone of any angle.

§ 1.

The Spherical Polar Coordinates (r, θ, φ) are used, and the cone is given by $\theta = \theta_0$. The region occupied by the medium is defined by

$$0 < r < \infty,$$
$$0 < \theta < \theta_0,$$
$$0 < \varphi < 2\pi.$$

We require a solution of the equation

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

which, together with its first and second derivatives, is finite and single-valued throughout this region, except at the point (r', θ', φ'), where the source is situated.

*) Clebsch, *Über die Reflexion an einer Kugelfläche*, J. f. Math. 61, p. 195 (1863).

**) If the angle is $\frac{\pi}{m}$, m any positive integer, the ordinary method of images gives the solution. If the angle is $\frac{n\pi}{m}$, m and n any positive integers, the method of images in a Riemann's Space is applied. [Carslaw, *Some Multiform Solutions of the Partial Differential Equations of Physical Mathematics and their Applications*, Proc. Lond. Math. Soc. (1) 30, p. 135 (1899)]. In a later communication [Proc. Lond. Math. Soc. (2) 8, p. 365 (1912)] I have pointed out that a suitable solution of the equation of period 2α leads at once to the solution of the problem for the case of two planes intersecting at any angle α.

At (r', θ', φ'), u is to become infinite as

$$\frac{e^{-ikR}}{R}, \tag{2}$$

when R tends to zero.

At the surface of the cone $\theta = \theta_0$, we have the condition

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \left(\text{i. e. } \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0\right). \tag{3}$$

And since there is no reflexion at infinity*), u cannot involve terms of the type

$$e^{ikr}, \tag{4}$$

when r tends to infinity.

§ 2.

I shall examine first the case when the source is situated on the axis of the cone, so that $\theta' = 0$.

From symmetry it follows that u does not involve φ, and equation (1) takes the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right) + k^2 u = 0 \qquad (\mu = \cos\theta). \tag{5}$$

If the cone were absent and the medium filled all space, the solution would be

$$u_0 = \frac{e^{-ikR}}{R},$$

where

$$R = \sqrt{(r^2 + r'^2 - 2rr'\mu)}.$$

It is known that, with this notation,**)

---

*) Pockels called attention [in his book *Über die partielle Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$ *und deren Auftreten in der Mathematischen Physik*, p. 305] to the fact that the analytical problem is indeterminate in the case of an infinite region unless some condition is added of this nature.

Compare also a paper by Sommerfeld in Jahresb. D. Math. Ver. 22 (1913), entitled *Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung*.

**) Cf. Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, Bd. 1, p. 346; Macdonald, Proc. Lond. Math. Soc. (1) 32, p. 157 (1900). In this paper

$$K_n(ix) = \frac{\pi}{2\sin n\pi} e^{-\frac{1}{2}n i\pi}\left(J_{-n}(x) - e^{ni\pi}J_n(x)\right)$$

is taken as the Second Solution of Bessel's Equation of the n^{th} order.

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{2}{\sqrt{rr'}}\, e^{\frac{1}{4}i\pi} \sum_0^\infty e^{\frac{1}{2}ni\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, P_n(\mu) \qquad (r<r')$$

$$= \frac{2}{\sqrt{rr'}}\, e^{\frac{1}{4}i\pi} \sum_0^\infty e^{\frac{1}{2}ni\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}(ikr)\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr')\, P_n(\mu) \qquad (r'<r).$$

This series for u_0 will now be expressed as an integral over a certain path in the plane of the complex variable n.*)

Consider the integral

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C e^{\frac{1}{2}ni\pi} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, P_n(-\mu)}{\sin n\pi}\, dn \qquad (r<r'),$$

over the path given in Fig. 1, which we shall call the path C in the n-plane.

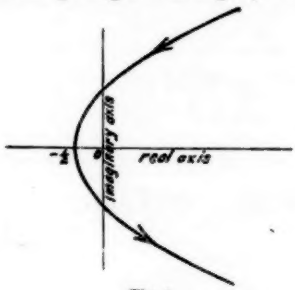


Fig. 1.

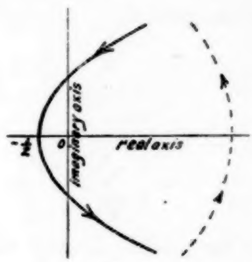


Fig. 2.

For large values of $|n|$ we have the following approximations:

$$(6)\qquad \begin{cases} J_n(x) = \dfrac{x^n}{2^n \Pi(n)}, \text{**)} \\[2ex] K_n(ix) = -\,e^{-\frac{1}{2}ni\pi} \dfrac{2^{n-1}\Pi(n)}{n x^n}, \text{***)} \\[2ex] P_n(-\mu) = \sqrt{\dfrac{2}{n\pi\sin\theta}}\, \sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(\pi-\theta) + \dfrac{\pi}{4}\right). \text{†)} \end{cases}$$

It will be seen, by substituting these values in the integrand, that the integral will vanish over the dotted portion of the path given in Fig. 2, this portion being supposed to represent a part of a circle of infinite radius joining up the ends of the path C in the n-plane.

---

*) Cf. Dougall, *The Determination of Green's Function by means of Cylindrical or Spherical Harmonics*, Proc. Edin. Math. Soc. 18, p. 33 (1900).

**) Nielsen, *Handbuch der Cylinderfunktionen*, p. 7.

***) Cf. Nielsen, *loc. cit.* p. 11.

†) Cf. Heine, loc. cit. Vol. 1, p. 175. Hobson, Phil. Trans. 187 (A), p. 489 (1896).

Indeed the integrand involves the term

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^n e^{\pm in(\theta-\pi)}, \qquad (r<r'),$$

the positive sign to be taken in the part of the plane below the real axis, and the negative sign in the part above that axis. Since $\theta<\pi$, this term is sufficient to cause the integral to vanish over the portion added to the path C.

Now the complete circuit of Fig. 2 encloses the poles given by

$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3, \text{ etc.}$$

It follows that

$$\frac{1}{2i\pi}\int e^{\frac{1}{2}ni\pi}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')\,J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi}\,P_n(-\mu)\,dn,$$

over the path C,

$$=\sum_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}ni\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')\,J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,P_n(-\mu)}{\pi\cos n\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_0^\infty e^{\frac{1}{2}ni\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,P_n(\mu),$$

since for positive integral values of n

$$P_n(\mu)=(-1)^n P_n(-\mu).\text{*)}$$

Therefore

$$(7)\quad u_0=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{rr'}}\int e^{\frac{1}{2}ni\pi}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')\,J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi}\,P_n(-\mu)dn \quad (r<r').$$

When $r'<r$, we have simply to interchange r and r' in the above expression.

§ 3.

The method of solving the problem consists in adding to the expression for u_0, given in (7), a finite and continuous solution of the equation (5), which is such that the sum of the two satisfies the remaining conditions.

*) The Zonal Harmonic $P_n(\mu)$ can be defined by the Hypergeometric Series $F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1-\mu}{2}\right)$. With this definition the relation

$$P_n(\mu)=(-1)^n P_n(-\mu)$$

follows for an integral value of n. Hobson, *loc. cit.* p. 463.

Consider the expression defined by the following integral over the path C in the n-plane,

$$(8) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{rr'}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \int e^{\frac{1}{2}ni\pi} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}(ikr') J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi}$$

$$\cdot \left\{ \frac{P_n(-\mu) \frac{d}{d\mu_0} P_n(\mu_0) - P_n(\mu) \frac{d}{d\mu_0} P_n(-\mu_0)}{\frac{d}{d\mu_0} P_n(\mu_0)} \right\} dn,$$

where $r < r'$.

When $r' < r$, r and r' are to be interchanged.

The expression for $P_n(\mu)$, when $|n|$ is large, [Cf. § 2, (6)], gives the following approximations:

$$\frac{d}{d\mu} P_n(\mu) = -\sqrt{\frac{2}{n\pi \sin^3\theta}} \left(n+\frac{1}{2}\right) \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{d}{d\mu} P_n(-\mu) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin^3\theta}} \left(n+\frac{1}{2}\right) \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pi-\theta) + \frac{\pi}{4}\right).$$

It will be found, as before, that the integral

$$\int e^{\frac{1}{2}ni\pi} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}(ikr') J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi} P_n(\mu) \frac{\frac{d}{d\mu_0} P_n(-\mu_0)}{\frac{d}{d\mu_0} P_n(\mu_0)} dn \qquad (r<r')$$

vanishes over the path at infinity of Fig. 2, and converges over the path C of Fig. 1.

It will be seen that the integrand contains the factor

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{r}{r'}\right)^n e^{\pm in(\theta - 2\theta_0)},$$

and in the region with which we are dealing

$$0 < \theta < \theta_0,$$

so that

$$\theta - 2\theta_0 < 0.$$

It follows that the expression for u given in (8) is finite, except at the point $(r', 0)$, where it becomes infinite as

$$\frac{e^{-ikR}}{R},$$

when R tends to zero.

Further all the elements of the integral added to u_0 in (8) satisfy the equation (5).

For if in (5) we put

$$u = R_n P_n(\mu), \quad \text{where } R_n \text{ is a function of } r \text{ only,}$$

R_n is given by

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_n}{dr} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_n = 0.$$

This reduces to Bessel's Equation on substituting

$$R_n = \frac{S_n}{\sqrt{r}}. \quad \text{[Cf. § 9]}$$

Therefore the expression for u given in (8) satisfies the conditions (1) and (2).

But it is clear that it gives

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = 0$$

at $\theta = \theta_0$, and that, when we take the proper form for $r > r'$, it satisfies the remaining condition (4).*)

§ 4.

We shall now show how to express this Contour Integral as an Infinite Series.

We have seen in § 3 that if we take the complete circuit of Fig. 2, the integral over the dotted portion of the path vanishes.

Thus we may take the complete circuit, instead of the path C, in our definition of u in (8).

Further it is known that the zeroes of

$$\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0},$$

regarded as a function of n, are all real and distinct.**)

---

*) When x is large,

$$K_n(ix) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-i\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

approximately. Cf. Nielsen, *loc. cit.* p. 154.

**) This is a special case of a Theorem proved by Macdonald, *Zeroes of the Spherical Harmonic $P_n^m(\mu)$ considered as a Function of n*, Proc. Lond. Math. Soc. (1) 31, p. 265 (1900).

That the zeroes are all real, follows from the integral

$$\int_{\mu_0}^{1} (1-\mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} \frac{dP_{n'}}{d\mu}\, d\mu = 0,$$

n, n' being two values of n for which $\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0}$ vanishes.

And these values of n are the only poles of the integrand in (8). Therefore

$$\int e^{\frac{1}{2}n i\pi} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}(ikr') J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi} \left[\frac{P_n(-\mu)\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0} - P_n(\mu)\frac{dP_n(-\mu_0)}{d\mu_0}}{\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0}}\right] dn,$$

over the complete circuit of Fig. 2,

$$= -2i\pi \sum_n e^{\frac{1}{2}n i\pi} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}(ikr') J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi} \frac{P_n(\mu)\frac{dP_n(-\mu_0)}{d\mu_0}}{\frac{d^2}{dn\, d\mu_0} P_n(\mu_0)},$$

the summation being taken over all the zeroes of

$$\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0}$$

which are greater than $-\frac{1}{2}$.*)

Therefore the solution of our problem, which we have found in (8) in the form of a Contour Integral, is equivalent to

$$(9)\quad u = -\frac{2i\pi}{\sqrt{rr'}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \sum_n e^{\frac{1}{2}n i\pi} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}(ikr') J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi} \frac{P_n(\mu)\frac{d}{d\mu_0}P_n(-\mu_0)}{\frac{d^2}{dn\, d\mu_0} P_n(\mu_0)},$$

when $r < r'$, the summation being taken over all the zeroes of

$$\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0}$$

which are greater than $-\frac{1}{2}$.

That they are all distinct, from the integral

$$\int_{\mu_0}^{1} (1-\mu^2)\left(\frac{dP_n}{d\mu}\right)^2 d\mu = (1-\mu_0^2)\frac{n(n+1)}{2n+1} P_n(\mu_0) \frac{d^2 P_n(\mu_0)}{dn\, d\mu_0},$$

n satisfying the same condition as above, since this shows that

$$\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0} \text{ and } \frac{d^2 P_n(\mu_0)}{dn\, d\mu_0}$$

cannot both vanish at the same time.

*) Since $P_n^{-m} = P_{-n-1}^{-m}$, all the zeroes of the function are included in this summation.

§ 5.

This result can be simplified by means of the theorem

(10) $$(1-\mu^2)\Big(P_n(\mu)\frac{d}{d\mu}P_n(-\mu)-P_n(-\mu)\frac{d}{d\mu}P_n(\mu)\Big)=-\frac{2}{\pi}\sin n\pi\ (n \text{ real}),$$

which we shall now prove.

Denoting $P_n(\mu)$ by v and $P_n(-\mu)$ by w, we have

$$\frac{d}{d\mu}\Big((1-\mu^2)\frac{dv}{d\mu}\Big)+n(n+1)v=0,$$

$$\frac{d}{d\mu}\Big((1-\mu^2)\frac{dw}{d\mu}\Big)+n(n+1)w=0.$$

It follows that

$$w\frac{d}{d\mu}\Big((1-\mu^2)\frac{dv}{d\mu}\Big)-v\frac{d}{d\mu}\Big((1-\mu^2)\frac{dw}{d\mu}\Big)=0.$$

Therefore

(11) $$(1-\mu^2)\Big(w\frac{dv}{d\mu}-v\frac{dw}{d\mu}\Big)=\text{constant}.$$

But it is known that*)

$$P_n(-\mu)=P_n(\mu)\cos n\pi-\frac{2}{\pi}\sin n\pi\, Q_n(\mu).$$

Therefore

(12) $$P_n(\mu)\frac{d}{d\mu}P_n(-\mu)-P_n(-\mu)\frac{d}{d\mu}P_n(\mu)$$
$$=\frac{2}{\pi}\sin n\pi\Big(Q_n(\mu)\frac{d}{d\mu}P_n(\mu)-P_n(\mu)\frac{d}{d\mu}Q_n(\mu)\Big).$$

Also it is known that**)

$$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\log\Big(\frac{1+\mu}{1-\mu}\Big)+\Big\{\Pi'(0)-\frac{\Pi'(n)}{\Pi(n)}\Big\}P_n(\mu)$$
$$-\sum_1^\infty\frac{\Pi(-n+r-1)\,\Pi(n+r)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)\,\Pi(r)\,\Pi(r)}\Big(\frac{1-\mu}{2}\Big)^r A_r,$$

where

$$A_r=\sum_1^r\frac{1}{k}.$$

Therefore we have

$$\lim_{\mu\to1}\Big((1-\mu^2)P_n(\mu)\frac{dQ_n(\mu)}{d\mu}\Big)=1,$$

and

$$\lim_{\mu\to1}\Big((1-\mu^2)Q_n(\mu)\frac{dP_n}{d\mu}\Big)=0.$$

---

*) Cf. Hobson, *loc. cit.* p. 473.

**) Cf. Macdonald, *loc. cit.* Proc. Lond. Math. Soc. (1) 31, p. 276 (1900).

Hence, from (11) and (12), we have

$$(1-\mu^2)\left[P_n(\mu)\frac{d}{d\mu}P_n(-\mu)-P_n(-\mu)\frac{d}{d\mu}P_n(\mu)\right]=-\frac{2}{\pi}\sin n\pi.$$

In particular, if n is such that

$$\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0}=0,$$

we have

$$(1-\mu_0^2)P_n(\mu_0)\frac{d}{d\mu_0}P_n(-\mu_0)=-\frac{2}{\pi}\sin n\pi. \tag{13}$$

Substituting from (13) in (9), our solution takes the form

$$u=\frac{4}{\sqrt{rr'}}\sum_n e^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\frac{P_n(\mu)}{(1-\mu_0^2)P_n(\mu_0)\dfrac{d^2}{dn\,d\mu_0}P_n(\mu_0)} \tag{14}$$

for $r<r'$, the summation being taken over the zeroes greater than $-\frac{1}{2}$ of

$$\frac{dP_n(\mu_0)}{d\mu_0}.$$

When $r'<r$, r and r' have to be interchanged in the abov

§ 6.

By a similar discussion the problem of the source at (r', θ', φ') can be solved.

We start as before with

$$u_0=\frac{e^{-ikR}}{R},$$

where R is the distance between (r, θ, φ) and (r', θ', φ').

With the usual notation

$$R=\sqrt{(r^2+r'^2-2rr'\cos\mathrm{y})}.$$

Then

$$u_0=\frac{2e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{rr'}}\sum_0^\infty e^{\frac{1}{2}ni\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')J_{n+\frac{1}{2}}(kr)P_n(\cos\mathrm{y})\qquad(r<r') \tag{15}$$

$$=\frac{2e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{rr'}}\sum_0^\infty e^{\frac{1}{2}ni\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')J_{n+\frac{1}{2}}(kr)(-1)^nP_n(-\cos\mathrm{y})$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{rr'}}\int e^{\frac{1}{2}ni\pi}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi}P_n(-\cos\mathrm{y})\,dn$$

over the path C of Fig. 1.

But it is known*) that

$$(16)\qquad P_n(-\cos\gamma) = P_n(-\mu)\,P(\mu')$$
$$+2\sum_1^{\infty}\frac{\Pi(n+m)\,\Pi(m-n-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)}\,P_n^{-m}(-\mu)\,P_n^{-m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi'),$$

when $\theta > \theta'$.

We have to interchange θ and θ', when $\theta < \theta'$.

The nature of the convergence is such that we may place the sign of summation before the symbol of integration, and we obtain

$$(17)\quad u_0 = \frac{2e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{rr'}}\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos m(\varphi-\varphi')\int e^{\frac{1}{2}ni\pi}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi}$$
$$\cdot\frac{\Pi(n+m)\,\Pi(m-n-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)}\,P_n^{-m}(-\mu)\,P_n^{-m}(\mu')\,dn,$$

where $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_m = 1$ $(m \geqq 1)$, $r < r'$, and $\theta' < \theta$.

§ 7.

Proceeding as in § 3, we are brought to the following function defined by the integral over the path C of Fig. 1

$$(18)\quad u = \frac{2}{\sqrt{rr'}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos m(\varphi-\varphi')\int e^{\frac{1}{2}ni\pi}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi}$$
$$\cdot\frac{\Pi(n+m)\,\Pi(m-n-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)}\,P_n^{-m}(\mu')\left(\frac{P_n^{-m}(-\mu)\frac{d}{d\mu_0}P_n^{-m}(\mu_0)-P_n^{-m}(\mu)\frac{d}{d\mu_0}P_n^{-m}(-\mu_0)}{\frac{d}{d\mu_0}P_n^{-m}(\mu_0)}\right)dn$$

for the case $r < r'$, $\theta' < \theta$.

*) Dr. Bromwich has pointed out to me that the Addition Theorem

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\mu)\,P_n(\mu')$$
$$+2\sum_1^{\infty}(-1)^m\frac{\Pi(n+m)\,\Pi(m-n-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)}P_n^{-m}(\mu)P_n^{-m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi')\cdots(0<\theta+\theta'<\pi)$$

can be deduced from the definitions of $P_n(z)$ and $P_n^{-m}(z)$ as Hypergeometric Series, for all values of n, real or imaginary.

If we put for θ, $\pi-\theta$ and for $(\varphi-\varphi')$, $\pi-(\varphi-\varphi')$, the condition $0<\theta+\theta'<\pi$ becomes $\theta'<\theta$, and we have

$$P_n(-\cos\gamma) = P_n(-\mu)\,P_n(\mu')$$
$$+2\sum_1^{\infty}\frac{\Pi(n+m)\,\Pi(m-n-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)}P_n^{-m}(-\mu)\,P_n^{-m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi'),$$

when $\theta'<\theta$.

The discussion in Heine's *Kugelfunktionen* is somewhat complicated.

The approximate value of $P_n^{-m}(\mu)$, when n is large*), shows that the integral over the path C of Fig. 1 is convergent, so that the expression for u in (18) is finite, except at the point (r', θ', φ'), where the source is placed. At that point it becomes infinite in the proper way.

Further all the elements added to u_0 in (18) satisfy the equation (5).

But it is clear that the condition at the surface of the cone,

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = \theta_0,$$

is satisfied; and when we take the proper form for $r > r'$, u satisfies the remaining condition (4).

We have thus obtained the solution of our problem in the form of a Contour Integral.

§ 8.

The path C of Fig. 1 can also in this case be altered to the complete circuit of Fig. 2, since the integral over the path at infinity vanishes.

If we assume**) that the zeroes of

$$\frac{d}{d\mu_0} P_n^{-m}(\mu_0)$$

are all real and distinct, the integral of (18) can be changed into an infinite series as in § 4.

The result is at once — by Cauchy's Theorem —

$$(19) \quad u = -\frac{4i\pi}{\sqrt{rr'}} e^{-\frac{1}{2}i\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m(\varphi - \varphi') \sum_n e^{\frac{1}{2}ni\pi} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) K_{n+\frac{1}{2}}(ikr') J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sin n\pi}$$

$$\cdot \frac{\Pi(n+m)\,\Pi(m-n-1)}{\Pi(n)\,\Pi(-n-1)} \; \frac{P_n^{-m}(\mu) P_n^{-m}(\mu') \dfrac{d}{d\mu_0} P_n^{-m}(-\mu_0)}{\dfrac{d^2}{dn\, d\mu_0} P_n^{-m}(\mu_0)}$$

for $r < r'$.

*) Cf. Hobson, *loc. cit.* p. 489. His results hold for n, real or imaginary.

**) It is known that the zeroes of $P_n^{-m}(\mu)$ are all real and distinct (Cf. Macdonald, Proc. Lond. Math. Soc. (1) 31, p. 265 (1900)). It would be interesting to have a proof of the corresponding result for the function $\frac{d}{d\mu} P_n^{-m}(\mu)$. With the other boundary condition usually associated with these Green's Functions, viz., $u = 0$, we are brought to a result similar to (18), the denominator involving $P_n^{-m}(\mu_0)$, and we obtain the Infinite Series form immediately.

Now it is known that the expression

$$(20)\qquad (1-\mu^2)\Big[P_n^{-m}(\mu)\frac{d}{d\mu}P_n^{-m}(-\mu)-P_n^{-m}(-\mu)\frac{d}{d\mu}P_n^{-m}(\mu)\Big]$$

is independent of μ. And it is easy to show that when m is not zero or a positive integer its value is $\frac{2}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)}$.

This follows from the equation

$$(21)\quad \pi P_n^m(\mu)=\Pi(m-n-1)\,\Pi(m+n)\Big[\sin m\pi\, P_n^{-m}(-\mu)-\sin n\pi\, P_n^{-m}(\mu)\Big].$$

Substituting in (20) for $P_n^{-m}(-\mu)$, with the functions which now enter, namely $P_n^{-m}(\mu)$ and $P_n^m(\mu)$, we can easily proceed to the limit $\mu=1$.

In § 5 we have proved that when $m=0$ the expression has the same value.

The case of any positive integral m can also be shown to agree with the above using the result for $Q_n^m(\mu)$ given by Macdonald*), and starting with the equation**)

$$(22)\qquad P_n^{-m}(-\mu)=P_n^{-m}(\mu)\cos(n-m)\pi-\frac{2}{\pi}\sin(n-m)\pi\, Q_n^{-m}(\mu).$$

Applying the result of (20) to (19) we find that our solution for $r<r'$ can be written in the form:

$$(23)\qquad u=\frac{8}{\sqrt{rr'}}\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos m(\varphi-\varphi')$$

$$\cdot\sum_n e^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,P_n^{-m}(\mu)\,P_n^{-m}(\mu')}{(1-\mu_0^2)\,P_n^{-m}(\mu_0)\dfrac{d^2}{dn\,d\mu_0}P_n^{-m}(\mu_0)}.$$

We have to interchange r and r' for the case $r>r'$; and $a_0=\frac{1}{2}$, $a_m=1\ (m\geqq 1)$.

§ 9.

It should perhaps be added that these results can be obtained without the use of Contour Integrals, but in a less rigorous fashion, in the following manner:***)

---

*) Macdonald, Proc. Lond. Math. Soc. (1) 31, p. 274 (1899).

**) Cf. Hobson, Phil. Trans. (A) 187, p. 473 (33), (1896).

***) This discussion follows very closely the argument which Macdonald uses in his solution of the case of Diffraction by a Wedge of any Angle (*Electric Waves*, p. 186). Apart from the assumption as to the nature of the series (24), it seems to me that the

For the source at $(r', 0)$ we start with the equation (5).

The surface condition (4) will be satisfied, if

$$u = \sum R_n P_n(\mu), \tag{24}$$

where R_n is a function of r only, and the n's are the zeroes greater than $-\frac{1}{2}$ of

$$\frac{d}{d\mu_0} P_n(\mu_0) = 0.$$

Assuming that the series in (24) can be differentiated term by term, the equation for R_n is

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_n}{dr} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_n = 0.$$

Putting $R_n = \frac{S_n}{\sqrt{r}}$, we have

$$\frac{d^2 S_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dS_n}{dr} + \left(k^2 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right) S_n = 0.$$

In the region $r < r'$, we take

$$\sqrt{r}\, R_n = J_{n+\frac{1}{2}}(kr),$$

since u is to remain finite as r tends to zero.

In the region $r > r'$, we take

$$\sqrt{r}\, R_n = K_{n+\frac{1}{2}}(ikr),$$

since there is to be no term in e^{ikr}, when r tends to infinity.

Thus we are led to

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{r}\, u &= \sum A_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, P_n(\mu) && (r < r') \\ &= \sum B_n K_{n+\frac{1}{2}}(ikr)\, P_n(\mu) && (r' < r). \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Both the series in (25) are to converge and be identical when $r = r'$, except when $\theta = 0$; and for this value they are to diverge.

---

proof does not establish that the function diverges at $(r', 0)$ in the required manner; i. e. as $\frac{e^{-ikR}}{R}$. Also from the fact that the constant C_n of (26) does not involve k for the case $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, it does not necessarily follow that it is independent of k for all angles.

Thus we require

$$A_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr') = B_n K_{n+\frac{1}{2}}(ikr');$$

and the solution would be given by

$$(26)\quad \begin{cases} \sqrt{rr'}\,u = \sum C_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')\, P_n(\mu) & (r<r') \\ \qquad = \sum C_n K_{n+\frac{1}{2}}(ikr)\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr')\, P_n(\mu) & (r'<r). \end{cases}$$

Now in the case of reflexion at a plane surface $\left(\text{i. e., the case } \theta_0 = \frac{\pi}{2}\right)$, it will be seen that C_n does not involve k.

It is thus sufficient to determine C_n for the case $k=0$.

In other words, we require the solution of the Potential Problem

$$(27)\quad \begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (0<r<\infty),\ (0<\theta<\theta_0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mu} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = \theta_0, \end{cases}$$

while u is to become infinite as $\frac{1}{R}$, when R tends to zero, at $(r', 0)$.

This problem can be solved by analysis similar to that which Macdonald uses for the potential problem, when the cone is at potential zero*); or the method of § 2 of this paper can be adopted.

It will be found that the solution is as follows:

$$(28)\quad u = \frac{2}{r'} \sum_n \left(\frac{r}{r'}\right)^n \frac{P_n(\mu)}{(1-\mu_0^2)\, P_n(\mu_0) \dfrac{d^2}{dn\, d\mu_0} P_n(\mu_0)} \qquad (r<r'),$$

where the summation is taken over the zeroes greater then $-\frac{1}{2}$ of

$$\frac{d}{d\mu_0} P_n(\mu_0) = 0.$$

But from the approximate values for the Bessel's Functions, we have

$$\operatorname*{Lt}_{k\to 0} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, K_{n+\frac{1}{2}}(ikr') = \frac{1}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{r}{r'}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} \qquad (r<r').$$

Therefore C_n is given by the equation

$$\frac{C_n}{\sqrt{rr'}} \frac{1}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{r}{r'}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} = \frac{2}{(1-\mu_0^2)} \frac{r^n}{r'^{\,n+1}} \frac{1}{P_n(\mu_0) \dfrac{d^2}{dn\, d\mu_0} P_n(\mu_0)}.$$

*) Cf. Trans. Camb. Phil. Soc. 18, p. 292 (1900).

Thus

$$C_n = \frac{4\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi}}{(1-\mu_0^2)\,P_n(\mu_0)\,\dfrac{d^2}{dn\,d\mu_0}\,P_n(\mu_0)}\,.$$

Also from (26) for $r < r'$,

$$(29)\quad u = \frac{4}{\sqrt{rr'}}\sum_n \left(n+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi}\,J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,K_{n+\frac{1}{2}}(ikr')\,\frac{P_n(\mu)}{(1-\mu_0^2)P_n(\mu_0)\dfrac{d^2}{dn\,d\mu_0}P_n(\mu_0)}\,.$$

When $r' < r$, we have simply to interchange r and r'.

This result agrees with that of § 5 (14) for the source at a point in the axis. The general case can be treated in the same way.

§ 10.

As has been mentioned above (Footnote § 8), the case when the surface condition is $u = 0$ can be solved by the method of Contour Integrals used in this paper. Indeed the analysis is simpler and the assumption made in § 8 is not required, as the nature of the roots of $P_n^{-m}(\mu)$ is known.

The result for the case of a source on the axis with surface condition $u = 0$ was given by me without proof some years ago.*)

Until tables of the values of n and of the corresponding Harmonics are available, it does not seem possible to reduce the solutions to a numerical form.

*) Phil. Mag. (6) 20, p. 690 (1910).

Untersuchungen über spezielle Minimalflächen.

Von

E. Stübler in Stuttgart.

Einleitung.

1. Diejenigen *Minimalflächen, welche sich auf Rotationsflächen abwickeln lassen*, hat zuerst Bour angegeben, Ribaucour hat sie näher untersucht und H. A. Schwarz*) hat sie in Zusammenhang gebracht mit der allgemeinen Weierstraßschen Form der Gleichungen der Minimalflächen

$$(1)\qquad \begin{gathered} x = \Re\int(1-s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds, \quad y = \Re\int i(1+s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds, \\ z = 2\Re\int s\,\mathfrak{F}(s)\,ds, \end{gathered}$$

indem er zeigte, daß man auf Rotationsflächen abwickelbare Flächen erhält, wenn

$$(2)\qquad \mathfrak{F}(s) = Cs^{m-2}$$

gesetzt wird. Auch A. Enneper ist bei einem speziellen Problem auf Flächen gestoßen, die mit den genannten identisch sind, ohne daß Enneper dies bemerkte.

Hier sollen noch einige für diese Flächen charakteristische Eigenschaften angegeben, ferner von ihnen abgeleitete Flächen untersucht werden.

Von den Evolutenflächen (Zentraflächen) läßt sich zeigen, daß sie eine singuläre Kurve konstanter erster Krümmung besitzen.

Von den Evolventenflächen werden diejenigen untersucht, deren Normalen solche geodätische Linien der Minimalflächen berühren, welche bei der Abwicklung auf Rotationsflächen in die Meridiane übergehen. Diese Flächen, welche offenbar W-Flächen sind, besitzen ebene und sphärische Krümmungslinien, und zu jeder Minimalfläche außer derjenigen, für welche $m = 1$ ist, gibt es unter den genannten Evolventenflächen eine, welche

*) H. A. Schwarz, Miszellen aus dem Gebiete der Minimalflächen, VII.

eine Schar ähnlich liegender Kugeln rechtwinklig durchschneidet. Diese Fläche ist für einen ganzzahligen, die Zahl Eins übersteigenden Wert von m von der Ordnung $2m + 2$, während der Minimalfläche selbst die höhere Ordnungszahl $(m+1)^2$ zukommt.

Im Abschnitt II werden Minimalflächen bestimmt, welche mit den auf Rotationsflächen abwickelbaren gewisse Eigenschaften gemeinsam haben. So gibt es außer jenen noch andere Minimalflächen, welche ein Isothermensystem konstanter geodätischer Krümmung besitzen. Dieselben sind den in H. A. Schwarz „Bestimmung einer speziellen Minimalfläche" (Preisschrift, Berlin 1867) und speziell im Nachtrag behandelten Flächen verwandt. Denn wie dort sind die Flächengleichungen durch elliptische Funktionen der Parameter rational ausdrückbar und es verlaufen auch gerade Linien auf den einfachsten unter diesen Minimalflächen. Schließlich sind noch alle Minimalflächen angegeben, welche von Zylinderflächen berührt werden, die alle einander ähnlich und einer Ebene parallel gerichtet sind; dabei sollen aber die Berührungsebenen irgend zweier Zylinderflächen für zwei entsprechende Erzeugende dieselbe Neigung gegen jene Ebene haben.

I.

Die auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen und von ihnen abgeleitete Flächen.

§ 1.

Allgemeine Eigenschaften der auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen. Die Kurven, welche bei der Abwicklung in Parallelkreise übergehen.

2. Ist in (2) m nicht gleich Null, dann kann man $C = 1$ setzen Wäre nämlich $C = e^{\alpha i}$, dann braucht man nur die Fläche um den Winkel $\frac{\alpha}{m}$ um die z-Achse zu drehen, um den Fall $C = 1$ zu erhalten.*) Ersetzt man ferner s durch seinen reziproken Wert und zugleich m durch $-m$, dann ändert sich x nicht, während y und z das Vorzeichen wechseln; es genügt also, positive Werte von m in Betracht zu ziehen. Wir setzen, indem wir die Behandlung der Minimalschraubenflächen, für welche $m = 0$ ist, verschieben,

$$\mathfrak{F}(s) = s^{m-2}. \tag{3}$$

Führt man noch die Substitution

$$s = \varrho e^{iv} \tag{4}$$

*) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces I, 217.

ein, dann erhält man die *Gleichungen*

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{\varrho^{m-1}}{m-1}\cos(m-1)v - \frac{\varrho^{m+1}}{m+1}\cos(m+1)v,\\
y &= -\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}\sin(m-1)v - \frac{\varrho^{m+1}}{m+1}\sin(m+1)v,\\
z &= \frac{2\varrho^{m}}{m}\cos mv^{*}).
\end{aligned}
$$

Offenbar gelten die Gleichungen für $m = 1$ nicht mehr. Die Flächen sind ihrer Gestalt nach sehr verschieden, je nachdem $m \gtrless 1$ ist und für den Grenzfall $m = 1$, den einzigen rationalen Wert von m, für welchen die Minimalfläche transzendent wird, empfiehlt sich wiederum eine gesonderte Behandlung.

Das Quadrat des Linienelements $d\sigma$ der Minimalfläche (5) ist:

$$(6)\qquad d\sigma^2 = (1+\varrho^2)^2\varrho^{2m-4}(d\varrho^2+\varrho^2 dv^2).$$

Die Kurven $\varrho = \text{const.}$, welche kurz mit (ϱ) bezeichnet werden mögen, gehen also bei der Abwicklung auf Rotationsflächen in die Parallelkreise, die Kurven (v), die geodätische Linien sind, in die Meridiane über.

Wird noch

$$(7)\qquad \varrho = \operatorname{ctg}\frac{u}{2}$$

gesetzt (übrigens soll ϱ, wo dies wünschenswert ist, beibehalten werden), dann sind die Richtungskosinus der Flächennormalen:

$$(8)\qquad X = \sin u\cos v,\quad Y = \sin u\sin v,\quad Z = \cos u,$$

und die Tangentialebene der Fläche hat vom Anfangspunkt O des Koordinatensystems den Abstand

$$(9)\qquad Xx + Yy + Zz = \frac{2\varrho^m}{m(m^2-1)}(m-\cos u)\cos mv.$$

Nach (8) sind die Kurven $v = \text{const.}$ oder kurz (v) der Minimalfläche solche, längs denen zur z-Achse senkrechte Zylinderflächen berühren, also die zu den Niveaulinien $z = \text{const.}$ konjugierten Kurven. Sie können auch als Schattengrenzen für Parallelstrahlen aufgefaßt werden, welche in einer zur z-Achse senkrechten Richtung einfallen, während die Kurven (u) oder (ϱ) Isophoten für in der Richtung der z-Achse einfallende Strahlen sind; das zu diesen konjugierte System ist orthogonal zu den Niveaulinien.

3. Da nach (9) der Abstand der Tangentialebene von O sich als Produkt aus einer Funktion von u mit einer Funktion von v ausdrücken läßt, schließt Ribaucour: (Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle, Mém. cour. Brüssel 1882, S. 217), daß die Minimalfläche

---

*) Vgl. Bour, J. Ec. Pol. cah. 39, S. 99f. (1862).

die Hüllfläche von unter sich ähnlichen Zylinderflächen ist; die Charakteristiken sind die geodätischen Linien (v). Ist aber eine Kurve, längs deren sich zwei Flächen berühren, geodätische Linie auf der einen, so ist sie es auch auf der andern. Wir schließen daher weiter, daß die Kurven (v) isogonale Trajektorien der Zylindererzeugenden oder allgemeine Schraubenlinien sind. Nun sind die Filarevolventen der allgemeinen Schraubenlinien ebene Kurven; es gibt daher *Evolventenflächen* der Minimalfläche, welche sich aus solchen ebenen Kurven zusammensetzen und also eine Schar ebener Krümmungslinien besitzen. Da die Zylinderflächen, welche die Minimalflächen umhüllen, ähnlich sind, muß jede dieser ebenen Krümmungslinien zu einer unter ihnen oder zu irgend einer ihrer Parallelkurven ähnlich sein.

Die Gleichungen der angedeuteten Evolventenflächen werden weiter unten angegeben.

4. Von den auf der Minimalfläche, ihrer Evolventenfläche und auch auf den beiden Evolutenflächen verlaufenden Kurven zeigen insbesondere die Parameterkurven (u) und (v) beachtenswerte Eigenschaften.

Die auf der Minimalfläche liegenden Kurven (u) oder (ϱ) haben konstante geodätische Krümmung, weil sie bei der Biegung der Minimalfläche in eine Rotationsfläche in Parallelkreise übergehen. Legt man daher Berührungsebenen an die Minimalfläche längs einer der Kurve (ϱ), so umhüllen diese eine abwickelbare Fläche, durch deren Ausbreitung in die Ebene die Kurve (ϱ) in einen Kreis übergeht. Diese Berührungsebenen bilden nach (8) mit der xy-Ebene den konstanten Winkel u; die abwickelbare Fläche ist daher eine Böschungsfläche. Der Schnitt dieser Böschungsfläche mit der xy-Ebene ist, außer wenn $\cos u = m$, eine Epi- oder Hypozykloide; denn die Gleichung der Tangente dieser Schnittkurve hat nach (8) und (9) die Form:

$$x \cos v + y \sin v = \frac{U}{m^2 - 1} \cos mv, \quad \text{wo} \quad U = \frac{2 \varrho^m (m - \cos u)}{m \sin u}.$$

Der geodätische Kreis (ϱ) geht durch die Spitzen der zyklischen Kurve, für welche $\cos mv = 0$ ist (nach der dritten der Gleichungen (5)). Ferner zeigen die beiden ersten der Gleichungen (5), daß die Kurve (ϱ) die zyklische Kurve in den Spitzen orthogonal schneidet (diese beiden Gleichungen bedeuten eine Epi- oder Hypotrochoide, wenn ϱ konstant ist und für $\cos mv = 0$ erhält man Scheitel derselben).

Nun geht durch Ausbreitung der Böschungsfläche mit dem Böschungswinkel u über der Epi- oder Hypozykloide, als deren natürliche Gleichung leicht aus der Gleichung der Tangente sich ergibt

$$R^2 + m^2 s^2 = U^2,$$

in die Ebene diese Epi- oder Hypozykloide in eine andere zyklische Kurve über, deren natürliche Gleichung man erhält, wenn man R in der letzten Gleichung durch $R' \cos u$ ersetzt:

$$(10) \qquad R'^2 \cos^2 u + m^2 s^2 = U^2.$$

Die Kurve (ϱ) der Minimalfläche durchschneidet auch nach der Ausbreitung der Böschungsfläche in die Ebene die Spitzen der zyklischen Kurve (10) rechtwinklig, und da sie in einen Kreis übergehen soll, so wird man vermuten, daß dies der Basiskreis der Epi- oder Hypozykloide ist, wenn sie als Rollkurve erzeugt gedacht wird. In der Tat stimmt dessen Radius

$$(11) \qquad R_g = \frac{2\varrho^m}{\sin u (m + \cos u)}$$

genau überein mit dem Radius der geodätischen Krümmung der auf der Minimalfläche verlaufenden Kurve (ϱ), welchen man leicht aus (6) ableiten kann.

Als besondere Fälle der Kurven (ϱ) oder (u) sind die folgenden hervorzuheben:

$\cos u = 0$. An Stelle der Böschungsfläche tritt ein Zylinder, dessen Querschnitt eine zyklische Kurve bildet.

$\cos u = -m$. Die abgewickelte Kurve (10) ist eine gemeine Zykloide und da die entsprechende Kurve der Minimalfläche durch die Abwicklung in deren Basisgerade übergehen muß, ist sie eine geodätische Linie.

$\cos u = m$. In diesem Fall, der bei den Betrachtungen ausgenommen wurde, ist $U = 0$. Die Böschungsfläche ist ein Rotationskegel mit O als Spitze.

Bei der Ausbreitung in die Ebene geht die Rückkehrkante der Böschungsfläche in die Evolute der Epi- oder Hypozykloide (10) über; deren natürliche Gleichung ist:

$$(12) \qquad R^2 \cos^2 u + m^2 s^2 = \frac{m^2 U^2}{\cos^2 u}.$$

Dieselbe soll mit Z bezeichnet werden. Später soll Gebrauch gemacht werden vom Durchmesser des rollenden Kreises, welcher diese Epi- oder Hypozykloide Z erzeugt. Derselbe ist

$$(13) \qquad \frac{m U}{(m - \cos u) \cos u} = \frac{2\varrho^m}{\sin u \cos u},$$

wenn der Fall ausgeschlossen wird, wo $\cos u = m$ ist. Zwei entgegengesetzt gleichen Werten von $\cos u$ entspricht dann zwar dieselbe zyklische Kurve Z, aber verschiedene Werte für den Durchmesser des rollenden

Kreises entsprechend der doppelten Möglichkeit, eine zyklische Kurve als Rollkurve zu erzeugen. Der Basiskreis hat aber denselben Halbmesser

$$\frac{2m\varrho^m}{\sin u \cos u (m + \cos u)}.$$

5. Unter den soeben betrachteten Kurven (ϱ) der Minimalflächen (5), für die auch die Hauptkrümmungsradien

$$R_1 = -R_2 = \frac{1}{2}\varrho^{m-2}(\varrho^2+1)^2 = \frac{2\varrho^m}{\sin^2 u} \tag{14}$$

einen konstanten Wert haben, sei noch diejenige hervorgehoben, für welche der absolute Wert des Hauptkrümmungsradius ein Minimum ist. Man findet

$$\cos u = -\frac{1}{2} m.$$

Diesem Wert von u bzw. ϱ entspricht eine reelle *Kurve maximalen Krümmungsmaßes*, wenn m zwischen -2 und $+2$ liegt. Im Grenzfall $m = \pm 2$, welcher der Enneperschen Minimalfläche entspricht, artet die Kurve in den Anfangspunkt ($\varrho = 0$) aus. Die zyklischen Kurven (10) und (12) sind für den betreffenden Wert von u Astroiden.

Die Eigenschaft, eine solche Kurve konstanter Maximalkrümmung zu besitzen, kommt unter den reellen Minimalflächen nur den auf Rotationsflächen abwickelbaren zu. Denn da für den Hauptkrümmungsradius der allgemeinen Minimalfläche (1):

$$\frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{F}(s)\mathfrak{F}_0(s_0)}\,(ss_0+1)^2$$

längs einer solchen Kurve der Differentialquotient sowohl nach s wie nach s_0 verschwinden muß, ergibt sich:

$$\frac{s\mathfrak{F}'(s)}{\mathfrak{F}(s)} = \frac{s_0\mathfrak{F}_0'(s_0)}{\mathfrak{F}_0(s_0)} = -\frac{4ss_0}{ss_0+1}$$

zur Bestimmung der die Fläche charakterisierenden Funktion $\mathfrak{F}$ sowie des Wertes von ss_0, welcher der Kurve der Maximalkrümmung zugehört. Die Gleichungen sind nur zu befriedigen durch:

$$\mathfrak{F}(s) = Cs^{m-2}; \quad \frac{ss_0-1}{ss_0+1} = \cos u = -\frac{m}{2}.$$

§ 2.

Die Zentraflächen der auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen.

6. Der Kurve der Maximalkrümmung auf der Minimalfläche entsprechen auf den *Zentraflächen* singuläre Kurven. Die Gleichungen der einen dieser Flächen oder die Koordinaten des einen Hauptkrümmungsmittelpunktes sind:

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\varrho^{m-1}}{m-1}\cos(m-1)v - \frac{\varrho^{m+1}}{m+1}\cos(m+1)v + (\varrho^{m-1}+\varrho^{m+1})\cos v,\\
y_1 &= -\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}\sin(m-1)v - \frac{\varrho^{m+1}}{m+1}\sin(m+1)v + (\varrho^{m-1}+\varrho^{m+1})\sin v,\\
z_1 &= \frac{2\varrho^{m}}{m}\cos mv + \frac{1}{2}(\varrho^{m+2}-\varrho^{m-2}),
\end{aligned}
$$

während für die Koordinaten des zweiten Hauptkrümmungsmittelpunktes je dem letzten Glied der Gleichungen (15) ein Minuszeichen beizufügen ist. Auf diesen Zentraflächen sollen nicht bloß die singulären Kurven, für welche

$$\cos u = -\frac{1}{2}m$$

ist, sondern allgemeiner die Kurven, für welche ϱ konstant ist, näher behandelt werden. Irgend eine dieser Kurven (ϱ) läuft zur Minimalfläche parallel, da jeder ihrer Punkte den gleichen Abstand R_1 von der Minimalfläche hat. Legt man daher durch alle Punkte der Kurve Parallelebenen zu den entsprechenden Tangentialebenen der Minimalfläche, so berühren diese die Kurve (ϱ) der Zentrafläche und umhüllen nach (8) eine Böschungsfläche, die parallel und daher — entsprechendes gilt für alle Böschungsflächen mit Ausnahme der Zylinderflächen — kongruent zu derjenigen Böschungsfläche ist, welche die Minimalfläche längs der Kurve (ϱ) berührt. Der Wert $\varrho = 1$ oder $u = \frac{1}{2}\pi$ sei zunächst ausgenommen. Verschiebt man die Kurve (ϱ) der Zentrafläche parallel zur z-Achse um das Stück $\frac{-R_1}{\cos u}$ $\left(\text{für die zweite Zentrafläche } \frac{+R_1}{\cos u}\right)$, dann kommt sie vollständig auf die letztere Böschungsfläche zu liegen, und man erhält sie, wenn man von der Kurve (ϱ) der Minimalfläche aus das Stück

$$R_1 \operatorname{tg} u = \frac{2\varrho^m}{\sin u \cos u}$$

nach der einen, bzw. für den zweiten Zentraflächenmantel nach der andern,

Seite auf den Erzeugenden der Böschungsfläche abträgt. Die angegebene Strecke ist, wenn nicht $\cos u = 0$ oder $= m$ ist, nach (13) genau gleich dem Durchmesser des rollenden Kreises, welcher die Epi- oder Hypozykloide Z erzeugt, in die die Rückkehrkante durch Ausbreitung der Böschungsfläche in die Ebene übergeht. Weil bei dieser Deformation die Kurve (ϱ) der Minimalfläche nach dem Früheren in den Scheitelkreis der Epi- oder Hypozykloide Z übergeht, kann man leicht die Natur derjenigen Kurve untersuchen, in welche sich die Kurven (ϱ) der Zentraflächen transformieren. Man hat nur auf den Tangenten von Z vom Scheitelkreis aus eine konstante Strecke gleich dem Durchmesser des rollenden Kreises, der Z erzeugt, abzuschneiden. Nach wohlbekannten Sätzen über die zyklischen Kurven erhält man so wieder eine Epi- oder Hypozykloide, welche mit Z den Basiskreis gemein hat, während der rollende Kreis doppelt so groß ist wie derjenige, welcher Z zugehört; ein Teilbogen der Kurve beginnt in einer Spitze von Z und endigt zwei Teilbögen von Z überspannend in der übernächsten Spitze. Ein Teilbogen der Kurve, die dem zweiten Zentraflächenmantel zugehört, geht ebenso von der zweiten Spitze von Z bis zur vierten.

Der Fall wo $u = \frac{1}{2}\pi$ ist, war ausgenommen worden. Die Kurve $\varrho = 1$ der Minimalfläche und die der Zentraflächenmäntel liegen dann auf parallelen Zylinderflächen. Durch Abwicklung derselben geht die erstere Kurve, wie schon gezeigt, in einen Kreis über, die beiden letzteren, wie man durch eine einfache Rechnung beweisen kann, in gemeine Zykloiden, die man durch Abrollen eben dieses Kreises auf einer Geraden entstehen lassen kann.

Ebenso bildet der Fall $\cos u = m$ eine Ausnahme. Die entsprechende Kurve auf jedem der beiden Zentraflächenmäntel liegt auf einem Rotationskegel und geht — die zum Beweis nötige Rechnung lassen wir wieder fort — durch Abwicklung dieses Kegels in eine Kardioide über.

Für $\cos u = -\frac{1}{2}m$ wird Z eine Astroide; da dann $R_1 \operatorname{tg} u$ halb so groß ist wie ihr Basiskreisradius, gehen die entsprechenden Kurven auf den Zentraflächen durch Abwicklung der Böschungsfläche in gerade Strecken, die Verbindungslinien entgegengesetzter Spitzen der Astroide, über. Die Kurven auf den Zentraflächen sind also in diesem Fall geodätische Linien auf der Böschungsfläche, ihre Hauptnormalen sind Normalen der Böschungsfläche, während sie die Zentrafläche berühren. Die erste Krümmung der Kurven ist daher gleich der geodätischen Krümmung bezüglich der zugehörigen Zentrafläche, und da diese für alle Kurven (ϱ) gleich $\frac{1}{2R_1}$ ist, so sind die betreffenden *singulären Kurven der Zentraflächen Raumkurven*

konstanter erster Krümmung. (Die erste Krümmung $\frac{1}{R}$ der allgemeinen Kurve (ϱ) auf der Zentrafläche erhält man aus den Formeln

$$\frac{\cos i}{R} = \frac{1}{2R_1}, \quad \frac{\sin i}{R} = \frac{\sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial v}}{\sum \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2} = \frac{1}{2R_1}\,\frac{m+2\cos u}{\sin u \sin \frac{1}{2} m v}.$$

wo i den Winkel zwischen der Schmiegungsebene der Kurve und der Tangentialebene der Zentrafläche, $X_1\, Y_1\, Z_1$ die Richtungskosinus ihrer Normale bedeuten.)

In den Mathematischen Annalen Band 66 (1909), Seite 539 hat Herr E. Salkowski alle Kurven konstanter Krümmung bestimmt, welche geodätische Linien auf Böschungsflächen sind. Man sieht leicht, daß sie genau mit den hier gefundenen Kurven übereinstimmen, wenn man

$$\varrho = \sqrt{\frac{2-m}{2+m}}$$

in die Gleichungen (15) der Zentrafläche einführt. Ebendort Seite 556 und 557 sind Zeichnungen von solchen Kurven zu finden.

§ 3.

Evolventenflächen der auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen.

7. Es sollen nun die angedeuteten *Evolventenflächen* der auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen (5), deren eine Schar von Krümmungslinien (v) aus ebenen Kurven bestehen muß, bestimmt und näher untersucht werden. Weil die Fläche eine W-Fläche ist, läßt sich das Quadrat des Bogenelements der Evolutenfläche (5) nach Weingarten in v und den Krümmungsradien r und r' ausdrücken, und man hat nach (6):

$$dr^2 + e^{2\int \frac{dr}{r-r'}} dv^2 = (1+\varrho^2)^2 \varrho^{2m-4}(d\varrho^2 + \varrho^2 dv^2).$$

Daraus läßt sich r (zugleich die Bogenlänge der Kurven (v) auf der Minimalfläche), dann mittels $r - r'$ auch r' finden. Man hat:

$$r - r' = \frac{2\varrho^m}{\sin u\,(m + \cos u)},$$

in der Tat muß $r - r'$ mit dem Halbmesser R_g der geodätischen Krümmung der auf der Minimalfläche verlaufenden Kurven (ϱ) übereinstimmen. Vgl. (11).

Ferner ist

$$\frac{dr}{d\varrho} = \varrho^{m-2}(\varrho^2+1),$$

und also

$$(16)\qquad r = \frac{2\varrho^m}{m^2-1}\,\frac{m-\cos u}{\sin u},\qquad r' = \frac{2\varrho^m}{m^2-1}\,\frac{\sin u}{m+\cos u},$$

wo allerdings auf der rechten Seite beider Gleichungen noch ein und dieselbe Integrationskonstante beigefügt werden darf. Dieselbe ist auch von v unabhängig. Denn die Orthogonaltrajektorien (ϱ) der geodätischen Linien (v) auf der Minimalfläche müssen denjenigen Kurven auf der Evolventenfläche entsprechen, längs denen der Hauptkrümmungsradius r konstant ist. Vgl. etwa Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie § 122, Seite 234. Wir wählen aber die Integrationskonstante überhaupt gleich Null, indem wir unter den zueinander parallelen Evolventenflächen diejenige herausgreifen, die, wie sich sofort zeigen wird, in O einen singulären Punkt besitzt. Die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Evolventenfläche findet man dann in der Form:

$$\xi = x - r\,\frac{\frac{\partial x}{\partial \varrho}}{\frac{dr}{d\varrho}}.$$

So wird:

$$(17)\qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{2\varrho^m}{m^2-1}\cos mv\cos v\sin u,\\ \eta &= \frac{2\varrho^m}{m^2-1}\cos mv\sin v\sin u,\qquad \text{wo } \varrho = \operatorname{cotg}\frac{u}{2},\\ \zeta &= \frac{2\varrho^m}{m^2-1}\cos mv\left(\cos u - \frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Die Krümmungslinien (v) sind alle zueinander ähnlich, und da sie in Ebenen liegen, welche durch die z-Achse gehen, so erhält man das zu ihnen konjugierte System, d. h. die zweite Schar von Krümmungslinien, wenn man von den Punkten der z-Achse Berührungskegel an die Fläche legt. Die Berührungskurven schneiden die Kurven (v) und daher auch die Kugelerzeugenden senkrecht, sind also sphärische Kurven. Die Kugeln, auf welchen sie liegen, haben ihre Mittelpunkte auf der z-Achse und schneiden die W-Fläche überall rechtwinklig. (F. Joachimsthal, J. f. Math. 23 (1842), S. 350 und 54 (1857), S. 183; Vgl. Darboux, Leçons I, S. 112.)

Dreht man die Kurven (v) um die z-Achse, so entstehen lauter Orthogonaltrajektorien des Kugelsystems. In jeder Ebene durch die z-Achse liegen unendlich viele, die alle ähnlich und bezüglich O ähnlich gelegen

sind. Es werden daher auch die Schnittkreise der Ebene mit den Kugeln, welche die Orthogonaltrajektorien zu dem System ähnlicher Kurven sind, bezüglich O ähnlich liegen und wir haben den Satz:

Die W-Fläche, welche eine Minimalfläche als einen Mantel der Zentrafläche besitzt, schneidet ein System ähnlich liegender Kugeln rechtwinklig.

8. Da auf der Minimalfläche die Kurven $z = \text{const.}$ das zu den Kurven (v) konjugierte System bilden, muß für die Schar der *sphärischen Krümmungslinien* $\varrho^m \cos mv$ konstant sein. Setzt man

$$\varrho^m \cos mv = \frac{1}{2} m(m^2-1)a, \tag{18}$$

dann wird die Gleichung des betrachteten Kugelsystems

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta+a)^2 = m^2 a^2. \tag{19}$$

Um die sphärischen Krümmungslinien noch näher charakterisieren zu können, leiten wir zunächst noch einige allgemeine Eigenschaften der W-Flächen (17) ab, welche sie als räumliches Analogon der ebenen Sinusspiralen erscheinen lassen.

In einem Punkt der Kurve (v), welcher also in einer durch die z-Achse gehenden Ebene E von der Neigung v gegen die xz-Ebene liegt, bildet die Tangentialebene mit E den Winkel mv. Daraus kann man folgern:

Dreht man ein System von solchen in bezug auf O ähnlich liegenden W-Flächen um die z-Achse um den Winkel α, dann gehören die Schnittkurven des ursprünglichen und des gedrehten Systems zum Teil zu den Kurven (v) und in diesen schneiden sich die Systeme überall unter dem Winkel $m\alpha$*). Die Flächen haben also dieselbe Eigenschaft, welche unter den ebenen Kurven der Sinusspiralen charakteristisch ist. Entsprechendes gilt von den sphärischen Krümmungslinien einer und derselben Fläche. Dieselben müssen daher durch stereographische Projektion in ähnliche bzw. inverse Sinusspiralen übergehen, wenn als Zentrum der Projektion einer der beiden Schnittpunkte der betreffenden Kugel mit der z-Achse gewählt wird. (18) ist die Gleichung dieser Sinusspiralen in Polarkoordinaten, wenn die sphärische Krümmungslinie vom Punkt mit den Koordinaten $0, 0, -(m+1)a$ auf die Durchmesserebene der Kugel, welche zur xy-Ebene parallel ist, projiziert wird.

---

*) Dieselbe Eigenschaft kommt offenbar auch denjenigen Flächen zu, welche aus den betrachteten durch Inversion hervorgehen, wenn das Inversionszentrum im Koordinatenanfangspunkt gewählt wird. Auch noch andere Flächen dieser Eigenschaft lassen sich angeben, nämlich Zylinderflächen, deren Querschnitt eine Sinusspirale ist, samt ihren Inversen.

Die sphärischen Bilder der Krümmungslinien der Minimalfläche (5) haben nach Ribaucour, Étude des élassoides Seite 219 dieselbe Eigenschaft, wie die hier besprochenen sphärischen Kurven; jene entsprechen aber Sinusspiralen mit dem Index $\frac{1}{2}m$, während diesen der Index m zugehört*).

9. Die Kurven der W-Flächen, für welche ϱ, also nach (16) auch r und r', konstant ist, liegen auf Rotationskegeln mit der z-Achse als Achse und projizieren sich auf die xy-Ebene als Rosenkurven (vgl. etwa G. Loria, Ebene Kurven 134—137).

Die Kurve, für welche $r = 0$, also nach (16)

$$\varrho^2 = \frac{1+m}{1-m}$$

oder $\cos u = m$ ist, ist offenbar eine singuläre Kurve der W-Fläche und sie gehört auch der Minimalfläche (5) zu. Sie liegt wie schon bemerkt auf einem Rotationskegel, dessen Erzeugende den Winkel $\arcsin m$ mit der z-Achse bilden, und welcher Enveloppe der Kugelschar (19) ist. Die Minimalfläche berührt nach (9) diese Kegelfläche längs der fraglichen Kurve. Durch Abwicklung des Kegels in die Ebene geht die Kurve, wie früher gezeigt wurde, in einen Kreis über. (Die Kurve ist daher invers zu der geodätischen Linie des Rotationskegels auf dem sie liegt. Schließlich kann sie auch nach W. Blaschke, Monatsh. für Math. u. Ph. 1908, S. 202 als Ort der Krümmungsmittelpunkte einer sphärischen Schraubenlinie aufgefaßt werden.)

Man kann daher die betrachteten W-Flächen, deren einer Zentramantel eine Minimalfläche ist, wie folgt, erzeugen:

Auf einem Drehungskegel konstruiere man eine Kurve, welche durch die Kegelspitze geht und durch Abwicklung des Kegels in die Ebene in einen Kreis übergeht. Durch die Punkte dieser Kurve lege man Ortho-

---

*) Man kann auch (durch direkte Ausrechnung) beweisen:

Ordnet man die Minimalfläche vom Parameter $\frac{1}{2}m$, wo m von 1 und 2 verschieden sein muß, derjenigen vom Parameter m durch parallele Normalen zu, dann sind in entsprechenden Punkten die Kurven (ϱ) und (v) der ersten Fläche parallel zu den Krümmungslinien der zweiten.

Dieselben Eigenschaften wie die sphärischen Abbildungen der Krümmungslinien der Minimalfläche haben alle Kurven der Kugel, für welche $\varrho^n \cos n(v-v_0)$ konstant ist. Diese Kurven durchschneiden die Parallelkreise (ϱ) unter dem Winkel $n(v-v_0)$ und dasselbe gilt wegen der Konformität der sphärischen Abbildung für die entsprechenden Kurven der Minimalfläche bezüglich der Kurven (ϱ). Die Systeme der Kurven auf der Minimalfläche, für welche $\varrho^n \cos n(v-v_0)$ bzw. $\varrho^n \sin n(v-v_0)$ konstant ist, sind daher orthogonal.

gonaltrajektorien zu der dem Kegel einbeschriebenen Kugelschar; diese sind die ebenen Krümmungslinien der W-Fläche.

Für $m > 1$ wird der Kegel imaginär; dafür ist die Schnittkurve mit der xy-Ebene $\left(\cos u = \frac{1}{m}\right)$ reell, nämlich eine Rosenkurve, und man kann von ihr ausgehend die W-Fläche erzeugen.

10. Die Gleichung der Polarebene des Anfangspunktes O bezüglich der Kugel (19) stimmt überein mit der letzten Gleichung der Minimalfläche (5). Einem Strahl aus O durch die sphärische Krümmungslinie (18) muß daher eine zur xy-Ebene parallel laufende Tangente der Minimalfläche bezüglich derselben Kugel konjugiert sein. Überhaupt besteht eine polare Zuordnung zwischen einer Kegelfläche, welche O zur Spitze hat und durch eine sphärische Krümmungslinie geht, und der Kurve, welche eine zur xy-Ebene parallele Ebene aus der Minimalfläche ausschneidet. Für den Krümmungsmittelpunkt der Kurven (v) auf der W-Fläche, welche eine ähnlich liegende Kreisschar senkrecht durchschneiden, ergibt sich aus der angegebenen polaren Zuordnung eine einfache Konstruktion, welche derjenigen für den Krümmungsmittelpunkt der Huyghensschen Tractrix ganz analog ist; der Krümmungsmittelpunkt ist nämlich der Pol der Verbindungslinie des Kurvenpunktes mit dem Ähnlichkeitspunkt der Kreisschar bezüglich des durch den Kurvenpunkt gehenden Kreises. In der Tat muß der Krümmungskreis zwei konsekutive Kreise der Schar senkrecht durchschneiden, der Krümmungsmittelpunkt also auf deren Chordale liegen.

So erhält man direkt die Kurve $v = 0$ der Minimalfläche als Evolute der entsprechenden Kurve auf der W-Fläche:

Die Normalen längs einer allgemeinen Krümmungslinie (v) der W-Fläche bilden eine Böschungsfläche mit dem Böschungswinkel mv gegen die Ebene jener Krümmungslinie und sie projizieren sich auf diese Ebene als Normalen von (v) oder als Tangenten der Kreise, welche die Kurve (v) orthogonal durchschneiden. Über jedem dieser Kreise kann man ein Rotationshyperboloid konstruieren, welches den Kreis als Kehlkreis hat und dessen Erzeugende gegen die Ebene des Kreises die Neigung mv haben. Eine einzige von diesen Erzeugenden wird dann eine Normale der W-Fläche sein. Zu der Regelschar, welcher diese Normale angehört, konstruiere man unendlich viele Regelscharen, die bezüglich O ähnlich liegen, dann bilden sie eine Linienkongruenz, welcher die genannte Böschungsfläche zugehört. Die eine Brennfläche dieser Kongruenz ist aber der allen den ähnlich liegenden Hyperboloiden gemeinsame Berührungskegel aus O. Weil nun die Rückkehrkante der Böschungsfläche, das heißt die Kurve (v) der Minimalfläche, auf dieser Brennfläche liegen muß — die zweite Brennfläche fällt ins Unendliche — so gilt:

Die Linie (v) der Minimalfläche liegt auf einem Kegel zweiter Ordnung*). Vgl. Ribaucour a. a. O. S. 223.

Dieser Kegel, dessen Spitze in O liegt, berührt den Rotationskegel um die z-Achse mit dem erzeugenden Winkel $\arccos m$, und die Erzeugenden, welche in die xy-Ebene, die eine der Symmetriebenen des Kegels, fallen, bilden den Winkel $2mv$ miteinander. Die Kurve (v) der Minimalfläche ist als Schraubenlinie auf diesem Kegel mit der konstanten Neigung mv gegen seine durch die z-Achse gehende Symmetrieebene der Form nach bestimmt (nur muß man die in die xy-Ebene fallenden Kegelerzeugenden, welche ja auch die angegebene Eigenschaft haben, ausnehmen).

11. Um für einen ganzzahligen Wert von m die *Ordnung der W-Fläche* feststellen zu können, suchen wir zunächst den Parameter ϱ aus den Gleichungen einer ebenen Krümmungslinie $m+2^{\text{ter}}$ Ordnung zu eliminieren; diese Gleichungen seien in der Form

$$x = \frac{2m\varrho^{m+1}}{\varrho^2+1}, \qquad z = \varrho^m \frac{(m-1)\varrho^2-(m+1)}{\varrho^2+1}$$

vorausgesetzt. Man kann ϱ in x und z ausdrücken:

$$\varrho = \frac{m}{m-1}\,\frac{z \pm \sqrt{\delta}}{x},$$

wo

$$\delta = z^2 + \frac{m^2-1}{m^2}x^2$$

ist. Setzt man den angegebenen Wert von ϱ in eine der Kurvengleichungen ein, dann kann man die entstehende Gleichung zwischen x und z auf die Form bringen:

$$\text{(20)} \qquad (m-1)x^m[(m-1)^{m-1}(x^2+z^2)+(-m-1)^{m+1}]$$
$$= 2m^m\left[-z^{m+1}+\binom{m+1}{2}z^{m-1}\delta+3\binom{m+1}{4}z^{m-3}\delta^2+\cdots\right].$$

Das letzte Glied in der Klammer auf der rechten Seite ist entweder $(m^2-1)z\delta^{\frac{m}{2}}$ oder $m\delta^{\frac{m+1}{2}}$, je nachdem m eine gerade oder ungerade ganze positive Zahl ist. (Um das Verhalten der Kurve (20) im Anfangspunkt sowie im Unendlichen zu charakterisieren, geben wir noch die Gleichungen der entsprechenden Näherungskurven an:

$$\left(\frac{x}{2m}\right)^m = \left(\frac{-z}{m+1}\right)^{m+1}, \qquad \left(\frac{x}{2m}\right)^m = \left(\frac{z}{m-1}\right)^{m-1}.)$$

*) Ebenso liegen die entsprechenden Kurven der Zentraflächen je auf einem Kegel 4. Ordnung.

Will man jetzt aus (20) die Gleichung der W-Fläche ableiten, so hat man nach (17) x und z bzw. durch

$$\frac{m(m^2-1)\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2\cos mv} \quad \text{und} \quad \frac{m(m^2-1)\zeta}{2\cos mv}$$

zu ersetzen, dabei ist zu beachten, daß aus $\eta = \xi \operatorname{tg} v$ folgt:

$$2\cos mv = \frac{(\xi+\eta i)^m + (\xi-\eta i)^m}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

So erhält man

$$(21)\quad (m-1)^{m+1}m^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(\xi^2+\eta^2)^m+(-m-1)^{m-1}[(\xi+\eta i)^m+(\xi-\eta i)^m]^2=$$

$$\frac{2m^{m+1}}{m+1}\left[-\zeta^{m+1}+\binom{m+1}{2}\zeta^{m-1}\delta+3\binom{m+1}{4}\zeta^{m-3}\delta^2+\cdots\right]\cdot[(\xi+\eta i)^m+(\xi-\eta i)^m],$$

wo

$$\delta = \zeta^2 + \frac{m^2-1}{m^2}(\xi^2+\eta^2)$$

ist, also eine Gleichung $2m+2^{\text{ten}}$ Grades.

Für einen beliebigen rationalen Wert $\frac{p}{q}$ von m tritt an Stelle der Gleichung (20):

$$(20')\qquad (p-q)^q x^p[(-p-q)^{p+q}+q^{2q}(p-q)^{p-q}(x^2+z^2)^q]$$

$$= p^p q^q[(-qz-p\sqrt{\delta})^q(z-\sqrt{\delta})^p + (-qz+p\sqrt{\delta})^q(z+\sqrt{\delta})^p],$$

und statt (21) erhält man zunächst:

$$(21')\quad (p+q)^q[(p-q)^{p+q}p^{2q}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^q(\xi^2+\eta^2)^p+(-p-q)^{p+q}q^{4q}N^2]$$

$$-p^{p+q}q^{2q}[(-q\zeta-p\sqrt{\delta})^q(\zeta-\sqrt{\delta})^p+(-q\zeta+p\sqrt{\delta})^q(\zeta+\sqrt{\delta})^p]\cdot N=0,$$

wo

$$N=\left\{(\xi+\eta i)^{\frac{p}{q}}+(\zeta-\eta i)^{\frac{p}{q}}\right\}^q,$$

$$\delta = \zeta^2+\frac{p^2-q^2}{p^2}(\xi^2+\eta^2).$$

Die linke Seite der Gleichung enthält die irrationale Funktion

$$N=\left\{(\xi+\eta i)^{\frac{p}{q}}+(\xi-\eta i)^{\frac{p}{q}}\right\}^q.$$

Die bezüglich der Gleichung

$$\varepsilon^q-1=0$$

mit den Wurzeln 1 und ε_μ $(\mu = 1, \cdots, q-1)$ „konjugierten" Funktionen sind offenbar:

$$\left\{(\xi + \eta i)^{\frac{p}{q}} + \varepsilon_\mu (\xi - \eta i)^{\frac{p}{q}}\right\}^q \qquad \mu = 1, \cdots, q-1.$$

Setzt man für die ursprüngliche Funktion der Reihe nach die $q-1$ konjugierten Funktionen in die linke Seite der Gleichung (21′), die abgekürzt

$$\varphi\left[\left\{(\xi + \eta i)^{\frac{p}{q}} + (\xi - \eta i)^{\frac{p}{q}}\right\}^q\right]$$

geschrieben werden möge, ein, so entstehen die $(q-1)$ zu φ konjugierten Funktionen φ_μ, und die Gleichung

$$\varphi\, \varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_{q-1} = 0$$

ist rational vom Grad $2q(p+q)$.

Die Ordnung der W-Fläche ist daher nach Ribaucour a. a. O. S. 221 gleich der Klasse der Minimalfläche.

§ 4.

Grenzfälle.

12. Für $m = 1$ erhält man aus den Weierstraßschen Formeln (1), wenn wieder $s = \varrho e^{iv}$ gesetzt wird, als Gleichungen der entsprechenden Minimalfläche:

$$\text{(22)} \qquad \begin{aligned} x &= \log \varrho - \frac{1}{2}(\varrho^2 \cos 2v - 1), \\ y &= -v - \frac{1}{2}\varrho^2 \sin 2v, \\ z &= 2\varrho \cos v, \end{aligned}$$

und daraus

$$\text{(23)} \qquad d\sigma^2 = \frac{(\varrho^2+1)^2}{\varrho^2}(d\varrho^2 + \varrho^2 dv^2).$$

Die Bogenlänge der Kurven (v) ist also:

$$\text{(24)} \qquad r = \log \varrho + \frac{1}{2}(\varrho^2 + 1) + c.$$

Die Gleichungen der Evolventenfläche sind:

$$\text{(25)} \qquad \begin{aligned} \xi &= \varrho^2 \cos^2 v \,\frac{\log \varrho^2 + 2c}{\varrho^2 + 1} - c, \\ \eta &= \varrho^2 \cos v \sin v \,\frac{\log \varrho^2 + 2c}{\varrho^2 + 1} - v, \\ \zeta &= -\varrho \cos v \left(\frac{\log \varrho^2 + 2c}{\varrho^2 + 1} - 1\right). \end{aligned}$$

Sowohl die Krümmungslinien $v = \text{const.}$, wie die zweite Schar $\varrho \cos v = \text{const.}$ sind ebene Kurven; denn man hat:

$$(\xi + c) \sin v = (\eta + v) \cos v \tag{26}$$

und

$$\frac{\xi + c}{\varrho^2 \cos^2 v} + \frac{\zeta}{\varrho \cos v} = 1. \tag{27}$$

Die Ebenen der ersten Schar umhüllen eine Zylinderfläche, dessen Querschnitt eine gemeine Zykloide ist, diejenigen der zweiten Schar einen parabolischen Zylinder. Die Kurven (v) sind wieder alle einander ähnlich. Auf jeder dieser Zylinderflächen liegt eine singuläre Kurve der Evolventenfläche (25). Für die eine ist

$$r' = \log \varrho - \frac{\varrho^2 + 1}{2\varrho^2} + c$$

gleich Null und sie ist zugleich eine allgemeine Schraubenlinie auf einem parabolischen Zylinder, dessen Gleichung

$$\zeta^2 = 4 \frac{(\varrho^2 - 1)^2}{\varrho^2} (\xi + c)$$

ist, bezüglich der xy-Ebene, während für die andere r (s. Gleichung (24)) verschwindet.

Die Minimalfläche wird längs der geodätischen Kreise (ϱ) von Böschungsflächen berührt, deren Schnittkurven mit der xy-Ebene gemeine Zykloiden mit den Gleichungen:

$$x = \log \varrho + \frac{1}{2} (\varrho^2 + 1) + \sin^2 v, \qquad y = -v - \sin v \cos v$$

sind. Für diese Kurven (ϱ) und die entsprechenden auf den Zentraflächen gelten daher dieselben Betrachtungen, welche über die Flächen $m \gtrless 1$ in Nr. 4 angestellt worden sind. Die Kurve, für welche $\varrho = 1$ ist, liegt auf einer Zylinderfläche, deren Querschnitt eine gemeine Zykloide ist. Der Kurve maximaler Krümmung $\varrho = \frac{1}{\sqrt{3}}$ entsprechen auf den Zentraflächen Raumkurven konstanter erster Krümmung, von denen die eine der Ort der Krümmungsmittelpunkte der andern ist. Vgl. E. Salkowski, Math. Ann. 69, S. 567.

Während sonach die Kurven (ϱ) sich als Sonderfälle denen der Flächen, für welche $m \lesseqgtr 1$ ist, einordnen lassen, ist dies bei den Kurven (v) nicht mehr der Fall.

Gegen die Ebene E, deren Gleichung durch (26) gegeben ist, hat die auf der Minimalfläche liegende allgemeine Schraubenlinie (v) die Neigung v. Diese Kurve liegt auf den beiden Zylinderflächen, deren Gleichungen sind:

$$y + v + \frac{1}{4} z^2 \operatorname{tg} v = 0.$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \sin 2v - (y + v) \cos 2v = \sin 2v \log \frac{z}{2 \cos v}.$$

Die Erzeugenden beider Zylinderflächen sind parallel zur xy-Ebene und haben gegen die Ebene E die Neigung $\pi - v$ und v. Zwei durch einen Punkt von (v) gehende Erzeugende g_1 und g_2 liegen also mit der Tangente t von (v) in diesem Punkt auf einem Rotationskegel und die Schnittpunkte $P_1 P_2 T$ von $g_1 g_2 t$ mit E bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Die Schnittkurven der beiden Zylinderflächen mit der Ebene E haben daher in entsprechenden Punkten P_1 und P_2 aufeinander senkrechte Tangenten $P_1 T$ und $P_2 T$; die beiden Kurven gehen durch Parallelverschieben in der Richtung $P_1 P_2$ in Systeme orthogonaler Trajektorien über. Offenbar kann man in entsprechender Weise aus jeder allgemeinen Schraubenlinie Orthogonaltrajektorien*) ableiten. In der Tat sind hier die beiden Schnittkurven der Zylinderflächen mit E eine Parabel und eine Exponentialkurve. Die Subnormale der ersteren und die Subtangente der letzteren ist konstant gleich $2 \cos v$. Bezugsachse ist dabei die Schnittlinie von E mit der xy-Ebene.

Da der Schnittpunkt T der Tangente t an die Kurve (v) der Minimalfläche mit der Ebene E die entsprechende Kurve der Evolventenfläche (25) beschreibt, so kann man die letztere Kurve leicht aus einer Parabel und einer Exponentialkurve konstruieren.

Die Parabelachse ist Asymptote der Exponentialkurve. Für $c = -1$ müssen die Ordinaten der Kurven im Brennpunkt der Parabel beide gleich $2 \cos v$ sein. Irgend eine Parallele zur Parabelachse schneidet die Kurven in P_1 und P_2; die Tangenten in P_1 und P_2, die aufeinander senkrecht stehen, schneiden sich im Punkt T der gesuchten Kurve und in der Mitte zwischen P_1 und P_2 liegt der zugehörige Krümmungsmittelpunkt. Verschiebt man die beiden erzeugenden Kurven nach entgegengesetzten Seiten in der Richtung der Parabelachse um eine beliebige Strecke l, dann beschreibt T eine zur ursprünglichen Kurve parallele Kurve im Abstand l. Diese Kurve gehört dann der Evolventenfläche zu, für welche

$$c = \pm \frac{l}{\cos v} - 1$$

ist.

---

*) Allgemeiner gilt: Projiziert man eine Raumkurve, deren Tangenten gegen eine feste Ebene E eine konstante Neigung v haben, in zwei verschiedenen Richtungen auf E, aber so, daß die Projektionsstrahlen ebenfalls die Neigung v gegen E haben, (also etwa in der Richtung zweier Kurventangenten), so entstehen durch Verschiebung der Projektionen der allgemeinen Schraubenlinie in der Richtung $P_1 P_2$, wo P_1 und P_2 die Projektionen eines Punktes P sein sollen, isogonale Trajektoriensysteme.

Damit hat man die Mittel, die Kurven (v) auf der Evolventenfläche wie auf der Minimalfläche selbst auf einfachem Wege zu erzeugen.

13. Besonders zu behandeln ist schließlich noch der Fall, welcher dem Wert Null von m entspricht.

Setzt man in (10)

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{a + ib}{2s^2},$$

wo a von 0 verschieden sein möge, und wieder:

$$s = \operatorname{cotg} \frac{u}{2} e^{iv},$$

dann entstehen die Gleichungen der *Minimalschraubenflächen*:

$$(28) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{a \cos v + b \cos u \sin v}{\sin u}, \\ y &= \frac{a \sin v - b \cos u \cos v}{\sin u}, \\ z &= a \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} + bv. \end{aligned}$$

Aus der hieraus sich ergebenden Gleichung

$$Xx + Yy + Zz = a\left(1 + \cos u \log \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) + bv \cos u$$

kann man schließen, daß die Fläche die Enveloppe einer verschraubten Zylinderfläche ist, deren Querschnitt eine Kettenlinie ist und deren Erzeugende senkrecht zur z-Achse gerichtet sind. Die Berührungskurve (v) der Zylinderfläche mit der Minimalschraubenfläche ist als geodätische Linie wieder eine allgemeine Schraubenlinie. Die Minimalschraubenfläche (28) ist der eine Zentraflächenmantel der Dinischen Schraubenfläche konstanten negativen Krümmungsmaßes:

$$(29) \qquad \begin{aligned} \xi &= a \sin u \cos v, \\ \eta &= a \sin u \sin v, \\ \zeta &= a\left(\log \operatorname{tg} \frac{u}{2} - \cos u\right) + bv, \end{aligned}$$

deren Hauptkrümmungsradien

$$r = -\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{ctg} u, \qquad r' = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} u$$

sind. Die Krümmungslinien $v = \text{const.}$ sind Traktrizen, die zweite Schar, für welche $a \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} + bv \, (= z)$ konstant ist, besteht aus Kugelloxodromen. Vgl. Bianchi, a. a. O. S. 262.

II.

Über Minimalflächen, welche mit den auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen verwandt sind.

§ 5.

Minimalflächen mit einem Isothermensystem konstanter geodätischer Krümmung.

14. Es liegt nahe im Anschluß an die Darlegung hervorstechender Eigenschaften der auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen nach anderen Minimalflächen zu suchen, welche die eine oder andere Eigenschaft mit jenen gemein haben. So soll untersucht werden, ob die angegebenen Eigenschaften der Parameterkurven (u) und (v) unseren Minimalflächen charakteristisch sind oder nicht. Die geodätische Krümmung dieser Linien war konstant, bzw. Null.

Wir fragen zunächst nach allen Minimalflächen, deren *Kurven* (v) d. h. die Berührungskurven von parallel zur xy-Ebene verlaufenden Zylinderflächen, *geodätische Linien* und also allgemeine Schraubenlinien sind. A. Enneper hat diese Frage in den Abh. d. K. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen, Bd. 29 (1882): Flächen mit besonderen Meridiankurven Seite 65 behandelt.

Das Quadrat des Bogenelements der allgemeinen Minimalfläche (1) erhält, wenn abweichend vom Früheren $s = e^{u+iv}$ gesetzt wird, die Form $\lambda(du^2 + dv^2)$. Die geodätische Krümmung der Kurven (v) einer Fläche, für welche

$$d\sigma^2 = e^{2\varphi}(du^2 + dv^2) \tag{30}$$

ist, wird nun $-e^{-\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$. Dieselbe kann offenbar nur verschwinden, wenn φ nur von u abhängig, die Fläche also auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist. A. Ennepers Ergebnisse a. a. O. Seite 67 müssen sich daher auf eine einfachere Form bringen lassen, was sich bestätigt, wenn man die dort nur angedeuteten Quadraturen wirklich ausführt.

Die geodätische Krümmung der Kurven (v) einer Fläche des Bogenelementes (30), wo jetzt u und v eine beliebige Bedeutung haben mögen, ist konstant, d. h. von (u) unabhängig, wenn

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \tag{31}$$

ist. Aus der Symmetrie bezüglich u und v folgt der bekannte Satz, daß die beiden Systeme von auf einer Fläche verlaufenden Isothermen konstante

geodätische Krümmung haben müssen, wenn dies bei dem einen System zutrifft und die Integration der Differentialgleichung (31) ergibt, daß das Quadrat des Bogenelements auf die Form

$$d\sigma^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U+V)^2} \tag{32}$$

gebracht werden kann, wo U eine Funktion von u, V von v ist.

Außer den Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes (vgl. Bianchi, Differentialgeom. § 91 und § 235) sind hier geeignete Beispiele die Orthogonalflächen von Kugelbüscheln. (Für die Flächen, welche zu Rotationsflächen, Kegelflächen, Zylinderflächen invers sind, erhält V in (32) bzw. die Form: $\cos v$, $\frac{1}{2}(e^v + e^{-v})$, v^2.)

Wir suchen nun alle Minimalflächen zu bestimmen, welche *Isothermensysteme konstanter geodätischer Krümmung* besitzen. Alle Isothermensysteme der Minimalfläche (1) erhält man, wenn man für s eine beliebige analytische Funktion von $w = u + iv$, für s_0 dieselbe Funktion von $w_0 = u - iv$ setzt, wodurch im Bogenelement (30)

$$e^{\varphi} = (ss_0 + 1)\sqrt{\mathfrak{F}(s)\,\mathfrak{F}_0(s_0)\,\frac{ds}{dw}\,\frac{ds_0}{dw_0}}$$

wird. Die Bedingung (31) kann man in den unabhängigen Veränderlichen $w\,w_0$ schreiben:

$$\Re i\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2\right\} = 0. \tag{33}$$

Zur Abkürzung werde

$$\sqrt{\mathfrak{F}(s)\,\frac{ds}{dw}} = \frac{1}{f(w)} \tag{34}$$

gesetzt, sodaß

$$e^{\varphi} = \frac{ss_0 + 1}{f(w)\,f_0(w_0)}$$

ist, dann wird nach (33)

$$\Re i\left\{2\left(\frac{ds}{dw}\right)^2 \frac{s_0^2}{(ss_0+1)^2} - \left[\frac{2f'(w)}{f(w)}\,\frac{ds}{dw} + \frac{d^2 s}{dw^2}\right]\frac{s_0}{ss_0+1} + \frac{f''(w)}{f(w)}\right\} = 0. \tag{35}$$

Aus dieser Gleichung ist f und s als Funktion von w zu bestimmen.

15. Wir lösen zunächst allgemeiner die Funktionalgleichung

$$\Re i\{s_0^2 \cdot \varphi_1(s) + s_0 \cdot \varphi_2(s) + \varphi_3(s)\} = 0.$$

Wenn man diese Gleichung zweimal nach s und s_0 differentiiert, erhält man:

$$\Re i\{2s_0\varphi_1'(s) + \varphi_2'(s)\} = 0$$

und

$$\Re i\{\varphi_1''(s)\} = 0.$$

Also wird

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(s) &= a_{11}s^2 + a_{12}s + a_{13},\\
(36)\qquad \varphi_2(s) &= a_{21}s^2 + a_{22}s + a_{23},\\
\varphi_3(s) &= a_{31}s^2 + a_{32}s + a_{33},
\end{aligned}
$$

wo a_{ik} und a_{ki} konjugiert komplexe, die a_{ii} reelle Konstante sind.

Man hat also hier nach (35):

$$
\begin{aligned}
2\left(\frac{ds}{dw}\right)^2 - s\left[\frac{2f'(w)}{f(w)}\frac{ds}{dw} + \frac{d^2s}{dw^2}\right] + s^2\,\frac{f''(w)}{f(w)} &= \varphi_1,\\
(37)\qquad -\left[\frac{2f'(w)}{f(w)}\frac{ds}{dw} + \frac{d^2s}{dw^2}\right] + 2s\,\frac{f''(w)}{f(w)} &= \varphi_2,\\
\frac{f''(w)}{f(w)} &= \varphi_3.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich zunächst je eine Differentialgleichung für s und f:

$$
(38)\quad 2\left(\frac{ds}{dw}\right)^2 = \varphi_1 - s\varphi_2 + s^2\varphi_3, \quad -\frac{2f'(w)}{f(w)} = \left(\frac{d^2s}{dw^2} + \varphi_2 - 2s\varphi_3\right)\frac{dw}{ds}.
$$

Ferner kann man nach einer Differentiation mittels (37) f ein zweites Mal eliminieren; so entsteht:

$$
\begin{aligned}
(39)\qquad & 2\left(\frac{ds}{dw}\right)^2\left(\frac{d^3s}{dw^3}\frac{dw}{ds} + \varphi_2'(s) - 2s\varphi_3'(s)\right)\\
& + \left(-\frac{d^2s}{dw^2} - \varphi_2 + 2s\varphi_3\right)\left(3\,\frac{d^2s}{dw^2} + \varphi_2 - 2s\varphi_3\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Wir setzen zur Vereinfachung statt (36):

$$
\begin{aligned}
4\varphi_1 &= \alpha s^2 + (3a_0 + b_0)s + 2c_0,\\
4\varphi_2 &= (3a + b)s^2 + (4\gamma - \alpha - \beta)s - (a_0 + 3b_0),\\
4\varphi_3 &= 2cs^2 - (a + 3b)s + \beta,
\end{aligned}
$$

wo der Index 0 wieder, wie auch späterhin konjugierte Werte andeuten soll; $\alpha\beta\gamma$ sind reell. So entsteht aus (38):

$$
(40)\quad 2\left(\frac{ds}{dw}\right)^2 = cs^4 - 2(a + b)s^3 + (\alpha + \beta - 2\gamma)s^2 + 2(a_0 + b_0)s + c_0.
$$

Gleichung (39) wird damit in s vom 4. Grad, da die Koeffizienten von s^5 und s^6 Null sind, und erhält die Form:

$$
(41)\qquad \mathsf{A}s^4 - \mathsf{B}s^3 + \Gamma s^2 + \mathsf{B}_0 s + \mathsf{A}_0 = 0,
$$

wo:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{A} = ab + \gamma c, && \mathsf{A}_0 = a_0 b_0 + \gamma c_0,\\
(42)\quad & \mathsf{B} = (a_0 + b_0)c + (\alpha + \gamma)b + (\beta + \gamma)a, && \mathsf{B}_0 = (a + b)c_0 + (\alpha + \gamma)b_0 + (\beta + \gamma)a_0,\\
& \Gamma_0 = aa_0 + bb_0 - cc_0 + \alpha\beta - \gamma^2. &&
\end{aligned}
$$

Da die Gleichung (41) für alle Werte von s erfüllt sein muß, erhält man fünf Bedingungsgleichungen. Die entsprechende und ebenfalls gültige Gleichung in s_0:

$$\mathsf{A}_0 s_0^4 - \mathsf{B}_0 s_0^3 + \Gamma s_0^2 + \mathsf{B} s_0 + \mathsf{A} = 0$$

liefert keine neue Bedingung (und man sieht, daß sie in (41) übergeht, wenn man s_0 durch $-\frac{1}{s}$ ersetzt).

16. Wenn der Fall, wo γ Null ist, zunächst ausgenommen wird, kann man aus $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{A}_0 = 0$, c und c_0 in den übrigen Konstanten bestimmen, welche dann noch die Gleichungen

$$(aa_0 - \alpha\gamma - \gamma^2)b + (bb_0 - \beta\gamma - \gamma^2)a = 0,$$
$$(aa_0 - \gamma^2)(bb_0 - \gamma^2) - \alpha\beta\gamma^2 = 0,$$
$$(aa_0 - \alpha\gamma - \gamma^2)b_0 + (bb_0 - \beta\gamma - \gamma^2)a_0 = 0$$

befriedigen müssen. Aus den beiden ersten Gleichungen kann man α und β bestimmen. Man findet die beiden Lösungen:

$$\alpha = \frac{aa_0 - \gamma^2}{\gamma}, \qquad \beta = \frac{bb_0 - \gamma^2}{\gamma}$$

und

$$\alpha = \frac{a}{b}\,\frac{bb_0 - \gamma^2}{\gamma}, \qquad \beta = \frac{b}{a}\,\frac{aa_0 - \gamma^2}{\gamma}.$$

Während aber das erste Wertepaar die letzte der Gleichungen befriedigt, ist dies beim zweiten nur der Fall, wenn außerdem

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0}{b_0}$$

ist.

Man hat also in die aus (38) sich ergebenden Integrale

$$(43)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}\,w &= \int \frac{ds}{\sqrt{cs^4 - 2(a+b)s^3 + (\alpha+\beta-2\gamma)s^2 + 2(a_0+b_0)s + c_0}}, \\ \log f &= \int \frac{cs^3 - (a+2b)s^2 + (\beta-\gamma)s + b_0}{cs^4 - 2(a+b)s^3 + (\alpha+\beta-2\gamma)s^2 + 2(a_0+b_0)s + c_0}\,ds \end{aligned}$$

oder nach (39) auch

$$= \int \frac{cs^2 - (a+b)s - \gamma}{cs^3 - (2a+b)s^2 + (\alpha-\gamma)s + a_0}\,ds$$

entweder

$$(44)\qquad \begin{aligned} b &= \lambda a, & c &= -\frac{\lambda ab}{\gamma}, & \alpha &= \frac{\lambda^2 aa_0 - \gamma^2}{\lambda\gamma}, \\ b_0 &= \lambda a_0, & c_0 &= -\frac{a_0 b_0}{\gamma}, & \beta &= \lambda\,\frac{aa_0 - \gamma^2}{\gamma} \end{aligned}$$

oder

$$(45)\qquad \begin{aligned} c &= -\frac{ab}{\gamma}, & \alpha &= \frac{aa_0-\gamma^2}{\gamma},\\ c_0 &= -\frac{a_0b_0}{\gamma}, & \beta &= \frac{bb_0-\gamma^2}{\gamma} \end{aligned}$$

einzusetzen.

Ist $\gamma = 0$, dann sind drei Fälle zu unterscheiden, nämlich

$$(46)\qquad \begin{aligned} b &= 0, & c &= \lambda a^2, & \alpha &= \frac{1}{\lambda} - \lambda aa_0,\\ b_0 &= 0, & c_0 &= \lambda a_0^2, & \beta &= -\lambda aa_0, \end{aligned} \qquad \gamma = 0,$$

ferner

$$(47)\qquad \begin{aligned} a &= 0, & c &= \lambda b^2, & \alpha &= \lambda bb_0,\\ a_0 &= 0, & c_0 &= \lambda b_0^2, & \beta &= \frac{1}{\lambda} - \lambda bb_0, \end{aligned} \qquad \gamma = 0,$$

und schließlich:

$$(48)\qquad \begin{aligned} a &= b = 0, & c &= \lambda e^{2i\alpha}, & \alpha &= -k\lambda,\\ a_0 &= b_0 = 0, & c_0 &= \lambda e^{-2i\alpha}, & \beta &= -\frac{\lambda}{k}. \end{aligned}$$

In allen Fällen kann λ positiv oder negativ sein; dasselbe gilt von k.

Die Formeln (44) ergeben:

$$-\frac{w}{2\sqrt{-\lambda\gamma}} = \int \frac{ds}{\lambda a s^2 + (\lambda+1)\gamma s - \lambda a_0},$$

$$\log f = \int \frac{(\lambda a s + \lambda\gamma)\,ds}{\lambda a s^2 + (\lambda+1)\gamma s - \lambda a_0}.$$

Nach Ausführung der Integrationen lassen sich w und f auf die Form bringen:

$$nw = \log C\,\frac{s+e_0}{1-es}, \qquad f = C_1\,\frac{(s+e_0)^{\frac{m-1}{2}}}{(1-es)^{\frac{m+1}{2}}},$$

wo m reell, n reell oder auch rein imaginär ist. Damit wird aber

$$\mathfrak{F}(s) = C_2\,\frac{(s+e_0)^{m-2}}{(1-es)^{m+2}}.$$

Durch eine Drehung des Koordinatensystems (vgl. Darboux, leçons I, Seite 305) erhält man schließlich die Form (2) für $\mathfrak{F}(s)$.

Zu demselben Ergebnis führen die Fälle (46) und (47). Man hat nämlich nach (46)

$$\frac{w}{2\sqrt{\lambda}} = \int \frac{ds}{\lambda a s^2 - s - \lambda a_0}, \qquad \log f = \int \frac{\lambda a s\,ds}{\lambda a s^2 - s - \lambda a_0},$$

und, wenn a mit b, w mit $-w$ vertauscht wird, sind dies auch die Integrale für Fall (47).

Auf andere Minimalflächen, als die auf Rotationsflächen abwickelbaren führen die Formeln (45), man hat nämlich:

$$\frac{w}{2\sqrt{-\gamma}} = \int \frac{ds}{\sqrt{(as^2+2\gamma s-b_0)(bs^2+2\gamma s-a_0)}},$$

$$\log f = \int \frac{(bs+\gamma)\,ds}{bs^2+2\gamma s-a_0} = \log \sqrt{bs^2+2\gamma s-a_0} + \text{const.}$$

Schließlich führt Fall (48): $a=b=\gamma=0$ auf:

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\,w = \int \frac{\sqrt{k}\,e^{\alpha i}\,ds}{\sqrt{(ke^{2i\alpha}s^2-1)(e^{2i\alpha}s^2-k)}}, \qquad \log f = \int \frac{e^{2i\alpha}s\,ds}{e^{2i\alpha}s^2-k},$$

also auf dieselben Flächen wie (45).*)

17. Wir haben also nur noch die Minimalflächen zu untersuchen, für welche

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{C}{\sqrt{(as^2+2\gamma s-b_0)^3(bs^2+2\gamma s-a_0)^3}}$$

ist. Die Isothermensysteme u, v müssen konstante geodätische Krümmung haben.

Den Nullstellen der biquadratischen Funktion

$$(as^2+2\gamma s-b_0)(bs^2+2\gamma s-a_0)$$

entsprechen auf der Bildkugel zwei Paare diametral gegenüberliegender Punkte; wir wählen die x- und z-Achse des Koordinatensystems so, daß sie Symmetrielinien des durch jene Punkte gebildeten Rechtecks werden**). $\mathfrak{F}(s)$ erhält dann die Gestalt:

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{Ck}{(k-s^2)\sqrt{(k-s^2)(1-ks^2)}}, \tag{49}$$

wo $k<1$ ist, wenn man den im vierten und dritten Quadranten der xz-Ebene liegenden Eckpunkten des Rechtecks, die Werte $\pm\sqrt{k}$ von s

---

*) Ganz in derselben Weise wie hier kann man die Frage nach den Minimalflächen beantworten, deren Linienelementquadrat sich auf die Liouvillesche Form $(U+V)(du^2+dv^2)$ bringen läßt. Das Ergebnis ist, daß außer den auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen keine anderen diese Eigenschaft besitzen.

**) Durch eine imaginäre Drehung des Koordinatensystems kann man die Form

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{C}{s\sqrt{(s-\operatorname{cotg}\varepsilon)s(s+\operatorname{tg}\varepsilon)}}$$

erhalten. Die Minimalflächen, um welche es sich hier handelt, sind also verwandt mit den von H. A. Schwarz, Miszellen aus dem Gebiete der Minimalflächen VIII, und Enneper (Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), S. 393—406, behandelten „zyklischen" Minimalflächen, die eine Schar in parallelen Ebenen liegender Kreise enthalten.

entsprechen läßt. An Stelle der seither verwendeten Variabeln w kann man, ohne daß die Allgemeinheit der Untersuchung darunter leidet, ein beliebiges Vielfaches derselben mit w bezeichnen; der unterdrückte Faktor darf sogar rein imaginär sein. Man kann dann setzen:

(50)
$$w = \int \frac{ds}{\sqrt{(k-s^2)(1-ks^2)}},$$

also (in der Gudermannschen Bezeichnungsweise geschrieben)

(51)
$$s = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\, w.$$

Um zu prüfen, ob $d\sigma^2$ tatsächlich die erwartete Form (32) hat, bilden wir

$$\frac{\sqrt{CC_0}}{e^{\varphi}} = \frac{\sqrt{CC_0 ff_0}}{1+ss_0} = \frac{\sqrt{(k-s^2)(k-s_0^2)}}{k(1+ss_0)} = \frac{\mathrm{cn}\, w\, \mathrm{cn}\, w_0}{1+k\,\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{sn}\, w_0}.$$

Nach Anwendung der Additionstheoreme nimmt dieser Ausdruck die Gestalt:

$$\frac{1-\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2 vi+k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 vi}{(1+k\,\mathrm{sn}^2 u)(1-k\,\mathrm{sn}^2 vi)}$$

oder

$$\frac{k+1}{2k}\,\frac{1-k\,\mathrm{sn}^2 u}{1+k\,\mathrm{sn}^2 u}+\frac{k-1}{2k}\,\frac{1+k\,\mathrm{sn}^2 vi}{1-k\,\mathrm{sn}^2 vi}$$

an. Die Fläche hat also wirklich die verlangte Eigenschaft. Die sphärischen Bilder der Kurven (u) und (v) sind nach (51) bekanntlich konfokale sphärische Kegelschnitte (G. Holzmüller, Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), S. 269; vgl. auch H. A. Schwarz, Ges. math. Abh. Bd. 1, S. 192). Man hat nämlich, wenn X, Y, Z in u und v ausgedrückt werden:

(52)
$$\frac{X^2}{U^2-1}+\frac{Y^2}{U^2-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2}+\frac{Z^2}{U^2}=0, \quad \text{wo} \quad U=\frac{1-k\,\mathrm{sn}^2 u}{1+k\,\mathrm{sn}^2 u},$$
$$\frac{X^2}{V^2-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2}+\frac{Y^2}{V^2-1}+\frac{Z^2}{V^2}=0, \quad \text{wo} \quad V=\frac{1+k\,\mathrm{sn}^2 vi}{1-k\,\mathrm{sn}^2 vi}.$$

Schließlich berechnen wir die Gleichungen der Minimalflächen selbst nach (1)

(53)
$$x = \Re\left\{Cw+\frac{C}{1+k}\left(\frac{\mathrm{sn}\, w\,\mathrm{dn}\, w}{\mathrm{cn}\, w}-E(w)\right)\right\},$$
$$y = \Re i\left\{Cw+\frac{C}{1-k}\left(\frac{\mathrm{sn}\, w\,\mathrm{dn}\, w}{\mathrm{cn}\, w}-E(w)\right)\right\},$$
$$z = \frac{2\sqrt{k}}{k'^2}\,\Re\,\frac{C\,\mathrm{dn}\, w}{\mathrm{cn}\, w}.$$

Will man xyz reell in u und v ausdrücken, dann hat man die aus den Additionstheoremen abzuleitenden Gleichungen zu benutzen:

$$\frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w} - E(w) = -E(u,k) + i(E(v,k') - v) + \operatorname{sn}(u,k)\operatorname{dn}(v,k')\frac{\operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w},$$

$$\frac{\operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w} = \frac{\operatorname{cn}(u,k)\operatorname{dn}(u,k)\operatorname{dn}(v,k') + ik'^2 \operatorname{sn}(u,k)\operatorname{sn}(v,k')\operatorname{cn}(v,k')}{1 - \operatorname{sn}^2(u,k)\operatorname{dn}^2(v,k')}.$$

Wenn C reell ist, projizieren sich die Kurven (u) auf die xz-Ebene als ähnliche Hyperbeln, deren Exzentrizität $\frac{1+k}{1-k}$ ist. Sie arten aus für $u = n\mathsf{K}$, wo n eine ganze Zahl ist. Ist n gerade, dann liegt die entsprechende Kurve in der Ebene $x = n\left(\mathsf{K} - \frac{\mathsf{E}}{1+k}\right)$; ist n ungerade, dann wird

(54) $$z = 0, \quad x = n\left(\mathsf{K} - \frac{\mathsf{E}}{1+k}\right).$$

Ebenso projizieren sich die Kurven (v) auf die yz-Ebene als Ellipsen der Exzentrizität $\frac{1-k}{1+k}$; nur für $v = n\mathsf{K}'$ wird

$$y = n\,\frac{k\mathsf{K}' - \mathsf{E}'}{1-k}.$$

Während diese Fläche nur die reellen Geraden (54) enthält, liegen auf der adjungierten Minimalfläche, für welche C rein imaginär ist, die Geraden:

$$u = 2n\mathsf{K}, \quad y = 2n\left(\mathsf{K} - \frac{\mathsf{E}}{1-k}\right), \quad z = 0,$$

$$v = n\mathsf{K}', \quad x = n\,\frac{k\mathsf{K}' + \mathsf{E}'}{1+k}, \quad z = 0.$$

Im übrigen projizieren sich wieder die Kurven (u) und (v) auf die yz- bzw. xz-Ebene als Kegelschnitte mit den Exzentrizitäten $\frac{1-k}{1+k}$ bzw. $\frac{1+k}{1-k}$. Die Kurven (u) nähern sich Schraubenlinien um so mehr ihrer Gestalt nach, je näher k bei 1 liegt; für $k = 1$ geht die Fläche in die gemeine Schraubenregelfläche mit der y-Achse als Schraubenachse über.

§ 6.

Minimalflächen mit ähnlichen Berührungszylindern.

18. Alle Minimalflächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind, haben die Eigenschaft, daß sie von untereinander *ähnlichen Zylinderflächen* berührt werden, die durch Drehung um die z-Achse paarweise in ähnliche Lage gebracht werden können und deren Erzeugende zu einer Ebene (der xy-Ebene) parallel gerichtet sind. Daß diese Eigenschaft noch anderen Minimalflächen zukommen muß, zeigen die Flächen, für welche $\mathfrak{F}(s) = Cs^{mi}$ ist, die zu den Spiralflächen gehören.

Zur Bestimmung aller Minimalflächen derselben Eigenschaft benutzen wir den Abstand p der Berührungsebene vom Anfangspunkt des Koordinatensystems und legen wieder das System (u, v) zugrunde, für welches wie in (8)

$$X = \sin u \cos v, \quad Y = \sin u \sin v, \quad Z = \cos u \tag{8}$$

ist. Man kann dann direkt angeben, wie p in u und v gebaut sein muß, damit die entsprechende Fläche jene Eigenschaft besitze. Ist nämlich p das Produkt einer Funktion von u und einer Funktion von v wie z. B. in (9), dann lassen sich die Zylinderflächen, welche die Fläche längs der Kurven $v = \text{const.}$ berühren, durch Drehung um die z-Achse in ähnliche Lage mit O als Ähnlichkeitspunkt bringen. Verschiebt man noch jede Zylinderfläche parallel, etwa in der z-Richtung um die von v abhängige Strecke V_2 und entfernt man sie noch von der z-Achse in einer zu ihr senkrechten Richtung um V_1, dann erhält p die Form:

$$p = UV + V_1 \sin u + V_2 \cos u. \tag{55}$$

Durch die Gleichungen (8) und (55) sind alle Flächen der genannten Eigenschaft in Ebenenkoordinaten bestimmt.

Für die Summe der Hauptkrümmungsradien der Fläche hat man:

$$R_1 + R_2 = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + \frac{\cos u}{\sin u}\frac{\partial p}{\partial u} + 2p.$$

Soll diese verschwinden, so liefert (55) für die Funktionen $U V V_1 V_2$ die Bedingungsgleichung:

$$(U'' + U' \operatorname{ctg} u + 2U)V + \frac{U}{\sin^2 u} V'' + \frac{1}{\sin u}(V_1 + V_1'') + \frac{\cos u}{\sin^2 u} V_2'' = 0.$$

Dieselbe läßt sich nur erfüllen, wenn die Verhältnisse von V'', $V_1 + V_1''$, V_2'' zu V konstant sind.

Ist zunächst $V'' + m^2 V = 0$, wo m von Null verschieden ist, dann erhält man zur Bestimmung von U eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese läßt sich auf elementarem Weg integrieren, da man aus (9) oder, wenn $m = 1$ ist, aus (22) partikuläre Integrale der „reduzierten Differentialgleichung“ entnehmen kann. Das auch für den Sonderfall $m = 1$ gültige Ergebnis ist, daß für die entsprechenden Minimalflächen die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ die Form $a e^{\alpha i} s^{m-2} + b e^{-\alpha i} s^{-m-2} + c i s^{-2}$ erhält. Nach Vornahme einer Drehung um die z-Achse erhält man

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{a s^m + b s^{-m} + c i}{s^2}. \tag{56}$$

Ganz ebenso findet man, wenn $V'' - m^2 V = 0$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{a e^{\alpha i} s^{m i} + b e^{-\alpha i} s^{-m i} + c i}{s^2}; \tag{57}$$

eine Drehung um die z-Achse bewirkt hier keine Vereinfachung der Funktion $\mathfrak{F}(s)$. a, b, c, α sind reell. Zur Herleitung der Funktion $\mathfrak{F}(s)$ ist dabei die Formel

$$2s^2\mathfrak{F}(s) = \sin^2 u(U+U'')V - i(U\cos u - U'\sin u)V' - iV_2'$$

benutzt worden, welche aus einem Vergleich der Ebenenkoordinatengleichungen mit den Punktkoordinatengleichungen (1) hervorgeht.

Ist schließlich $m = 0$, also $V'' = 0$, dann findet man

$$s^2\mathfrak{F}(s) = a(a+bi) - 2(a+c\log s)(a+id\log s). \tag{58}$$

Hervorzuheben ist hier der Fall, wo $d = 0$ (oder V konstant) ist. Die entsprechenden Minimalflächen werden von kongruenten Zylinderflächen längs der Kurven (v) berührt.

Abelsche Gleichungen in quadratisch-imaginären Zahlkörpern.

Von

RUDOLF FUETER in Karlsruhe.

Einleitung.

In meinen früheren Arbeiten*) habe ich Abelsche Gleichungen in beliebigen Zahlkörpern betrachtet und die Entwicklungen dann auf den Fall der komplexen Multiplikation, d. h. der quadratisch-imaginären Körper, angewandt. In der vorliegenden Untersuchung beschränkte ich mich von vornherein auf den Fall, daß ein quadratisch-imaginärer Körper zugrunde gelegt ist. Es gelang mir dadurch, die Theorie bedeutend zu systematisieren und zu vereinfachen. Außerdem waren verschiedene Lücken und Fehler zu verbessern. Insbesondere sind die im Grad der Gleichungen enthaltenen Primzahlen, die früher nur andeutungsweise behandelt wurden, jetzt vollständig berücksichtigt worden. Es zeigte sich, daß dieselben bedeutend mehr Schwierigkeiten bereiten und eines ziemlichen Apparates von Hilfssätzen bedürfen.

Die Theorie ist soweit gefördert, daß die Körper, die die *komplexe Multiplikation der elliptischen Modulfunktionen* liefern, völlig beherrscht werden. Damit ist die Grundlage geschaffen, um das interessanteste Problem, dasjenige der *Vollständigkeit*, in Angriff nehmen zu können: *Sind alle in einem quadratisch-imaginären Körper Abelschen Gleichungen in den Körpern der singulären Moduln und der Einheitswurzeln enthalten?* Diese Frage kann nur teilweise bejaht werden, nämlich im Falle eines *ungeraden* Relativgrades. *Jede in einem quadratisch-imaginären Körper Abelsche Gleichung von ungeradem Relativgrad ist durch Einheitswurzeln und singuläre Moduln lösbar.* Die Primzahl 2 dagegen nimmt eine Ausnahmestellung ein**). Der einfache, zu $k(\sqrt{-1})$ relativ-zyklische Körper

*) Die Theorie der Zahlstrahlen, J. f. Math. 130, S. 197 und Bd. 132, S. 255. Vgl. auch: Die Klassenkörper der kompl. Multiplikation und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Zahlentheorie, Teubner 1911.

**) Vgl. über die Bedeutung des Problemes Hilbert, Mathematische Probleme. Gött.

$$\sqrt[4]{1+2i}, \quad i=\sqrt{-1}$$

ist z. B. *nicht* Unterkörper der Körper der Einheitswurzeln und singulären Moduln, wie im 5. Kapitel bewiesen wird. Einzig falls die Abelsche Relativgruppe in bezug auf den quadratisch-imaginären Körper sich aus lauter Substitutionen S zusammensetzen läßt, die mit der quadratischen Substitution s des Grundkörpers die Beziehung eingehen

$$sSs = S^{\pm 1}$$

(was bei ungeradem Relativgrad immer möglich ist), sind die Körper in den oben angegebenen enthalten. In den beiden noch möglichen Fällen

$$sSs = S', \quad S' \neq S'',$$

$$sSs = S^{\pm 1 + 2^{\nu-1}}, \quad S^{2^\nu} = 1$$

wird dies im allgemeinen nicht mehr der Fall sein. Man muß dann die *Weberschen Teilungskörper* der elliptischen Funktionen zu Hilfe nehmen; *die Vollständigkeit wird somit erst erhalten, wenn die singulären Moduln durch die singulären elliptischen Funktionen mit singulärem Periodenverhältnis ersetzt werden.*

Prinzipiell möchte ich hervorheben, daß die vorliegende Arbeit aufs neue zeigt, wie äußerst wichtig die *Galoissche Gruppe* des vorgelegten Körpers für die *zahlentheoretische* Untersuchung ist. Der entscheidende Schritt in dieser Hinsicht ist durch die fundamentale Arbeit von Hilbert*) über Galoissche Körper gemacht worden. Durch diese Arbeit ist die tiefere Einsicht in das zahlentheoretische Wesen der Zahlkörper ermöglicht worden, indem sie den Zusammenhang mit der Galoisschen Gruppe aufdeckte. Meine Untersuchungen machen beständig von Hilberts Begriffsbildung Gebrauch und setzen deren Kenntnis voraus. Die wichtigsten Sätze betreffen die Trägheits- und Verzweigungsgruppe der Primideale. Sie zeigen, wie den gruppentheoretischen Eigenschaften des Oberkörpers zahlentheoretische Eigenschaften des Grundkörpers entsprechen.

Außerdem werden die Arbeiten Webers über die in Linearformen enthaltenen Primzahlen eines imaginär-quadratischen Körpers wesentlich be-

Nachr. 1900, S. 277, Problem 12. Der Ausnahmefall ist in meinen früheren Arbeiten durch einen gruppentheoretischen Fehlschluß übersehen worden (J. f. Math. 130, S. 207). Andererseits ist der von H. Weber: Algebra III (1908), S. 620 ausgesprochene Satz nur für Teiler richtig, die Primidealpotenzen sind, nicht aber für zusammengesetzte Teiler, indem die Bemerkung am Schluß von § 158 (S. 592) nicht stichhaltig ist. Es wird somit wirklich erst die Vollständigkeit erhalten, wenn die Teilungskörper hinzukommen, wie weiterhin gezeigt wird.

*) Hilbert, Gött. Nachr. 1894 S. 224 und „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper", Bericht erst. der deutsch. Math.-Ver. 1897, S. 247. Dieser Bericht wird im folgenden kurz als „Zahlbericht" zitiert werden.

nutzt. Diese schönen Resultate stehen mit der Theorie der relativ-Abelschen Oberkörper in innigstem Zusammenhange und sind von Weber im III. Bande seiner Algebra dargestellt worden. Sie sind grundlegend für meine Betrachtungen und bilden das einzige direkte, transzendente Element der Beweisführung.

Der *Inhalt der Arbeit* ist der folgende: Das *erste* Kapitel beginnt mit der Definition von Ring und Strahl im Grundkörper. Mit dem Strahl steht der aus gewissen Körpern der Einheitswurzeln und singulären Moduln zusammengesetzte Körper in enger Beziehung. Die Eigenschaften dieses Körpers werden, soweit bisher möglich, aus den bekannten Eigenschaften der Körper der Einheitswurzeln und singulären Moduln hergeleitet und die Galoissche Gruppe bestimmt.

Das *zweite* Kapitel behandelt beliebige Oberkörper mit einer Gruppe, wie sie die im 1. Kapitel besprochenen Körper besitzen. Für die in der Relativdiskriminante enthaltenen Primideale wird die Trägheits- und Verzweigungsgruppe näher bestimmt. Dadurch gelingt es, jedem Oberkörper den Führer eines Strahls des Grundkörpers zuzuordnen, so daß beim Zusammensetzen zweier Oberkörper ein Oberkörper entsteht, dem als Führer das kleinste gemeinsame Vielfache der den beiden Körpern zugeordneten Führer zugeordnet ist.

Das *dritte* Kapitel bringt die Einteilung der Klassen des relativ-Abelschen Oberkörpers in Geschlechter. Es wird bewiesen, daß nicht alle möglichen Geschlechter existieren, sondern daß die Anzahl der existierenden gleich ist dem Quotienten aus der Anzahl aller möglichen Geschlechter und dem Relativgrad.

Das *vierte* Kapitel bestimmt die Diskriminante der im 1. Kapitel aufgestellten Körper, d. h. insbesondere der Körper der singulären Moduln.

Das *fünfte* Kapitel behandelt die Frage der Vollständigkeit. Der Satz über die Anzahl der existierenden Geschlechter gibt bei ungeraden Relativgraden ohne weiteres die Antwort. Für die Primzahl 2 sind die Resultate oben schon angeführt. Schließlich werden die Oberkörper kurz besprochen, denen ein Führer zugeordnet ist, der keine ganze rationale Zahl, sondern ein beliebiges Ideal des Grundkörpers ist.

Kapitel I.

Die Grundlagen.

1. Der Ring*). Gegeben sei ein quadratisch-imaginärer Körper $k = k(\sqrt{m})$, wo m ohne quadratischen Teiler angenommen wird;

$$f = l_1^{r_1} l_2^{r_2} \cdots l_n^{r_n}$$

sei eine beliebige positive, ganze rationale Zahl, wo $l_1, l_2, \cdots, l_n$ die voneinander verschiedenen in f enthaltenen Primzahlen bedeuten.

Jede Zahl α von k, deren Nenner einen auch in ihrem Zähler enthaltenen größten gemeinsamen Idealteiler mit f gemein hat, liegt im Ring mit dem Führer f (kurz im Ring f), wenn

$$\alpha \equiv a \pmod{f},$$

wo a irgend eine rationale Zahl ist; α heißt dann Ringzahl.

Zwei zu f prime Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von k heißen äquivalent im Ring f, wenn

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = (\alpha),$$

und α so mit einer Einheit multipliziert werden kann, daß eine Ringzahl entsteht. Alle zueinander äquivalenten Ideale bilden eine *Ringklasse;* die Ringklassenanzahl h_r ist endlich; ist h die Klassenanzahl von k, so ergibt sich nach Dedekind**):

$$\frac{h_r}{h} = \frac{\varphi(f)}{\varphi_r(f)} \frac{w_r}{w} = \frac{2}{w} \frac{\prod_{i=1}^{n} l_i^{2(r_i-1)}(l_i-1)\left(l_i - \left(\frac{d}{l_i}\right)\right)}{\prod_{i=1}^{n} l_i^{r_i-1}(l_i-1)},$$

$$h_r = \frac{2}{w}\left\{\prod_{i=1}^{n} l^{r_i-1}\left(l_i - \left(\frac{d}{l_i}\right)\right)\right\} h.$$

d bedeute dabei stets die negativ genommene Diskriminante von k.

2. Der Strahl. *Jede Ringzahl α, deren Norm* $\equiv 1 \pmod{f}$ *ist, liege im Strahl mit dem Führer f* (kurz im Strahl f), *α heißt dann Strahlzahl.*

Die Strahlzahlen reproduzieren sich durch Multiplikation und Division; sie sind zu f prim, d. h. der größte gemeinsame Idealteiler ihres Nenners mit f ist auch der größte gemeinsame Idealteiler ihres Zählers mit f.

---

*) Siehe für die Begriffe Ring und Strahl: R. Fueter: Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation etc., Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 1911, Bd. 20, S. 6 u. ff.

**) Zahlbericht, S. 245.

Zwei zu f prime Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von k heißen äquivalent im Strahl mit dem Führer f (oder äquivalent (mod f)), *wenn*

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = (\alpha),$$

und α so mit einer Einheit multipliziert werden kann, daß eine Strahlzahl entsteht. Wir schreiben hierfür kurz

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \cong 1 \pmod{f}.$$

Sind zwei Ideale einem dritten äquivalent (mod f), so sind sie auch untereinander äquivalent (mod f). Alle zueinander (mod f) äquivalenten Ideale bilden deshalb eine *Strahlklasse.* Die Strahlklassenzahl h_s ist endlich; um sie zu berechnen, bedenken wir, daß jede Ringzahl $\equiv a \pmod{f}$, also ihre Norm $\equiv a^2 \pmod{f}$. Nun gibt es $\varphi_r(f)$ Kongruenzklassen (mod f), die Ringzahlen enthalten. Von diesen sind nur diejenigen Strahlzahlen, für die

$$a^2 \equiv 1 \pmod{f}.$$

Diese Kongruenz hat $2^{\varrho+\sigma}$ (mod f) inkongruente Lösungen*); dabei ist ϱ die Anzahl der in f enthaltenen voneinander verschiedenen ungeraden Primzahlen; $\sigma = 0$, wenn $f \not\equiv 0 \pmod 4$; $\sigma = 1$, wenn $f \equiv 0 \pmod 4$, $\not\equiv 0 \pmod 8$, und $\sigma = 2$, wenn $f \equiv 0 \pmod 8$. Somit bilden je $2^{\varrho+\sigma}$ Kongruenzklassen eine Strahlklasse, und alle Ringzahlen bilden

$$\frac{\varphi_r(f)}{2^{\varrho+\sigma}} = \frac{1}{2^{\varrho+\sigma}} \prod_{i=1}^{n} l_i^{r_i-1}(l_i - 1)$$

verschiedene Strahlklassen. Die Klasse der Ringzahlen (Hauptringklasse) zerfällt deshalb in $\frac{\varphi_r(f)}{2^{\varrho+\sigma}}$ Strahlklassen, und da jede Ringklasse in gleichviele Strahlklassen zerfällt, so ist

$$\frac{h_s}{h_r} = \frac{1}{2^{\varrho+\sigma}} \prod_{i=1}^{n} l^{r_i-1}(l_i - 1),$$

$$h_s = \frac{1}{w \cdot 2^{\varrho+\sigma-1}} \left\{ \prod_{i=1}^{n} l^{2(r_i-1)}(l_i - 1)\left(l_i - \left(\frac{d}{l_i}\right)\right) \right\} h.$$

3. Die Kreiskörper. Die Zahl $Z_1 = e^{\frac{2\pi i}{f}}$ legt einen im Bereich der rationalen Zahlen Abelschen Körper K_1 fest. Derselbe hat folgende Eigenschaften:

*) Dirichlet-Dedekind: Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., Braunschweig 1894, S. 87.

1) *Der Grad von K_1 ist* $\varphi(f) = \prod_{i=1}^{n} l_i^{r_i-1}(l_i-1)$.*)

2) *Eine zu f prime Primzahl p zerfällt in n Primideale in K_1, wenn*

$$p^{\frac{\varphi(f)}{n}} \equiv 1 \pmod f,$$

*und wenn keine niedrigere Potenz von p dieser Bedingung genügt.***)

3) *Die Abelsche Gruppe von K_1 ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der zu f primen Kongruenzklassen* (mod f).***)

4) *Die Diskriminante von K_1 enthält alle und nur die Primteiler von f.*†) Hiervon bildet 2 eine Ausnahme, wenn es nur einfach in f enthalten ist.

4. Die Körper der singulären Moduln. Es sei f der Führer eines Ringes von k; $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{d}$ resp. $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, wenn $m \equiv 1 \pmod 4$, sei mit positiv imaginärem Teil genommen. Dann wird durch $Z_2 = j(f\omega)$ ein zu k relativ-Abelscher Körper K_2 festgelegt††); $j(z)$ bedeute die vollständige Invariante der elliptischen Modulfunktionen†††). K_2 hat folgende Eigenschaften:

1) *K_2 ist absolut Galoissch und hat den Relativgrad*

$$h_r = \frac{2}{w}\left\{\prod_{i=1}^{n} l_i^{r_i-1}\left(l_i - \left(\frac{d}{l_i}\right)\right)\right\} h$$

in bezug auf k†*).

2) *Ein zu f primes Primideal $\mathfrak{p}$ von k zerfällt in K_2 in n Primideale, wenn*

$$\mathfrak{p}^{\frac{h_r}{n}} \sim 1$$

und im Ring f liegt, und wenn keine niedrigere Potenz von $\mathfrak{p}$ dieser Bedingung genügt. Hiervon können eine endliche Anzahl in einer bestimmten Diskriminante enthaltene Primideale ausgeschlossen sein††*).

3) *Die Relativgruppe von K_2 in bezug auf k ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Ringklassen mit dem Führer f von k*†††*).

---

*) Zahlbericht, S. 332. **) Zahlbericht, S. 333.

***) Zahlbericht, S. 337, 338. †) Zahlbericht, S. 332, 333.

††) Weber: Algebra III (1908), S. 423, 427, 441—442. Ist $m \equiv 1 \pmod 4$, so entsprechen dem Ring die Formen 2. Art. Siehe hierüber die frühere Darstellung von Weber: Ellipt. Funkt. und algebr. Zahlen, 1891, S. 338 u. ff.

†††) Weber: Algebra III (1908), S. 153.

†*) Weber: Algebra III (1908), S. 427, 448.

††*) Weber: Algebra III (1908), S. 445 u. ff.

†††*) Weber: Algebra III (1908), S. 448.

Die der Eigenschaft 4 der Kreiskörper entsprechende Aussage von K_2 ist bisher noch nicht bewiesen. Ihr Beweis ist eine der Hauptaufgaben dieser Arbeit.

5. Der aus K_1 und K_2 zusammengesetzte Körper. Adjungiert man zu K_2 den Körper K_1, der zu demselben Führer f gehört, so erhalte man den Körper $K(f)$. Derselbe hat folgende Eigenschaften:

1) *$K(f)$ ist absolut Galoissch und relativ-Abelsch in bezug auf k. Sein Relativgrad in bezug auf k ist*

$$h_s = \frac{1}{w \cdot 2^{\varrho+\sigma-1}} \left\{ \prod_{i=1}^{n} l_i^{2(r_i-1)} (l_i - 1)\left(l_i - \left(\frac{d}{l_i}\right)\right) \right\} h.$$

2) *Ein zu f primes Primideal $\mathfrak{p}$ von k zerfällt in $K(f)$ in n Primideale, wenn*

$$\mathfrak{p}^{\frac{h_s}{n}} \cong 1 \pmod{f},$$

und wenn keine niedrigere Potenz von $\mathfrak{p}$ dieser Bedingung genügt. Hiervon können eine endliche Anzahl in einer bestimmten Diskriminante enthaltene Primideale ausgeschlossen sein.

3) *Die Relativgruppe von $K(f)$ in bezug auf k ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen mit dem Führer f in k.*

Beweis von 1): $K(f)$ ist Galoissch, da K_1 und K_2 absolut Galoissch sind. Weber hat bewiesen, daß die Gleichungen von K_2 bei Adjunktion von Einheitswurzeln nur in der den Geschlechtern des Rings f entsprechenden Weise zerfallen*); d. h. K_2 enthält von Kreiskörpern nur**):

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{(-1)^{\frac{l-1}{2}}\, l}, & \text{wo } l \text{ jede in } fm \text{ enthaltene ungerade Primzahl ist;} \\
\sqrt{-1}, & \text{wenn } f \equiv 0 \pmod 4,\ m \equiv 1 \pmod 4; \\
\sqrt{-1},\ \sqrt{2}, & \text{wenn } f \equiv 0 \pmod 8,\ m \equiv 1 \pmod 4; \\
\sqrt{2} \text{ oder } \sqrt{-2}, & \text{wenn } f \equiv 1 \pmod 2,\ m \equiv 2 \pmod 4; \\
\sqrt{-1},\ \sqrt{2}, & \text{wenn } f \equiv 0 \pmod 2,\ m \equiv 2 \pmod 4; \\
\sqrt{-1}, & \text{wenn } m \equiv 3 \pmod 4; \\
\sqrt{-1},\ \sqrt{2}, & \text{wenn } f \equiv 0 \pmod 4,\ m \equiv 3 \pmod 4.
\end{array}$$

*) Weber: Algebra III (1908), S. 619. Fueter, Gött. Nachr. 1913, S. 331—334.

**) Weber: Algebra III (1908), S. 513 u. ff. In der hier gegebenen einfachen Form bewiesen in Fueter: Der Klassenkörper der quadratischen Körper etc. Diss. Göttingen 1903, S. 5 u. ff.

Andererseits enthält K_1 nur folgende quadratische Unterkörper:

$\cdot\sqrt{(-1)^{\frac{l-1}{2}}\,l}$, wo l jede in f enthaltene ungerade Primzahl ist;

$\sqrt{-1}$, wenn $f \equiv 0 \pmod 4$;

$\sqrt{-1}$, $\sqrt{2}$, wenn $f \equiv 0 \pmod 8$.

Gehen in f ϱ ungerade verschiedene Primzahlen auf, so haben K_1 und K_2 ϱ voneinander unabhängige quadratische Unterkörper gemein. Der Grad von $K(f)$ ist somit höchstens (nach 1) von 3. und 4.) $2\frac{\varphi(f)h_r}{2^\varrho}$. Ist $f \equiv 0 \pmod 2$, $\not\equiv 0 \pmod 4$, so haben K_1 und K_2 keinen weiteren Unterkörper gemein. Ist $f \equiv 0 \pmod 4$, $\not\equiv 0 \pmod 8$, so enthalten K_1 und K_2 noch $k(\sqrt{-1})$ gemein. Der Grad von $K(f)$ ist dann $2\frac{\varphi(f)h_r}{2^{\varrho+1}}$. Ist endlich $f \equiv 0 \pmod 8$, so haben K_1 und K_2 noch $k(\sqrt{2})$ gemeinsam. Der Grad von $K(f)$ ist $2\frac{\varphi(f)h_r}{2^{\varrho+2}}$. In allen Fällen ist der Relativgrad von $K(f)$ in bezug auf k nach 2. wegen der Bedeutung von σ:

$$\frac{\varphi(f)h_r}{2^{\varrho+\sigma}} = h_s.$$

Beweis von 2): Es sei n'' die kleinste Zahl, für die $\mathfrak{p}^{n''}$ im Ring (f) liege; n' die kleinste Zahl, so daß

$$n(\mathfrak{p})^{n'} \equiv 1 \pmod f.$$

Ist dann n_1 das kleinste gemeinsame Vielfache von n' und n'', so ist sicher

$$\mathfrak{p}^{n_1} \cong 1 \pmod f.$$

Andererseits ist n_1 auch die kleinste Zahl, für die diese Bedingung erfüllt ist; denn gäbe es ein $n^* < n_1$, für die

$$\mathfrak{p}^{n^*} \cong 1 \pmod f,$$

so müßte $\mathfrak{p}^{n^*}$ im Ring (f) liegen und

$$n(\mathfrak{p})^{n^*} \equiv 1 \pmod f.$$

n_1 wäre dann nicht das kleinste gemeinsame Vielfache der kleinsten Zahlen n' und n''.

Wir haben noch zu zeigen, daß $\mathfrak{p}$ in $K(f)$ in $\frac{h_s}{n_1} = n$ Primideale zerfällt. Es seien Θ_1 und Θ_2 bestimmende Zahlen von (K_1, k) und K_2. Jede Zahl A von $K(f)$ kann dann so mit einer bestimmten von der Diskriminante abhängigen rationalen Zahl u multipliziert werden, daß

$$u \cdot \mathsf{A} = R(\Theta_1, \Theta_2)$$

eine rationale Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten von Θ_1 und Θ_2 wird. Es sei $\mathfrak{p}$ in der rationalen Primzahl p enthalten und zu u prim:

a) $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$, $p = n(\mathfrak{p})$. Da $\mathfrak{p}$ in K_1 in $\frac{\varphi(f)}{n'}$, in K_2 in $\frac{h_r}{n''}$ Primideale zerfällt, so ist

$$\Theta_1^{p^{n'}} \equiv \Theta_1 \pmod{p},$$
$$\Theta_2^{p^{n''}} \equiv \Theta_2 \pmod{p},$$

somit

$$\mathsf{A}^{p^{n_1}} \equiv \mathsf{A} \pmod{p}.$$

Da der Relativgrad von $K(f)$ h_s ist, zerfällt somit $\mathfrak{p}$ in $K(f)$ in wenigstens $\frac{h_s}{n_1}$ Primideale. Würde $\mathfrak{p}$ in mehr Primideale zerfallen, so müßte ein $n^* < n_1$ existieren, für welches

$$\mathsf{A}^{p^{n^*}} \equiv \mathsf{A} \pmod{p}.$$

Da dies für jede Zahl A gelten müßte, so wäre auch

$$\Theta_1^{p^{n^*}} \equiv \Theta_1 \pmod{p},$$
$$\Theta_2^{p^{n^*}} \equiv \Theta_2 \pmod{p}.$$

n_1 wäre dann nicht das kleinste gemeinsame Vielfache von n' und n''.

b) $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, $\mathfrak{p} = (p)$, $n' = n_1$, $n'' = 1$. Dann ist:

$$\Theta_1^{p^{2n_1}} \equiv \Theta_1 \pmod{p},$$
$$\Theta_2^{p^2} \equiv \Theta_2 \pmod{p},$$

somit

$$\mathsf{A}^{p^{2n_1}} \equiv \mathsf{A} \pmod{p}.$$

(p) zerfällt in $K(f)$ in $\frac{2h_s}{2n_1} = \frac{h_s}{n_1}$ Primideale. Würde (p) in mehr Primideale zerfallen, so müßte ein $n^* < n_1$ existieren, für das

$$\mathsf{A}^{p^{2n^*}} \equiv \mathsf{A} \pmod{p},$$

also auch

$$\Theta_1^{p^{2n^*}} \equiv \Theta_1 \pmod{p},$$

was der Annahme, daß $n_1 = n'$ die kleinste Zahl sei, die diese Kongruenz befriedige, widerspricht.

Beweis von 3): Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von k, und es seien wieder n' und n'' die kleinsten Exponenten, so daß

$$n(\mathfrak{a})^{n'} \equiv 1 \pmod{f},$$
$$\mathfrak{a}^{n''} \sim 1 \text{ im Ring } f.$$

Dann gibt es nach Abschnitt 3. und 4. in K_1 eine Substitution S_1 und in K_2 eine Substitution S_2 der Relativgruppe, so daß aus $S_1{}^{r'} = 1$

und $S_2^{r''}=1$ stets $r'\equiv 0 \pmod{n'}$, $r''\equiv 0 \pmod{n''}$ folgt. Ist n das kleinste gemeinsame Vielfache von n' und n'', so ist

$$\mathfrak{a}^n \cong 1 \pmod{f}.$$

Ist

a) n *ungerade*, so kann, da K_1 und K_2 nur quadratische Unterkörper gemein haben können, $S_1^{x_1} S_2^{x_2}$ nur dann $=1$ sein, wenn $x_1 \equiv 0 \pmod{n'}$, $x_2 \equiv 0 \pmod{n''}$. Somit hat die Substitution $S = S_1 S_2$ von $K(f)$ die Eigenschaft, daß erst ihre n^{te} Potenz die Einheitssubstitution wird.

b) n *gerade*, so kann entweder der gleiche Fall, wie für n ungerade eintreten, der sich gleich erledigt; oder es kann $S_1^{\frac{n}{2}} = S_2^{\frac{n}{2}}$, also $(S_1 S_2)^{\frac{n}{2}} = 1$ werden. Man setze, falls n' durch die höhere oder gleiche Potenz von 2 wie n'' teilbar ist, $S = S_1 S_2^2$. Dann ist sicher $S^n = S_1^n S_2^{2n} = 1$; dagegen $S^{\frac{n}{2}} = S_1^{\frac{n}{2}} S_2^n = S_1^{\frac{n}{2}} \neq 1$.

Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$, dessen n^{te} Potenz erst Strahlzahl wird, läßt sich somit eine Substitution S der Relativgruppe zuordnen, für die aus $S^r = 1$, $r \equiv 0 \pmod{n}$ folgt und $S^n = 1$ ist. Die Relativgruppe ist also Untergruppe der Gruppe der Strahlklassen f in k. Da aber beide denselben Grad h_s haben, so müssen sie holoedrisch isomorph sein.

6. Der absolut Galoissche, zu k relativ-Abelsche Körper. Jeder absolut Galoissche, zu k relativ-Abelsche Körper K kann zusammengesetzt werden aus absolut Galoisschen Körpern, die zu k relativ-Abelsch sind und deren Relativgrad eine Primzahlpotenz l^u ist.

Denn jede Abelsche Gruppe kann aus Abelschen Untergruppen zusammengesetzt werden, deren Grad eine Primzahlpotenz ist. Es sei K_l ein Unterkörper von K, dessen Relativgruppe nur noch eine solche Untergruppe mit dem Relativgrad l^u sei. Dann ist K_l absolut Galoissch. Denn ist S eine Substitution der Relativgruppe und $s = (\sqrt{m} : -\sqrt{m})$ die Substitution von k, so ist, da K absolut Galoissch:

$$sS = S^* s,$$

wo S^* eine Substitution der Relativgruppe von K zu k. Daraus folgt, wegen $s^2 = 1$,

$$sS^r = S^{*r} s,$$

d. h. S und S^* gehören zu demselben Exponenten, also beide zur Untergruppe mit der Ordnung l^u. Somit ist $s^x S$, wo S alle zur Untergruppe gehörenden Substitutionen durchläuft und $x = 0$ oder 1 ist, die Galoissche Gruppe von K_l, w. z. b. w.

7. Die Unterkörper von $K_l(f)$. $K_l(f)$ sei derjenige Unterkörper von $K(f)$, der nach 6. als Relativgrad die größte in h_s enthaltene Potenz l^u der Primzahl l besitzt und der absolut Galoissch ist.

$K_1(f)$ läßt sich zusammensetzen aus einer Reihe von absolut Galoisschen Körpern, die zu k relativ-zyklisch sind, und deren Relativgrad zu k eine Potenz von l ist.

Wir denken uns $K(f)$ aufgebaut aus den beiden Körpern K_1 und K_2. Für K_1 ist der Satz evident, da K_1 absolut-Abelsch ist. Um ihn für K_2 zu beweisen, bedenken wir, daß die Relativgruppe von K_2 holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Ringklassen (f) ist. Wir können das Basensystem dieser Klassen so wählen, daß alle Klassen desselben zu Primzahlpotenzexponenten gehören. Nun entspricht jeder Klasse k eine Klasseninvariante $(k) = \Theta$*), die mit $\sqrt{m}$ eine bestimmende Zahl von K_2 ist. Ist S irgendeine Substitution der Relativgruppe und $S\Theta$ die entsprechende konjugierte, so ist**)

$$S\Theta = f(\Theta, \sqrt{m}),$$

$$\Theta = f(S\Theta, -\sqrt{m}) = f(S\Theta, s\sqrt{m}),$$

wo $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x, y mit rationalen Koeffizienten ist. Da Θ einer Relativgleichung mit ganzen *rationalen* Koeffizienten genügt, so ist $s\Theta = \Theta$. Somit

$$s\Theta = \Theta = Sf(\Theta, s\sqrt{m}) = Ssf(\Theta, \sqrt{m}) = SsS\Theta;$$

woraus

$$sS = S^{-1}s \quad \text{und} \quad Ss = sS^{-1}.$$

Wählen wir also als Basensystem der Relativgruppe lauter Substitutionen, die dem oben definierten Basensystem der Ringklassen (f) entsprechen, und bestimmen wir alle Unterkörper, deren Relativgruppe nur noch eine solche Substitution und deren Potenzen ist, so setzt sich aus denselben sicher $K(f)$ zusammen. Andererseits ist aber jeder dieser Unterkörper relativ-zyklisch vom Primzahlpotenzrelativgrade zu k. Wegen $sS = S^{-1}s$ ist jeder aber auch absolut Galoissch. Denn seine Galoissche Gruppe hat denselben Grad, wie er selbst. Nach dem Beweis von Eigenschaft 1) von $K(f)$ können wir noch folgendes Resultat aussprechen:

Alle diese zu k relativ-zyklischen Unterkörper von $K(f)$ haben außer k keinen weiteren Unterkörper gemein, ausgenommen im Falle $l = 2$, wo sie einen weiteren quadratischen Körper gemein haben können.

Dieselben Resultate ergeben sich auch für jeden Körper, der sich aus Unterkörpern der Körper K_1 und K_2 zusammensetzt.

---

*) Weber: Algebra III (1908), S. 436 u. ff.

**) Weber: Algebra III (1908), S. 441

Kapitel II.

Der dem relativ-Abelschen Körper zugeordnete Strahl.

1. Gegeben sei ein zu k relativ-Abelscher, absolut Galoisscher Körper K. Derselbe besitze die gleichen Eigenschaften wie $K(f)$ (siehe Kapitel I, 7.): er sei vom Primzahlpotenzrelativgrade $N = l^u$ und lasse sich aus einer Reihe von relativ-zyklischen, absolut Galoisschen Unterkörpern zusammensetzen. Alle seine Unterkörper, die zugleich absolut Abelsch sind, sollen den Oberkörper K' vom Relativgrade $N' = l^{u'}$, alle übrigen Unterkörper den Oberkörper K'' vom Relativgrade $N'' = l^{u''}$ in bezug auf k bilden. Die Relativgruppe von K' in bezug auf k werde durch die Substitutionen S', von K'' durch die Substitutionen S'' gebildet. Es ist dann

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} sS' &= S's, \\ sS'' &= S''^{-1}s^{*}), \end{aligned}$$

wenn

$$s = (\sqrt{m} : -\sqrt{m}).$$

Satz: $\mathfrak{l}_1$ *sei ein in* $l_1 \neq l$ *enthaltenes Primideal von* k. *Wird dann* $\mathfrak{l}_1$ *in* K' *die* n'^{te}, *in* K'' *die* n''^{te} *Potenz eines Ideals, so ist*

$$l_1 - 1 \equiv 0 \pmod{n'}, \quad l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right) \equiv 0 \pmod{n''}.$$

Beweis: n' und n'' sind Potenzen von l. Wir nehmen sie so groß an, daß $\mathfrak{l}_1$ nicht die ln'^{te} resp. ln''^{te} Potenz eines Ideals wird. Da K' und K'' absolut Galoissch sind, so muß auch $s\mathfrak{l}_1$ die n'^{te} resp. n''^{te} Potenz eines Ideals werden; somit

$$(l_1) = \mathfrak{L}_1'^{\,\sigma n'} \text{ in } K'; \quad (l_1) = \mathfrak{L}_1''^{\,\sigma n''} \text{ in } K'' \quad \left(\begin{aligned} \sigma = 1, \ \left(\frac{d}{l_1}\right) \neq 0 \\ \sigma = 2, \ \left(\frac{d}{l_1}\right) = 0 \end{aligned}\right).$$

Um die Zerlegung von $\mathfrak{l}_1$ in K' resp. K'' zu studieren, benutzt man am besten die von Weber, Algebra Bd. II (1899), S. 661 u. ff. durchgeführte Verallgemeinerung der Hilbertschen Begriffe:

a) *Die Körper* K' *und* K'' *sind die Verzweigungskörper aller in* (l_1) *enthaltenen Primideale.* Denn der Grad der Verzweigungsgruppe ist eine Potenz von l_1**), also gleich 1, da $l \neq l_1$.

b) *Die Trägheitskörper* K_t' *und* K_t'' *von* K' *und* K'' *sind für alle in* l_1 *enthaltenen Primideale dieselben.* Denn K' und K'' sind relativ-zyklisch zu K_t' und K_t''***), wobei dieselben für ein bestimmtes in l_1 enthaltenes

*) Siehe Kapitel V, S. 246 u. ff.

) Weber: Algebra II., S. 664. *) ibid. S. 668.

Primideal $\mathfrak{L}_1^*$ resp. $\mathfrak{L}_1^{**}$ genommen seien. Sind T' und T'' die Grundsubstitutionen der Trägheitsgruppen, so muß

$$T'^{n'} = 1, \quad T''^{n''} = 1$$

und keine niedrigere Potenz von l wird diesen Bedingungen genügen. Außerdem ist nach (α):

$$(\beta) \qquad sT' = T's, \quad sT'' = T''^{-1}s.$$

Da K' und K'' zu k relativ-Abelsch sind, und da für jede Zahl Ω' resp. Ω''

$$\Omega' - T'\Omega' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_1^*); \quad \Omega'' - T''\Omega'' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_1^{**});$$
$$T'\mathfrak{L}_1^* = \mathfrak{L}_1^*; \qquad T''\mathfrak{L}_1^{**} = \mathfrak{L}_1^{**}$$

ist*), so erkennt man ohne weiteres, daß diese Bedingungen auch für alle relativ-konjugierten Primideale von $\mathfrak{L}_1^*$ resp. $\mathfrak{L}_1^{**}$ erfüllt sind. Sie sind aber auch für $s\mathfrak{L}_1^*$ und $s\mathfrak{L}_1^{**}$ erfüllt; denn wegen (β) ist:

$$s\Omega' - T'(s\Omega') \equiv 0 \ (s\mathfrak{L}_1^*); \quad s\Omega'' - T''^{-1}(s\Omega'') \equiv 0 \ (s\mathfrak{L}_1^{**});$$
$$T'(s\mathfrak{L}_1^*) = s\mathfrak{L}_1^*; \qquad T''^{-1}s\mathfrak{L}_1^{**} = s\mathfrak{L}_1^{**},$$

wo man für $s\Omega$ wieder Ω und für T''^{-1} wieder T'' setzen kann.

c) Es sei $T' = S'^{\nu'}$, $T'' = S''^{\nu''}$, wo S' und S'' Substitutionen der betreffenden Relativgruppe von K' resp. K'' sind; es sollen jedoch keine Substitutionen $\bar{S}'$ und $\bar{S}''$ existieren, sodaß $T' = \bar{S}'^{l\nu'}$, $T'' = \bar{S}''^{l\nu''}$. Dann ist

$$S'^{n'\nu'} = 1; \quad S''^{n''\nu''} = 1; \quad sS' = S's; \quad sS'' = S''^{-1}s.$$

Wir bestimmen die beiden zu k relativ-zyklischen Körper $K'(l_1)$ und $K''(l_1)$, die Unterkörper von K' resp. K'' sind, und deren Relativgruppe durch die Potenzen von S' resp. S'' gegeben werden können. $K'(l_1)$ und $K''(l_1)$ sind absolut Galoissch, und es wird

$$(l_1) = \mathfrak{L}_1'^{\sigma n'} \text{ in } K'(l_1); \quad (l_1) = \mathfrak{L}_1''^{\sigma n''} \text{ in } K''(l_1) \quad \begin{pmatrix} \sigma = 1, \ \left(\frac{d}{l_1}\right) \neq 0 \\ \sigma = 2, \ \left(\frac{d}{l_1}\right) = 0 \end{pmatrix}.$$

α) $\left(\frac{d}{l_1}\right) \neq 0$. Es sei Λ_1' eine durch $\mathfrak{L}_1'$ teilbare Zahl von $K'(l_1)$, Λ_1'' die entsprechende Zahl von $K''(l_1)$. Doch seien $\frac{(\Lambda_1')}{\mathfrak{L}_1'}$, $\frac{(\Lambda_1'')}{\mathfrak{L}_1''}$ zu l_1 prim. Außerdem darf man, da $s\mathfrak{L}_1' = \mathfrak{L}_1'$, $s'\mathfrak{L}_1'' = \mathfrak{L}_1''$, $\left(\frac{d}{l_1}\right) \neq 0$ ist, $\Lambda_1' = s\Lambda_1'$, $\Lambda_1'' = s\Lambda_1''$ voraussetzen. Unter Benutzung der symbolischen Potenzen**) wird dann

$$\Lambda_1'^{1-S'} \equiv \Theta' \ (\mathfrak{L}_1'); \quad \Lambda_1''^{1-S''} \equiv \Theta'' \ (\mathfrak{L}_1''),$$

*) Weber a. a. O. S. 661 u. ff.

**) Hilbert: Zahlbericht, S. 271.

wo Θ', Θ'' Zahlen der Trägheitskörper sind, d. h. Zahlen der zu k relativzyklischen Unterkörper ν'^{ten} resp. ν''^{ten} Relativgrades sind.*). Bildet man die Relativnormen dieser Trägheitskörper in bezug auf k, so wird:

$$\Lambda_1'^{(1-S')(1+S'+\cdots+S'^{\nu'-1})} = \Lambda_1'^{\,1-T'} \equiv \vartheta'\,(\mathfrak{L}_1');$$

$$\Lambda_1''^{(1-S'')(1+S''+\cdots+S''^{\nu''-1})} = \Lambda_1''^{\,1-T''} \equiv \vartheta''(\mathfrak{L}_1''),$$

wo ϑ', ϑ'' Zahlen von k sind. Unter Berücksichtigung der gemachten Annahmen folgt

$$s\vartheta' \equiv s\Lambda_1'^{\,1-T'} \equiv \Lambda_1'^{\,1-T'} \qquad \equiv \vartheta' \quad (\mathfrak{L}_1'),$$

$$s\vartheta'' \equiv s\Lambda_1''^{\,1-T''} \equiv \Lambda_1''^{\,1-T''^{-1}} \equiv \Lambda_1''^{\,T''-1} \equiv \frac{1}{\vartheta''} \quad (\mathfrak{L}_1'')$$

oder

$$s\vartheta' \equiv \vartheta' \pmod{l_1},$$

$$s\vartheta'' \cdot \vartheta'' \equiv 1 \pmod{l_1}.$$

Da aber

$$\sqrt{m^{l_1}} \equiv \left(\frac{d}{l_1}\right) \sqrt{m} \pmod{l_1},$$

so ist

$$\vartheta'^{\,l_1-1} \equiv 1 \pmod{l_1},$$

$$(\gamma) \qquad \vartheta''^{\,l-\left(\frac{d}{l_1}\right)} \equiv 1 \pmod{l_1}.$$

Andererseits ist

$$\Lambda_1'^{\,(1-T'^{x_1})} \equiv \vartheta'^{\,x_1} \quad (\mathfrak{L}_1'),$$

$$\Lambda_1''^{\,(1-T''^{x_2})} \equiv \vartheta''^{\,x_2} \quad (\mathfrak{L}_1'').$$

Sind x_1 und x_2 die kleinsten Zahlen, sodaß

$$\Lambda_1'^{(1-T'^{x_1})} \equiv 1 \;(\mathfrak{L}_1') \quad \text{oder} \quad \Lambda_1' - T'^{x_1}\Lambda_1' \equiv 0 \;(\mathfrak{L}_1'^2),$$

$$\Lambda_1''^{(1-T''^{x_2})} \equiv 1 \;(\mathfrak{L}_1'') \quad \text{oder} \quad \Lambda_1'' - T''^{x_2}\Lambda_1'' \equiv 0 \;(\mathfrak{L}_1''^2),$$

so bestimme man den Grad μ' der Untergruppe $T^{x_1 y}$ $(y = 0, 1, \cdots)$. Zu dieser Untergruppe gehört ein Körper**). δ sei die Differente von Λ_1' in bezug auf ihn; dann ist

$$\delta = \prod_{y=0}^{\mu'-1} (\Lambda_1' - T^{x_1 y}\Lambda_1') \equiv 0 \;(\mathfrak{L}_1'^{2(\mu'-1)}).$$

Ist

$$\Lambda_1'^{\mu'} - \lambda_1 \Lambda_1'^{\mu'-1} + \cdots + (-1)^l \lambda_{\mu'} = 0,$$

die Relativgleichung von Λ_1' in bezug auf denselben, so ist auch

$$\delta = \mu' \Lambda_1'^{\mu'-1} - (\mu'-1)\lambda_1 \Lambda_1'^{\mu'-2} + \cdots - (-1)^l \lambda_{\mu'-1}.$$

---

*) Weber: a. a. O., S. 663.

**) Hilbert: Zahlbericht, S. 250.

Jedes λ_i ist durch $\mathfrak{L}_1'$, also auch durch $\mathfrak{L}_1'^{\mu'}$ teilbar, da es im Unterkörper liegt. Somit wird, da μ' eine Potenz von $l + l_1$ ist,

$$\delta \equiv \mu' \Lambda_1'^{\mu'-1} \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{L}_1'^{\mu'}).$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem vorigen, so folgt:

$$\mu' > 2(\mu'-1); \quad \mu' < 2, \quad \mu' = 1.$$

Somit besitzt die Gruppe $T^{x_1 y}$ $(y = 0, 1, \cdots)$ nur die Einheitssubstitution $T^{x_1} = 1$, d. h. $x_1 = n'$. Ebenso beweist man $x_2 = n''$. Deshalb sind n' und n'' die kleinsten Zahlen, sodaß

$$(\delta) \qquad \vartheta'^{n'} \equiv 1 \pmod{l_1}; \quad \vartheta''^{n''} \equiv 1 \pmod{l_1}.$$

Aus (γ) und (δ) aber erkennt man

$$l_1 - 1 \equiv 0\,(n'), \quad l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right) \equiv 0\,(n'').$$

$\beta)$ $\left(\frac{d}{l_1}\right) = 0$. Da $K'(l_1)$ absolut Abelsch ist, so kann man den Beweis für diesen Körper wie unter $\alpha)$ führen; d. h. es muß $l_1 - 1 \equiv 0 \pmod{n'}$ sein.

Dagegen darf man nun in $K''(l_1)$ für die Zahl Λ_1'' nicht mehr $\Lambda_1'' = s\Lambda_1''$ voraussetzen. Ist

$$\Lambda_1''^{1-S''} \equiv \Theta'' \quad (\mathfrak{L}_1''); \qquad \Lambda_1''^{1-T''} \equiv \vartheta'' \quad (\mathfrak{L}_1''),$$

so wird

$$s(\Lambda_1''^{1-T''}) \equiv (s\Lambda_1'')^{1-T''^{-1}} \equiv (s\Lambda_1'')^{T''-1} \equiv s\vartheta'' \quad (\mathfrak{L}_1''),$$

$$\left(\frac{\Lambda_1''}{s\Lambda_1''}\right)^{1-T''} \equiv \vartheta'' \cdot s\vartheta'' \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}_1'').$$

Denn $\frac{\Lambda_1''}{s\Lambda_1''}$ ist zu $\mathfrak{L}_1''$ prim und für jede solche Zahl ist die $(1-T'')^{\text{te}}$ symbolische Potenz kongruent 1 $\pmod{\mathfrak{L}_1''}$.

Andererseits beweist man, wie oben, daß n'' die niederste Potenz ist, sodaß $\vartheta''^{n''} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}_1}$.

Aus $\vartheta'' s\vartheta'' \equiv 1$ $(\mathfrak{l}_1)$ folgt wegen $\left(\frac{d}{l_1}\right) = 0$, $\vartheta'' \equiv \pm 1$ $(\mathfrak{l}_1)$. Somit kann n'' nur gleich 2 sein, l_1 ist dann ungerade. Betrachtet man den absolut Galoisschen Körper $K''(l_1)$, so ist derselbe Verzweigungskörper von l_1, da sein Grad $2^{4\nu''}$ ist. In ihm wird (l_1) die vierte Potenz eines Ideals. Die Trägheitsgruppe ist daher vom Grade 4, zyklisch und invariant,*) und Untergruppe von $s^x S''^y$ $(0 \leq x < 2;\ 0 \leq y < \nu' n')$ und enthält s. Dies ist unmöglich. Also ist der Fall $\beta)$ ausgeschlossen in K'' und der Satz in allen Teilen bewiesen. Das letztere Resultat soll noch besonders ausgesprochen werden.

Die in d enthaltenen, zu l primen Primzahlen sind prim zur Relativdiskriminante von K'' in bezug auf k.

---

*) Hilbert: Zahlbericht, S. 251, 263.

2. Die Primzahl l. Hilfssätze. Ist l in der Relativdiskriminante enthalten, so gilt ein ähnlicher Satz, wie der eben bewiesene. Um denselben zu erhalten, brauchen wir eine Reihe von Hilfssätzen, die wir gleich so vollständig hier behandeln wollen, daß die Untersuchungen der folgenden Kapitel auch nicht mehr unterbrochen werden müssen.

Es sei K ein zu k relativ-*zyklischer*, absolut Galoisscher Körper. Die Relativgruppe bestehe aus den Potenzen der Substitution S, wo $sS = S^{\pm 1}s$; der Relativgrad sei die Primzahlpotenz $n = l^u$. Das in (l) enthaltene Primideal $\mathfrak{l}$ von k werde in K die $n_0 = l^{u_0}$te Potenz eines Ideals, nicht aber die $l n_0$te Potenz eines solchen. Für alle in (l) enthaltenen Primideale ist der Trägheitskörper in bezug auf k derselbe. Somit ist

$$(l) = \mathfrak{L}^{\sigma n_0} \qquad \left(\begin{array}{l} \sigma = 1, \left(\frac{d}{l}\right) \neq 0 \\ \sigma = 2, \left(\frac{d}{l}\right) = 0 \end{array}\right).$$

Der Trägheitskörper ist gleich dem Verzweigungskörper, alles bezüglich k. Denn der Relativgrad der beiden Körper ist ein Teiler von $(l^2 - 1)$, also in unserem Falle $= 1$.*) Die Verzweigungsgruppe besteht aus den Potenzen von $T = S^{\frac{n}{n_0}}$, wo $sT = T^{\pm 1}s$.

I. Hilfssatz: *Ist $\mathsf{\Lambda}$ eine durch $\mathfrak{L}$ teilbare Zahl von K, wo $\frac{(\mathsf{\Lambda})}{\mathfrak{L}}$ zu l prim ist, und ist*

$$\mathsf{\Lambda}^{1-T} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^r) \not\equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^{r+1})$$

für irgend einen Primidealteiler $\mathfrak{L}'$ von (l), so ist diese Bedingung für jeden anderen Primidealteiler erfüllt, und es ist

$r = \sigma$, *falls* $l \geqq 3$ *und* $sT = Ts$;

$r = 1$, *falls* $l > 3$ *und* $sT = T^{-1}s$ *oder* $l = 3$, $\sigma = 1$, $sT = T^{-1}s$;

$r \leqq 3$, *falls* $l = 3$, $\sigma = 2$, $sT = T^{-1}s$;

$r \leqq 1 + \sigma$, *falls* $l = 2$.

Beweis: Der Körper K werde aus dem Verzweigungskörper sukzessive durch die Körper $K_1, K_2, \cdots, K_{u_0 - 1}, K_{u_0} = K$, von denen jeder den Relativgrad l zum vorhergehenden hat, aufgebaut.

a) Der Satz werde für $n_0 = l$, $K_1 = K$ bewiesen. Hier ist $(l) = \mathfrak{L}^{\sigma l}$. Es sei

$$\mathsf{\Lambda}^{1-T} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^r) \not\equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^{r+1}),$$

wo $\mathfrak{L}'$ irgend ein Primideal von (l) ist. Da T Substitution der Verzweigungsgruppe ist, so ist $r > 0$. $\mathsf{\Lambda}$ genüge der Relativgleichung:

$$\mathsf{\Lambda}^l - \lambda_1 \mathsf{\Lambda}^{l-1} + \lambda_2 \mathsf{\Lambda}^{l-2} - \cdots \mp \lambda_l = 0$$

---

*) Weber: a. a. O., S. 667.

in bezug auf den Verzweigungskörper. Dann gilt für die Differente δ von Λ:

$$\delta = l\Lambda^{l-1} - (l-1)\lambda_1\Lambda^{l-2} + \cdots \pm \lambda_{l-1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^{(r+1)(l-1)}).$$

Jedes λ_i ist durch eine Potenz von $\mathfrak{l} = \mathfrak{L}'^l$ teilbar; somit jeder Summand von δ durch eine andere Potenz von $\mathfrak{L}'$; es muß deshalb jeder Summand wenigstens durch $\mathfrak{L}'^{(r+1)(l-1)}$ teilbar sein. Ist λ_i genau durch $\mathfrak{L}'^{x_i l}$ teilbar, so ist

$$(\varepsilon) \qquad \sigma l + l - 1 \geqq (r+1)(l-1); \quad x_i l + l - 1 - i \geqq (r+1)(l-1).$$

Aus der 1. Ungleichung folgt $r \leqq \sigma + \frac{\sigma}{l-1}$. Für $\sigma = 1$ ist $r = 1$, wenn $l \neq 2$; $r \leqq 2$, wenn $l = 2$. w. z. b. w.

Ist dagegen $\sigma = 2$, so nehme man zunächst $l > 3$, dann wird $r \leqq 2$; also ist im Falle $sT = T^{+1}s$ der Satz bewiesen, da dann $r > 1$, wie leicht ersichtlich. Ist dagegen $sT = T^{-1}s$ und für jedes $\Lambda: \Lambda^{1-T} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^2) \not\equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^3)$, so ist für jede Zahl Θ von K

$$\Theta - T\Theta \equiv 0 \; (\mathfrak{L}'^3).$$

Denn jede Zahl Θ ist (mod $\mathfrak{L}$) einer Zahl des Verzweigungskörpers = Trägheitskörpers kongruent, also von der Form $\alpha + \Lambda$. Wir bilden

$$\Lambda_1 = \Lambda \cdot s\Lambda.$$

Dann ist

$$\Lambda_1^{1-T} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^2) \not\equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^3).$$

Denn aus $\Lambda_1^{1-T} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^3)$ folgte, wegen $\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda^2}\right)^{1-T} \equiv \Theta^{1-T} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^3)$, auch

$$\Lambda^{2(1-T)} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}'^3),$$

was für $l > 2$ unmöglich. Setzt man $\Lambda_1^{1-T} = 1 + \Lambda_2$, so ist Λ_2 genau durch $\mathfrak{L}'^2$ teilbar, und es wird

$$1 + s\Lambda_2 = \Lambda_1^{1-T^{-1}},$$

$$1 + Ts\Lambda_2 = \Lambda_1^{T-1} \quad = \frac{1}{1+\Lambda_2},$$

$$Ts\Lambda_2 = -\frac{\Lambda_2}{1+\Lambda_2} = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1^{1-T}}.$$

Nimmt man beiderseits die Relativnormen in bezug auf den Verzweigungskörper, so folgt, da $l \neq 2$,

$$s\Lambda_2^{1+T+\cdots+T^{l-1}} = -\Lambda_2^{1+T+\cdots+T^{l-1}}.$$

Nun geht l sicher in m auf $\left(\left(\frac{d}{l}\right) = 0\right)$. Somit enthält die Relativnorm von Λ_2 in bezug auf k, $\sqrt{m}$ in ungerader Potenz als Faktor, wobei der andere Faktor eine zu l prime rationale Zahl ist. $\mathfrak{L}'$ müßte daher in Λ_2 in einer ungeraden Potenz enthalten sein, was unmöglich ist. Also $r = 1$, w. z. b. w.

Ist $l=3$, $\sigma=2$, so ist $r \leqq 3$. Man erkennt aber leicht, daß r für alle Λ dasselbe ist und auch für alle Primidealteiler $\mathfrak{L}'$. Im Falle $sT=Ts$ ist zudem r gerade, also $=2$.

Ist $l=2$, $\sigma=2$, so ist $r \leqq 4$; doch kann man auch hier durch Betrachtung von $\Lambda \cdot s\Lambda$ zeigen, daß $r \leqq 3$.

b) Wir nehmen an, der Satz sei für $K_\varkappa$ bewiesen und beweisen ihn für $K_{\varkappa+1}$. In $K_\varkappa$ ist $V=T^{l^\varkappa}$ Einheitssubstitution; $1, V, V^2, \cdots, V^{l-1}$ ist die Relativgruppe von $K_{\varkappa+1}$ in bezug auf $K_\varkappa$. In $K_{\varkappa+1}$ wird $(l)=\mathfrak{L}^{\sigma l^{\varkappa+1}}$. Hat Λ die im Satze angegebene Bedeutung im Körper $K_{\varkappa+1}$, und ist

$$\begin{aligned}\Lambda^{1-T} &\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^i) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{i+1})\\ &\equiv 1+\Lambda_i,\end{aligned}$$

wo Λ_i eine durch $\mathfrak{L}^i$ teilbare Zahl ist, so ist

$$\Lambda^{(1-T)(1+V+\cdots+V^{l-1})}=(1+\Lambda_i)(1+V\Lambda_i)\cdots(1+V^{l-1}\Lambda_i)=1+\lambda_1+\cdots+\lambda_l,$$

wenn Λ_i der Relativgleichung

$$\Lambda_i^l-\lambda_1\Lambda_i^{l-1}+\cdots\mp\lambda_l=0$$

von Λ_i in bezug auf $K_\varkappa$ genügt. Nun ist $\Lambda_1=\Lambda^{1+V+\cdots+V^{l-1}}$ eine Zahl von $K_\varkappa$, die genau durch $\mathfrak{L}^l$ teilbar ist. Schließt man also zunächst die Fälle $l=2$ und $l=3$, $\sigma=2$ aus und beschränkt sich auf den Fall $sT=T^{-1}s$, so wird, da der Satz für $K_\varkappa$ gilt:

$$\Lambda_1{}^{1-T}\equiv 1+\lambda_1+\cdots+\lambda_l\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^l)\not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Andererseits ist $\mathsf{A}=\frac{\Lambda_i}{\Lambda^i}$ wenigstens zu einem in $\mathfrak{L}$ enthaltenen Primideal $\mathfrak{L}'$ prim; deshalb wird

$$\mathsf{A}\equiv\alpha+\beta\Lambda+\gamma\Lambda^2+\cdots+\nu\Lambda^i \ (\mathfrak{L}'^{i+1}),$$

wo $\alpha, \beta, \cdots, \nu$ Zahlen des Verzweigungskörpers von $\mathfrak{L}'$ sind. Somit

$$\begin{aligned}\mathsf{A}-T\mathsf{A} &\equiv \beta(\Lambda-T\Lambda)+\gamma(\Lambda^2-T\Lambda^2)+\cdots+\nu(\Lambda^i-T\Lambda^i) \ (\mathfrak{L}'^{i+1})\\ &\equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{i+1}),\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Lambda_i}{\Lambda^i}\right)^{1-T}=\mathsf{A}^{1-T}\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{i+1}),$$

$$\begin{aligned}\Lambda_i{}^{1-T} &\equiv \Lambda^{i(1-T)} \ (\mathfrak{L}'^{i+1})\\ &\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^i),\end{aligned}$$

$$\Lambda_i-T\Lambda_i\equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2i});\quad \Lambda_i-V\Lambda_i\equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2i})$$

Somit genügt die Differente δ von Λ_i der Kongruenz:

$$\delta=l\Lambda_i^{l-1}-(l-1)\lambda_1\Lambda_i^{l-2}+\cdots+\lambda_{l-1}\equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2i(l-1)}).$$

Wäre nun $i\geqq l$, so wäre $\Lambda_i-T\Lambda_i$, also umsomehr $\Lambda_i-V\Lambda_i$ wenigstens durch $\mathfrak{L}^{l+1}$ teilbar; λ_i wäre durch $\mathfrak{L}^{2l}$ teilbar und somit

$$\Lambda^{(1+V+\cdots+V^{l-1})(1-T)}=\Lambda_1{}^{1-T}\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

gegen obige Aussage. Also ist $i < l$ und zu l prim. Jeder Summand des Ausdruckes δ ist dann durch eine andere Potenz von $\mathfrak{L}'$ teilbar, muß also wenigstens durch $\mathfrak{L}'^{2i(l-1)}$ teilbar sein. Ist λ_k genau durch $\mathfrak{L}'^{x_k l}$ teilbar, so ist deshalb:

$$x_k l + i(l-k-1) \geqq 2i(l-1) \quad \text{oder} \quad x_k l \geqq i(l-k-1),$$
$$x_k \geqq i\left(1 + \frac{k-1}{l}\right) \geqq i.$$

Somit

$$\Lambda_1^{1-T} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{il}),$$

woraus sich, wie vorhin, $i = 1$ ergeben muß. w. z. b. w.

Analog gestalten sich die Beweise für $sT = Ts$; $l = 3$, $\sigma = 2$, $sT = T^{-1}s$; $l = 2$.

II. Hilfssatz: *Es sei* Λ *genau durch* $\mathfrak{L}$ *teilbar,* $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}}$ *zu* $\mathfrak{L}$ *prim; dann ist für jedes in* $\mathfrak{L}$ *enthaltene Primideal* $\mathfrak{L}'$

$$\Lambda^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{\nu_i}) \not\equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{\nu_i+1}) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, u_0 - 1),$$

wo

$$\nu_i = \sigma(1 + l + l^2 + \cdots + l^i) \quad \textit{für} \quad sT = Ts; \quad \nu_i = 1 + \sigma(l + l^2 + \cdots + l^i)$$

für $sT = T^{-1}s$ *ist. Dabei ist* $l \neq 2$ *vorausgesetzt und der Fall* $l = 3$, $\sigma = 2$, $sT = T^{-1}s$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}'^3)$ *ausgeschlossen.*

Der Satz gilt dann für jede durch $\mathfrak{L}^r$ *teilbare Zahl* Λ_r, *wo* $r \not\equiv 0 \pmod{l}$; *und für jede Zahl* A *von* K *gilt*

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{\nu_i}).$$

Beweis. Es sei

$$\Lambda^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{\nu_i}) \not\equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{\nu_i+1}) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, u_0 - 1).$$

a) *Dann ist* $\nu_i \geqq l\nu_{i-1}$.

Denn wenn

$$\Lambda^{1-T^{l^{i-1}}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{\nu_{i-1}}),$$

so folgt für jede Zahl A

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^{i-1}}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{\nu_{i-1}}),$$

da sich jede Zahl A in der Form $\alpha + \beta\Lambda + \gamma\Lambda^2 + \cdots \pmod{\mathfrak{L}'^{\nu_{i-1}+\mu}}$ darstellen läßt, wo $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ Zahlen des Verzweigungskörpers sind. Also ist, wenn Λ_k eine durch $\mathfrak{L}'^k$ teilbare Zahl bedeutet:

$$\Lambda^{1-T^{l^{i-1}}} = 1 + \Lambda_{\nu_{i-1}},$$
$$\Lambda^{(1-T^{l^{i-1}})^2} = 1 + \Lambda_{2\nu_{i-1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Lambda^{(1-T^{l^{i-1}})^l} = 1 + \Lambda_{l\nu_{i-1}}.$$

Da aber

$$(1-T^{l^{i-1}})^l = 1 + T^{l^{i-1}} + T^{2l^{i-1}} + \cdots + T^{(l-1)l^{i-1}} - lf(T^{l^{i-1}})$$

ist, wo $f(1) = 1$, so folgt

$$\Lambda^{1-T^{l^i}} = \Lambda^{lf(T^{l^{i-1}})}(1+\Lambda_{l\nu_{i-1}}) = (1+\Lambda_{\nu_{i-1}})^{lf(T^{l^{i-1}})}(1+\Lambda_{l\nu_{i-1}})$$
$$\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{l\nu_{i-1}}).$$

b) Der Satz ist für $i=0$ durch Hilfssatz I. bewiesen. Wir nehmen an, er gelte für $K_1, K_2, \cdots, K_{u_0-1}$ und beweisen ihn für K_{u_0}. Da u_0 jede Zahl sein kann, ist er dann nach dem Schluß der vollständigen Induktion allgemein bewiesen. Wir beschränken uns ferner auf den Fall $sT = T^{-1}s$, da der absolut Abelsche Fall $sT = Ts$ gleich durchzuführen ist.

ν_i ist stets zu l prim.

Zum Beweise nehme man an Stelle von Λ eine durch $\mathfrak{L}^\sigma$ teilbare Zahl Λ, für die $s\Lambda = \Lambda$. Wäre nun $\nu_{u_0-1} \equiv 0 \pmod{l}$, und

$$\Lambda^l - \lambda_1\Lambda^{l-1} + \cdots - \lambda_l = 0$$

die Relativgleichung von Λ in bezug auf K_{u_0-1}, so wäre dann

$$\delta = l\Lambda^{l-1} - (l-1)\lambda_1\Lambda^{l-1} + \cdots + \lambda_{l-1} = \prod_{k=1}^{l-1}(\Lambda - T^{kl^{u_0-1}}\Lambda) \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^{(\nu_{u_0-1}+\sigma)(l-1)}).$$

Ist λ_k genau durch $\mathfrak{L}^{\sigma l x_k}$ teilbar, so folgt durch dieselbe Schlußweise, wie schon früher,

$$(\alpha) \quad \sigma l x_k + \sigma(l-1-k) \geqq (\nu_{u_0-1}+\sigma)(l-1) \quad \text{oder} \quad \sigma l x_k \geqq \nu_{u_0-1}(l-1) + \sigma k,$$
$$(k = 1, 2, \cdots, (l-1))$$

oder, da ν_{u_0-1} durch l und $(l-1)$ durch 2 teilbar ist:

$$\sigma x_k \geqq \frac{\nu_{u_0-1}}{l}(l-1) + \sigma \qquad (k = 1, 2, \cdots, (l-1)).$$

Somit ergibt die Relativgleichung

$$\Lambda^l - \lambda_l \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^{\nu_{u_0-1}(l-1)+\sigma l+\sigma}),$$

$$\Lambda^l - T^{\frac{u_0}{l}}\Lambda^l \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^{\nu_{u_0-1}(l-1)+\sigma l+\sigma+\nu_{u_0-1}}),$$

$$\Lambda^{l\left(1-T^{\frac{u_0}{l}}\right)} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{\nu_{u_0-1}\cdot l+\sigma}).$$

Andererseits ist

$$\Lambda^{l\left(1-T^{\frac{u_0}{l}}\right)} = (1+\Lambda_{\nu_{u_0-1}})^l \equiv 1 + \Lambda^l_{\nu_{u_0-1}} \ (\mathfrak{L}^{\sigma u_0+\nu_{u_0-1}})$$
$$\not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{l\nu_{u_0-1}+\sigma}),$$

da genau nach dem unter d) geführten Beweise auch

$$\nu_{u_0-1} \leqq 1 + \sigma(l + \cdots + l^{u_0-1}),$$

also $l\nu_{u_0-1} + \sigma \leqq \sigma n_0 + \nu_{u_0-1}$ gezeigt werden kann. Aus dem Widerspruch folgt, daß ν_{u_0-1} zu l prim ist.

Wäre $\nu_i \equiv 0 \pmod{l}$, $i < u_0 - 1$, so setze man $\nu_i = lq$ und

$$\Lambda^{1-r^{l^i}} = 1 + \Lambda_{\nu_i} = (1 + \Lambda_q)(1 + \Lambda_q \Lambda_r) \qquad (r > 0),$$

wo Λ_q eine Zahl von K_{u_0-1} ist und r zu l prim angenommen werden darf. Bildet man beiderseits die Relativnormen in bezug auf K_{u_0-1}, so wird

$$\Lambda^{*1-r^{l^i}} = (1 + \Lambda_q)^l (1 + \Lambda_q \lambda_1' + \Lambda_q^2 \lambda_2' + \cdots + \Lambda_q^l \lambda_l'),$$

wo

$$\Lambda_r^l - \lambda_1' \Lambda_r^{l-1} + \cdots - \lambda_l' = 0$$

die Relativgleichung von Λ_r in bezug auf K_{u_0-1} ist. Da r zu l prim ist, folgt wieder durch genau dieselbe Schlußweise wie früher

$$x_k l + r(l - 1 - k) \geqq r(l-1) + \nu_{u_0-1}(l-1),$$
$$x_k l \geqq \nu_{u_0-1}(l-1) + rk,$$

wenn λ_k genau durch $\mathfrak{L}^{x_k l}$ teilbar angenommen ist. Nun ist aber nach a) $\nu_{u_0-1} > ql = \nu_i$; also:

$$x_k l > ql(l-1) + rk \quad \text{oder} \quad x_k > q(l-1) + 1.$$

Somit

$$\Lambda^{*(1-r^{l^i})} \equiv (1 + \Lambda_q^l)^l \equiv 1 + \Lambda_q^l \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{ql^2+l})$$
$$\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{ql^2}).$$

Nach Annahme gilt aber der Satz schon für Λ^* in K_{u_0-1}. Also ist

$$\Lambda^{*(1-r^{l^i})} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{l[1+\sigma(l+\cdots+l^i)]}\right) \not\equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{l[2+\sigma(l+\cdots+l^i)]}\right).$$

Diese beiden Resultate widersprechen sich. w. z. b. w.

c) Aus a) und b) folgt somit

$$\nu_1 \geqq l + 1,$$
$$\nu_2 \geqq l^2 + l + 1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\nu_i \geqq l^i + l^{i-1} + \cdots + l + 1.$$

Für $\sigma = 1$ ist der Satz bewiesen, falls auch eine obere Grenze für ν_i gefunden ist, wie es in d) geschehen wird. Es sei also $\sigma = 2$, und zunächst $i < u_0 - 1$, $\Lambda^{1-r^{l^i}} = 1 + \Lambda_{\nu_i}$. Genau wie in b) findet man dann für die Norm Λ^* von Λ in bezug auf K_{u_0-1}:

$$\Lambda^{*1-r^{l^i}} = 1 + \lambda_1' + \lambda_2' + \cdots + \lambda_l',$$

und, wenn λ_k' genau durch $\mathfrak{L}^{x_k l}$ teilbar ist, da ν_i zu l prim ist,

$$x_k l \geqq \nu_{u_0-1}(l-1) + \nu_i k \qquad (k=1,2,\cdots,(l-1));$$

oder, da

$$\nu_{u_0-1} \geqq l^{u_0-1} + l^{u_0-2} + \cdots + 1, \quad \nu_i \geqq l^i + \cdots + 1:$$

$$x_k l \geqq n_0 - 1 + l^i + l^{i-1} + \cdots + l + 1,$$

$$\geqq n_0 + l^i + l^{i-1} + \cdots + l \qquad (k=1,2,\cdots,(l-1)).$$

Daher wird

$$\Lambda^{*(1-T^{l^i})} \equiv 1 + \lambda_l' \ (\mathfrak{L}^{n_0+l^i+l^{i-1}+\cdots+l});$$

λ_l' ist genau durch $\mathfrak{L}^{l\nu_i}$ teilbar. Andererseits ist nach Annahme

$$\Lambda^{*(1-T^{l^i})} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{[1+2(l+\cdots+l^i)]l}) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{[2+2(l+\cdots+l^i)]l}).$$

Sobald also $n_0 + l + \cdots + l^i > l(1+2(l+\cdots+l^i))$ ist, was für $i < u_0 - 1$ erfüllt ist, so ist somit $l\nu_i = l[1+2(l+\cdots+l^i)]$, $\nu_i = 1 + 2(l+\cdots+l^i)$. w. z. b. w. Ist dagegen $i = u_0 - 1$, so ist

$$\nu_{u_0-1} \geqq l\nu_{u_0-2} + 1$$

$$\geqq 2(l^{u_0-1} + \cdots + l^2) + l + 1.$$

Ferner ist ν_{u_0-1} *ungerade*, wie man leicht einsieht*). Also

$$\nu_{u_0-1} = 2(l^{u_0-1} + \cdots + l^2) + l + 2r,$$

wo r eine der Zahlen $1, 2, \cdots, \frac{l+1}{2}$ sein wird. Wäre $r < \frac{l+1}{2}$, so folgt aus den Ungleichungen (α) von b):

$$2lx_k \geqq 2(n_0 - l^2) + l^2 - l + 2r(l-1) + 2k,$$

$$2x_k \geqq 2\frac{n_0}{l} - (l+1) + 2r + 2\frac{k-r}{l}$$

oder, da $r \leqq \frac{l-1}{2}$,

$$2x_k \geqq 2\frac{n_0}{l} - (l+1) + 2r \quad , \text{ wenn } k \leqq \frac{l-1}{2},$$

$$2x_k \geqq 2\frac{n_0}{l} - (l+1) + 2r + 2, \text{ wenn } k \geqq \frac{l+1}{2}.$$

Somit ist für alle $k = 1, 2, \cdots, (l-1)$,

$$\lambda_k \Lambda^{l-k} \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^{2n_0 - l(l+1) + 2rl + l + 1})$$

und

$$\Lambda^l \equiv \lambda_l \ (\mathfrak{L}^{2n_0 - l^2 + 1 + 2rl}),$$

$$\Lambda^l - T^{\frac{n_0}{l}} \Lambda^l \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^{2n_0 - l^2 + 1 + 2rl + \nu_{u_0-1}}),$$

$$\Lambda^{l\left(1 - T^{\frac{n_0}{l}}\right)} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{2n_0 - l^2 - l + 1 + 2rl + \nu_{u_0-1}});$$

---

*) Siehe den Beweis S. 193.

andererseits ist

$$\Lambda^{l\left(1-r^{\frac{n_0}{l}}\right)} = (1+\Lambda_{\nu_{u_0-1}})^l \equiv 1 + \Lambda^l_{\nu_{u_0-1}} \quad (\mathfrak{L}^{2n_0+\nu_{u_0-1}}),$$

also müßte, da

$$l\nu_{u_0-1} < 2n_0 + \nu_{u_0-1}$$

ist,

$$2n_0 - l^2 - l + 1 + 2rl + \nu_{u_0-1} \leqq l\nu_{u_0-1},$$

für

$$\nu_{u_0-1} = 2(l^{u_0-1}+\cdots+l^2) + l + 2r,$$

sein, was unmöglich ist. Somit ist $r \geqq \frac{l+1}{2}$, und

$$\nu_{u_0-1} \geqq 1 + \sigma(l+\cdots+l^{u_0-1}).$$

d) Schließlich bleibt noch zu beweisen, daß ν_i nicht größer als der angegebene Wert sein kann. Wäre nämlich i der größte Exponent, für den

$$\Lambda^{1-r^{l^i}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{1+\sigma(1+l+\cdots+l^i)}),$$

so wäre die Differente δ von Λ in bezug auf K_i teilbar durch $\mathfrak{L}'^h$, wo

$$h = \frac{n_0}{l^{i+1}}(l-1)[\sigma(l^i+\cdots+l+1)+1] + \frac{n_0}{l^{i+2}}[\sigma(l^{i+1}+\cdots+l+1)+1] + \cdots$$

$$\cdots + (l-1)[\sigma(l^{u_0-1}+\cdots+l+1)+1] + \sigma\frac{n_0}{l^{i+1}}(l-1)$$

$$= \sigma(u_0-i)n_0 - \sigma\left(\frac{n_0}{l^{i+1}}+\cdots+1\right) + \frac{n_0}{l^i} - 1 + \sigma\frac{n_0}{l^{i+1}}(l-1).$$

Ist andererseits

$$\Lambda^{\frac{n_0}{l^i}} - \lambda_1\Lambda^{\frac{n_0}{l^i}-1} + \cdots - \lambda_{\frac{n_0}{l^i}} = 0$$

die Relativgleichung von Λ in bezug auf K_i, so muß

$$\delta = \frac{n_0}{l^i}\Lambda^{\frac{n_0}{l^i}-1} - \cdots \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^h)$$

oder

$$\frac{n_0}{l^i}\Lambda^{\frac{n_0}{l^i}-1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^h).$$

Somit ist

$$h \leqq \sigma(u_0-i)n_0 + \sigma\left(\frac{n_0}{l^i}-1\right).$$

Setzt man den Wert von h ein, so findet man leicht

$$\frac{n_0}{l^i} \leqq \sigma\left(2\frac{n_0}{l^{i+1}} + \frac{n_0}{l^{i+2}} + \cdots + l\right);$$

da $l=2$, und $l=3$, $\sigma=2$ ausgeschlossen sind, ist diese Ungleichung unmöglich. Somit sind die gefundenen Werte für ν_i die größtmöglichen w. z. b. w.

Mit genau denselben Mitteln beweist man im Falle $l=3$, $\sigma=2$, $sT=T^{-1}s$ die

1. Ergänzung: $3^{i+1}-2 \leqq \nu_i \leqq 3^{i+1}$, $l=3$, $\sigma=2$.

Wenn für ein i : $\nu_i=3^{i+1}$, so ist diese Relation auch für alle größeren i erfüllt.

Ist schließlich $l=2$, so zeigt man

$$\text{a) } \nu_i \leqq \sigma n_0; \quad \text{b) } \nu_{i+1} \geqq 2\nu_i; \quad \text{c) } \nu_i \leqq \sigma 2^{i+1},$$

woraus die

2. Ergänzung: $\sigma 2^{i+1}-2\sigma+1 \leqq \nu_i \leqq \sigma 2^{i+1}-(\sigma-1)$, $l=2$.

ν_i ist bei $\sigma=2$ ungerade. Wenn für ein i die obere Summe von ν_i erreicht ist, so wird sie auch für alle größeren i erreicht.

III. Hilfssatz: *Wenn* $\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{k n_0})$, *wo* $k>0$, *so ist*

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{k n_0+\sigma(l+\cdots+l^i)}\right), \qquad \textit{falls} \quad sT=Ts,$$

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{k n_0+l+\sigma(l^2+\cdots+l^i)}\right), \quad \textit{falls} \quad sT=T^{-1}s,$$

für alle $i<u_0$. Dabei ist $l \neq 2$ vorausgesetzt.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $sT=T^{-1}s$ und schließen zunächst auch $l=3$, $\sigma=2$ aus. Es sei λ eine genau durch $\mathfrak{L}^{k n_0}=\mathfrak{l}^k$ teilbare Zahl von k. Dann darf man setzen:

$$\mathsf{A}^{1-T}=(1+\lambda\alpha)(1+\lambda\Lambda),$$

wo α im Verzweigungskörper liegt, und Λ wenigstens durch $\mathfrak{L}$ teilbar ist. Daraus folgt:

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv (1+\lambda\alpha)^l\left(1+\lambda\sum_{\iota=0}^{l-1} T^\iota\Lambda+\lambda^2 \sum_{\substack{\iota \\ \varkappa}\}=0}^{l-1} T^\iota\Lambda T^\varkappa\Lambda+\cdots\right)$$

$$\equiv 1+\lambda \sum_{\iota=0}^{l-1} T^\iota\Lambda \ \left(\mathfrak{L}^{(k+1)n_0}\right).$$

Setzt man $\Lambda_1=\sum_{\iota=0}^{l-1} T^\iota\Lambda$, so ist nach Hilfssatz II

$$\Lambda_1-T\Lambda_1=\Lambda-T^l\Lambda \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}^{\sigma l+2}\right).$$

Wäre Λ_1 durch $\mathfrak{L}^q$ teilbar, wo q zu l prim, so wäre

$$\Lambda_1-T\Lambda_1 \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}^{q+1}\right) \not\equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}^{q+2}\right),$$

also

$$q+1 \geqq \sigma l+2, \quad q \geqq \sigma l+1.$$

Ist dagegen $q \equiv 0(l)$, so ist Λ_1 wenigstens durch $\mathfrak{L}^l$ teilbar. Sicher folgt deshalb in beiden Fällen:

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{k n_0+l}\right).$$

Somit gilt der obige Satz für $i = 1$. Wir nehmen ihn deshalb für $1, 2, 3, \cdots, i-1$ als bewiesen an und beweisen ihn für i. Dann ist

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^{i-1}}} \equiv 1 + \lambda \sum_{\iota=0}^{l^{i-1}-1} T^{\iota}\Lambda \ \left(\mathfrak{L}^{(k+1)n_0}\right) \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{kn_0+l+\sigma(l^2+\cdots+l^{i-1})}\right).$$

$\Lambda_1 = \sum_{\iota=0}^{l^{i-1}-1} T^{\iota}\Lambda$ ist daher durch $\mathfrak{L}^{l+\sigma(l^2+\cdots+l^{i-1})}$ teilbar. Da $\mathfrak{L}^l$ ein Ideal von K_{u_0-1} ist, können wir deshalb immer

$$\Lambda_1 = \Lambda_l + \Lambda_q$$

setzen, wo Λ_l ein durch $\mathfrak{L}^{l+\sigma(l^2+\cdots+l^{i-1})}$ teilbare Zahl von K_{u_0-1} ist, die auch 0 sein kann, und $q > l + \sigma(l^2+\cdots+l^{i-1})$ und zu l prim angenommen werden darf. Somit:

$$\Lambda_1 - T\Lambda_1 = \Lambda - T^{l^{i-1}}\Lambda = (\Lambda_l - T\Lambda_l) + (\Lambda_q - T\Lambda_q).$$

Nun ist nach Hilfssatz II $\Lambda - T^{l^{i-1}}\Lambda$ durch $\mathfrak{L}^{2+\sigma(l+\cdots+l^{i-1})}$ teilbar, und nach Hilfssatz I $\Lambda_l - T\Lambda_l$ durch $\mathfrak{L}^{l(2+\sigma(l+\cdots+l^{i-2}))}$; also auch

$$\Lambda_q - T\Lambda_q \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}^{\sigma(l+l^2+\cdots+l^{i-1})+(2-\sigma)2}\right);$$

weil aber q zu l prim ist, kann $\Lambda_q - T\Lambda_q$ höchstens durch $\mathfrak{L}^{q+1}$ teilbar sein, d. h.

$$q + 1 \geqq \sigma(l+\cdots+l^{i-1}) + (2-\sigma)2,$$
$$q \geqq (3-2\sigma) + \sigma(l+\cdots+l^{i-1}).$$

Deshalb folgt weiter:

$$\begin{aligned}\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} &\equiv (1+\lambda\Lambda_1)^{1+T^{l^{i-1}}+\cdots+T^{(l-1)l^{i-1}}} \\ &\equiv (1+\lambda\Lambda_l+\lambda\Lambda_q)^{1+T^{l^{i-1}}+\cdots+T^{(l-1)l^{i-1}}} \ \left(\mathfrak{L}^{(k+1)n_0}\right) \\ &\equiv 1 + \lambda\sum_{\iota=0}^{l-1} T^{\iota l^{i-1}}\Lambda_l + \lambda\sum_{\iota=0}^{l-1} T^{\iota l^{i-1}}\Lambda_q \ \left(\mathfrak{L}^{(k+1)n_0}\right).\end{aligned}$$

Kürzt man die beiden Summen rechts mit Λ' und Λ'' ab und nimmt die erstere genau durch $\mathfrak{L}^{q'l}$, die andere genau durch $\mathfrak{L}^{q''}$ teilbar an, so ist, wegen:

$$\Lambda' - T^{l^{i-1}}\Lambda' = \Lambda_l - T^{l^i}\Lambda_l, \quad \Lambda'' - T^{l^{i-1}}\Lambda'' = \Lambda_q - T^{l^i}\Lambda_q,$$

wenn q' und q'' zu l prim wären:

$$q' + 1 + \sigma(l+\cdots+l^{i-1}) \geqq (1+\sigma(l+\cdots+l^i)) + 1 + \sigma(l+\cdots+l^{i-2}),$$
$$q'' + 1 + \sigma(l+\cdots+l^{i-1}) \geqq q + 1 + \sigma(l+\cdots+l^i) \geqq (4-2\sigma) + 2\sigma(l+\cdots+l^{i-1}) + \sigma l^i,$$

also sicher:

$$lq' > l + \sigma(l^2+\cdots+l^i),$$
$$q'' > l + \sigma(l^2+\cdots+l^i),$$

d. h.

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{kn_0+l+\sigma(l^2+\cdots+l^i)}\right).$$

Es sei also q' resp. q'' durch l teilbar. Sind dann $\lambda_1', \lambda_2', \cdots, \lambda_l'$ resp. $\lambda_1'', \lambda_2'', \cdots, \lambda_l''$ die elementarsymmetrischen Funktionen von $T^{\iota l^{i-1}} \Lambda_l$ resp. $T^{\iota l^{i-1}} \Lambda_q$ $(\iota = 0, 1, 2, \cdots, l-1)$, so ist $\lambda_1' = \Lambda'$, $\lambda_1'' = \Lambda''$. Ist nun $\lambda_\varkappa'$ resp. $\lambda_\varkappa''$, durch $\mathfrak{L}^{l q_\varkappa'}$ resp. $\mathfrak{L}^{q_\varkappa''}$ teilbar, so beweist man genau wie oben, daß entweder $q_\varkappa'$ resp. $q_\varkappa''$ durch l teilbar sind, oder daß

$$q_\varkappa' \geqq [1 + \sigma(l + \cdots + l^{i-2})]\varkappa + \sigma l^i$$

resp.

$$q_\varkappa'' \geqq [(3-2\sigma) + \sigma(l + \cdots + l^{i-1})]\varkappa + \sigma l^i.$$

Nun ist aber nach Hilfssatz II:

$$\prod_{\iota=1}^{l-1}\left(\Lambda_l - T^{\iota l^{i-1}}\Lambda_l\right) = l\Lambda_l^{l-1} - (l-1)\lambda_1' \Lambda_l^{l-2} + \cdots + \lambda_{l-1}'$$
$$\equiv 0 \left(\mathfrak{L}^{(l-1)[2+2\sigma(l+\cdots+l^{i-2})+\sigma l^{i-1}]l}\right),$$

$$\prod_{\iota=1}^{l-1}\left(\Lambda_q - T^{\iota l^{i-1}}\Lambda_q\right) = l\Lambda_q^{l-1} - (l-1)\lambda_1''\Lambda_q^{l-2} + \cdots + \lambda_{l-1}''$$
$$\equiv 0 \left(\mathfrak{L}^{(l-1)(1+\sigma(l+\cdots+l^{i-1})+q)}\right).$$

Die Glieder mit $\lambda_\varkappa'$ resp. $\lambda_\varkappa''$, für die $q_\varkappa'$ resp. $q_\varkappa''$ zu l prim sind, sind sicher durch den Modul teilbar, wegen der vorigen Ungleichungen, fallen also fort. Die noch übrig bleibenden Summanden sind alle durch verschiedene Potenzen von $\mathfrak{L}$ teilbar, müssen also jeder für sich, durch den Modul teilbar sein, woraus für $\varkappa = 1$:

$$q_1' + (1 + \sigma(l + \cdots + l^{i-2}))(l-2) \geqq (l-1)(2 + 2\sigma(l + \cdots + l^{i-2}) + \sigma l^{i-1}),$$
$$q_1'' + q(l-2) \geqq (l-1)(1 + \sigma(l + \cdots + l^{i-1}) + q)$$

oder (da q_1' resp. q_1'' durch l teilbar angenommen ist):

$$q_1' l \geqq l + \sigma(l^2 + \cdots + l^i),$$
$$q_1'' \geqq l + \sigma(l^2 + \cdots + l^i),$$

d. h. in jedem Fall

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}^{kn_0 + l + \sigma(l^2 + \cdots + l^i)}\right).$$

Für $l = 3$, $\sigma = 2$ wird der Satz entsprechend bewiesen.

Ergänzung: *Für* $\sigma = 1$, $l = 2$ *ist* $\mathsf{A}^{1-T^{2^i}} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}^{kn_0 + \nu_i - 1}\right)$, *wenn* $i \neq \varkappa$, *wo* $\varkappa$ *der Index ist, für den* $\nu_{\varkappa-1} = 2^\varkappa - 1$, $\nu_\varkappa = 2^{\varkappa+1}$, *dagegen ist*

$$\mathsf{A}^{1-T^{2^\varkappa}} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}^{kn_0 + \nu_\varkappa - 2}\right).$$

Für $\sigma = 2$, $l = 2$ *ist bei gleicher Bedeutung von* $\varkappa$:

$$\mathsf{A}^{1-T^{2^i}} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}^{kn_0 + \nu_i - 2i - 1}\right) \text{ für } i \leqq \varkappa;$$

$$\mathsf{A}^{1-T^{2^i}} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}^{kn_0 + \nu_i - 2\varkappa - 1}\right) \text{ für } i > \varkappa.$$

IV. Hilfssatz: *Ist* $\mathfrak{L}_\varkappa = \mathfrak{L}^{\frac{n_0}{l^\varkappa}}$ *ein Ideal von* $K_\varkappa$ *und ist* $\Lambda_{\nu_{\varkappa-1}}$ *eine genau durch* $\mathfrak{L}_\varkappa^{\nu_{\varkappa-1}}$ *teilbare Zahl von* $K_\varkappa$, *wo* $\nu_{\varkappa-1}$ *die frühere Bedeutung* (*siehe Hilfssatz* II) *hat, so ist:*

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{l^\varkappa-1} T^i \Lambda_{\nu_{\varkappa-1}} \begin{cases} \equiv 0 \pmod{l^\varkappa} \not\equiv 0 \pmod{l^\varkappa \mathfrak{l}}, \text{ falls } sT = Ts, \\ \equiv 0 \; (\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma-(\sigma-1)}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma+2-\sigma}}, \text{ falls } sT = T^{-1}s. \end{cases}$$

Jede andere elementarsymmetrische Funktion λ_k *der* $T^i\Lambda_{\nu_{\varkappa-1}}$, *mit Ausnahme von* λ_l $(\varkappa > 1)$, *ist durch* $l^{\varkappa+1}$, *resp.* $\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma+1}$ *teilbar;* λ_l $(\varkappa > 1)$ *ist wenigstens durch* $l^\varkappa$ *resp.* $\mathfrak{l}^{\varkappa l-(\sigma-1)}$ *teilbar. Dabei ist* $l = 3$, $\sigma = 2$, $sT = T^{-1}s$, *und* $l = 2$ *ausgeschlossen.*

Beweis. Wir kürzen $\Lambda_{\nu_{\varkappa-1}}$ mit Λ ab; Λ genüge der Relativgleichung in bezug auf den Verzweigungskörper:

$$\Lambda^{l^\varkappa} - \lambda_1 \Lambda^{l^\varkappa-1} + \cdots - \lambda_{l^\varkappa} = 0.$$

Die Relativdifferente $\delta(\Lambda)$ ist nach Hilfssatz II, da $\nu_{\varkappa-1}$ zu l prim ist, durch $\mathfrak{L}_\varkappa^h$ genau teilbar, wo

$$\begin{aligned} sT = Ts:\quad h &= l^\varkappa(l-1)(\nu_{\varkappa-1}+1) + l^{\varkappa-2}(l-1)(\nu_{\varkappa-1}+\sigma(l+1)) + \cdots \\ &\qquad \cdots + (l-1)(\nu_{\varkappa-1}+\sigma(l^{\varkappa-1}+\cdots+1)) \\ &= \nu_{\varkappa-1}(l^\varkappa-1) + \varkappa\sigma l^\varkappa - \sigma(1+l+\cdots+l^{\varkappa-1}); \\ sT = T^{-1}s:\quad h &= l^{\varkappa-1}(l-1)(\nu_{\varkappa-1}+1) + l^{\varkappa-2}(l-1)(\nu_{\varkappa-1}+1+\sigma l) + \cdots \\ &\qquad \cdots + (l-1)(\nu_{\varkappa-1}+1+\sigma(l+\cdots+l^{\varkappa-1})) \\ &= \nu_{\varkappa-1}(l^\varkappa-1) + \sigma\varkappa l^\varkappa - (\sigma-1)l^\varkappa - (1+\sigma(l+\cdots+l^{\varkappa-1})). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\delta = l^\varkappa \Lambda^{l^\varkappa-1} - (l^\varkappa-1)\lambda_1\Lambda^{l^\varkappa-2} + \cdots + l_{l^\varkappa-1} \equiv 0 \; (\mathfrak{L}_\varkappa^h).$$

Da $\nu_{\varkappa-1}$ zu l prim ist, ist jedes Glied durch eine andere Potenz von $\mathfrak{L}_\varkappa$ teilbar. Ist $(l^\varkappa-k)\lambda_k$ genau durch $\mathfrak{L}^{x_k l^\varkappa} = \mathfrak{l}^{x_k}$ teilbar, so folgt:

$$\begin{aligned} sT = Ts:\quad & l^\varkappa x_k + (l^\varkappa-1-k)\nu_{\varkappa-1} \geqq (l^\varkappa-1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa - \sigma(1+\cdots+l^{\varkappa-1}), \\ sT = T^{-1}s:\quad & l^\varkappa x_k + (l^\varkappa-1-k)\nu_{\varkappa-1} \geqq (l^\varkappa-1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa - (\sigma-1)l^\varkappa \\ & \qquad - (1+\sigma(l+\cdots+l^{\varkappa-1})) \end{aligned}$$

oder, wegen des Wertes von $\nu_{\varkappa-1}$:

$$\begin{aligned} sT = Ts:\quad & l^\varkappa x_k \geqq (k-1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa, \\ sT = T^{-1}s:\quad & l^\varkappa x_k \geqq (k-1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa - (\sigma-1)l^\varkappa. \end{aligned}$$

Wenigstens in einer Ungleichung muß das Gleichheitszeichen auftreten. Man sieht, daß dies nur für $k = 1$ eintreten kann; somit

$$\begin{aligned} sT = Ts:\quad & x_1 = \varkappa\sigma, \\ sT = T^{-1}s:\quad & x_1 = \varkappa\sigma - (\sigma-1). \end{aligned}$$

Dagegen ist für $k > 1$:

$$sT = Ts\colon \quad x_k \geqq \varkappa\sigma + 1,$$

$$sT = T^{-1}s\colon \; x_k \geqq \varkappa\sigma + 2 - \sigma.$$

Daraus schließt man, wenn k zu l prim ist, wie z. B. für $k = 1$, daß λ_k selbst durch $\mathfrak{l}^{x_k}$ teilbar ist. Ist dagegen $k = l^i q$, wo q zu l prim ist und $0 < i < \varkappa$, so ist

$$\begin{aligned} sT = Ts\colon \; l^\varkappa x_k &\geqq (l^i q - 1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa \\ &\geqq (l^i - 1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa \\ &\geqq (l^{\varkappa+i-1} + \cdots + l^\varkappa)\sigma + \varkappa\sigma l^\varkappa, \\ x_k &\geqq \sigma(1 + l + \cdots + l^{i-1}) + \varkappa\sigma, \\ x_k - i\sigma &\geqq \sigma(1 + l + \cdots + l^{i-1} - i) + \varkappa\sigma. \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen kann nur für $q = 1$ eintreten. Daraus erkennt man, daß λ_k für $q = 1$, $i = 1$ wenigstens durch $\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma} = l^\varkappa$, für alle übrigen Fälle wenigstens durch $\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma+\sigma} = l^{\varkappa+1}$ teilbar ist. Entsprechend für $sT - T^{-1}s$. w. z. b. w.

1. **Ergänzung**: $l = 3$, $\sigma = 2$. *Wenn* $\Lambda^{1-T} \equiv 1(\mathfrak{L}^3)$, *so ist*

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{3^\varkappa - 1} T^i \Lambda_{\nu_{\varkappa-1}} \equiv 0 \;\; (\mathfrak{l}^{2\varkappa+1}),$$

und ebenso für jede andere elementarsymmetrische Funktion. Ist dagegen $\Lambda^{1-T} \not\equiv 1$ $(\mathfrak{L}^3)$, *so gilt der obige Satz.*

2. **Ergänzung**: $l = 2$. *Der obige Satz gilt, falls*

$$\nu_{\varkappa-1} = \sigma 2^\varkappa - (2\sigma - 1).$$

In jedem anderen Fall ist sicher für $sT = T^{-1}s$:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{2^\varkappa - 1} T^i \Lambda_{\nu_{\varkappa-1}} \equiv 0 \;\; (\mathfrak{l}^{\sigma\varkappa - (\sigma - 1)}).$$

V. **Hilfssatz**: *Die Spur jeder Zahl von* $K_\varkappa$ *in bezug auf den Verzweigungskörper ist wenigstens durch*

$$\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma}(sT = Ts) \;\; \textit{resp.} \;\; \mathfrak{l}^{\varkappa\sigma - (\sigma-1)}(sT = T^{-1}s)$$

teilbar.

Beweis. Man kann den Beweis von Hilfssatz IV statt für $\Lambda_{\nu_{\varkappa-1}}$ auch für Λ_r führen, wo Λ_r eine genau durch $\mathfrak{L}_\varkappa^r$ teilbare Zahl von $K_\varkappa$ ist, und r zu l prim ist. Dann folgt wieder

$$x_1 \geqq \varkappa\sigma \;\; \text{resp.} \;\; x_1 \geqq \varkappa\sigma - (\sigma - 1).$$

Also ist der Satz für alle Λ_r bewiesen. Nun kann man aber jeder Zahl A von $K_\varkappa$ die Form geben*)

$$A = \alpha + \Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2} + \cdots + \Lambda_{q_\varkappa},$$

wo α im Verzweigungskörper, Λ_{q_i} eine genau durch $\mathfrak{L}_i'^{q_i}$ teilbare Zahl von K_i und $q_i \not\equiv 0\ (l)$ ist. Somit

$$\sum_{i=0}^{l^\varkappa-1} T^i A = l^\varkappa \alpha + l^{\varkappa-1}\sum_{i=0}^{l-1} T^i \Lambda_{q_1} + l^{\varkappa-2}\sum_{i=0}^{l^2-1} T^i \Lambda_{q_2} + \cdots + \sum_{i=0}^{l^\varkappa-1} T^i \Lambda_{q_\varkappa}$$

oder nach dem eben Bewiesenen:

$$\sum_{i=0}^{l^\varkappa-1} T^i A \equiv 0\ (\mathfrak{l}^{\sigma\varkappa} \text{ resp. } \mathfrak{l}^{\sigma\varkappa-(\sigma-1)}).$$

Der Satz gilt somit stets.

VI. Hilfssatz: *Ist $sS = S^{-1}s$ und A irgend eine zu l prime Zahl von K_1, so kann man stets eine zu l prime Zahl r angeben, sodaß die r^{te} Potenz der Relativnorm von A in bezug auf k im Ring mit dem Führer $\mathfrak{l}^2$ liegt. Dabei ist $l = 3$, $\sigma = 2$, $A^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}^3)$ und $l = 2$ ausgeschlossen.*

Beweis. Es sei $A = \alpha + \Lambda^*$, wo α im Verzweigungskörper liegt, Λ^* durch $\mathfrak{L}$ teilbar, und $l = \mathfrak{L}^{l\sigma}$ ist. Man bestimme r_1 so prim zu l, daß α^{r_1} einer ganzen rationalen Zahl a (mod $\mathfrak{L}'^l$) kongruent wird, wo $\mathfrak{L}'$ ein in $\mathfrak{L}$ enthaltenes Primideal ist. Man setze

$$A^{r_1} = a + \Lambda,$$

wo Λ durch $\mathfrak{L}'$ teilbar ist und die Relativgleichung

$$\Lambda^l - \lambda_1 \Lambda^{l-1} + \cdots - \lambda_l = 0$$

in bezug auf den Verzweigungskörper besitze. Dann wird

$$\alpha_l = A^{r_1(1+T+\cdots+T^{l-1})} = a^l + a^{l-1}\lambda_1 + \cdots + \lambda_l.$$

Wäre $\Lambda \equiv 0\ (\mathfrak{L}'^l)$, so würde ohne weiteres $\alpha_l \equiv a^l\ (\mathfrak{L}'^{2l})$ folgen, was den Satz ergibt. Ist also Λ durch $\mathfrak{L}'^r$ teilbar, wo $r < l$, so folgt wieder, wenn λ_i genau durch $\mathfrak{L}'^{x_i l}$ teilbar ist,**)

$$x_i l \geqq l + i - 1 \quad \text{oder} \quad x_i \geqq 2 \quad \text{für} \quad i > 1.$$

Somit:

$$\alpha_l \equiv a^l + \lambda_1 a^{l-1} + \lambda_l \equiv a^l + \lambda_1 + \lambda_l \pmod{\mathfrak{L}'^{2l}},$$

da λ_1 und λ_l wenigstens durch $\mathfrak{L}'^l$ teilbar sind. Wenn $r > 1$, so ist λ_1 und λ_l aber auch durch $\mathfrak{L}'^{2l}$ teilbar. In diesem Falle und wenn $\lambda_1 + \lambda_l$ durch $\mathfrak{L}^{2l}$ teilbar ist, wird

*) Siehe Kapitel III, S. 223.

**) Siehe dieses Kapitel die Gleichungen (ε) S. 193.

$$\alpha_l \equiv a^l, \quad N(\mathsf{A})^{r_1} \equiv a^l \ (\mathfrak{l}^2),$$

und

$$N(\mathsf{A})^r \equiv 1 \ (\mathfrak{l}^2).$$

Man kann also annehmen, daß $\frac{(\mathsf{A})}{\mathfrak{L}'}$ zu $\mathfrak{L}'$ prim sei. Man setze

$$\mathsf{A}^{1-S} = \beta(1+\mathsf{A}'),$$

$$\mathsf{A}^{1-T} = \beta^{1+S+\cdots+S^{\frac{n}{n_0}-1}}\left(1+\sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i\mathsf{A}' + \cdots\right),$$

wo β im Verzweigungskörper liegt, also $\beta^{1+\cdots+S^{\frac{n}{n_0}-1}} = \beta^*$ in k. Da

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'),$$

wird $\beta^* \equiv 1 \ (l)$. Man setze

$$\mathsf{A}'' = \sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i\mathsf{A}' + \cdots, \quad \mathsf{A}^{1-T} = \beta^* \ (1+\mathsf{A}'').$$

Besitzt A'' die Relativgleichung

$$\mathsf{A}''^l - \lambda_1''\mathsf{A}''^{l-1} + \cdots - \lambda_l'' = 0,$$

und bildet man in $\mathsf{A}^{1-T} = \beta^*(1+\mathsf{A}'')$ die Relativnorm in bezug auf den Verzweigungskörper, so folgt, wie oben,

$$1 = \beta^{*l}(1+\lambda_1''+\cdots+\lambda_l''),$$

$$\lambda_1''+\lambda_l'' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Andererseits ist auch $\lambda_1'' = S\lambda_1''$, wie man sofort erkennt. Setzt man $\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}''} = \bar{\alpha} + \mathsf{A}^*$, wo $\bar{\alpha}$ im Verzweigungskörper liegt und A^* durch $\mathfrak{L}'$ teilbar ist, so wird

$$\lambda_1 \equiv \bar{\alpha}\lambda_1'' \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

$$\lambda_l \equiv \bar{\alpha}^l\lambda_l'' \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

$$\lambda_1+\lambda_l \equiv \bar{\alpha}\lambda_1''+\bar{\alpha}^l\lambda_l'' \equiv (\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^l)\,\lambda_1'' \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

$$\alpha_l = \mathsf{A}^{r_1(1+T+\cdots+T^{l-1})} \equiv a^l + (\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^l)\lambda_1'' \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

$$N(\mathsf{A})^{r_1} \equiv a^{\frac{n}{n_0}} + a^{\left(\frac{n}{n_0}-1\right)l}\lambda_1''\sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^l) \ (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Wenn aber $\left(\frac{d}{l}\right) = +1$ oder $= 0$, so ist $\bar{\alpha}^l \equiv S^k\bar{\alpha} \ (\mathfrak{L}'^l)$, also

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^l) \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^l),$$

$$N(\mathsf{A})^{r_1} \equiv a^{\frac{n}{n_0}l} \ (\mathfrak{L}'^{2l}), \text{ w. z. b. w.}$$

Wenn $\left(\frac{d}{l}\right) = -1$, so ist $\bar{a}^l \equiv s S^k \bar{a}$ $(\mathfrak{L}'^l)$, also

$$\alpha^* = \sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i(\bar{a} - \bar{a}^l)$$

eine Zahl, für die $s\alpha^* \equiv -\alpha^*$. Dann ist aber

$$N(\mathsf{A})^{r_1} - sN(\mathsf{A})^{r_1} \equiv \alpha^* \cdot a^{\left(\frac{n}{n_0}-1\right)l}(\lambda_1'' + s\lambda_1'') \quad (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Es erübrigt also noch, $\lambda_1'' + s\lambda_1''$ zu untersuchen. Dazu betrachte man

$$\Lambda^{1-T} = \beta^*(1+\Lambda''),$$
$$(s\Lambda)^{1-T^{-1}} = s\beta^*(1+s\Lambda''),$$
$$(s\Lambda)^{T-1} = s\beta^*(1+Ts\Lambda''),$$
$$\left(\frac{\Lambda}{s\Lambda}\right)^{1-T} = \beta^* s\beta^*(1+\Lambda'')(1+Ts\Lambda''),$$

woraus, da $\frac{\Lambda}{s\Lambda} = \Omega$ zu $\mathfrak{L}'$ prim ist, und $\beta^* \equiv 1$ $(\mathfrak{L}'^l)$:

$$Ts\Lambda'' \equiv -\frac{\Lambda''}{1+\Lambda''} \quad (\mathfrak{L}'^2),$$

$$s\lambda_1'' = s \cdot \sum_{i=0}^{l-1} T^i\Lambda'' \equiv -\sum T^i \frac{\Lambda''}{1+\Lambda''} \quad (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Nun genügt aber $\bar{\Lambda} = \frac{\Lambda''}{1+\Lambda''}$ der Relativgleichung

$$\bar{\Lambda}^l - \lambda_1''\bar{\Lambda}^{l-1}(1-\bar{\Lambda}) + \cdots - \lambda_l''(1-\bar{\Lambda})^l = 0,$$

woraus:

$$(1+\lambda_1''+\lambda_l'')\bar{\Lambda}^l - \lambda_1''\bar{\Lambda}^{l-1}(1-\bar{\Lambda}) - \lambda_l''(1-\bar{\Lambda})^l \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^{2l+1}),$$

$$\bar{\Lambda}^l - \frac{\lambda_1''}{1+\lambda_1''+\lambda_l''}\bar{\Lambda}^{l-1} - \lambda_l'' \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^{2l+1}),$$

oder, da $\lambda_1'' + \lambda_l''$ durch $\mathfrak{L}'^{2l}$ teilbar ist:

$$\sum_{i=0}^{l-1} T^i\bar{\Lambda} = \sum_{i=0}^{l-1} T^i \frac{\Lambda''}{1+\Lambda''} \equiv \lambda_1'' \quad (\mathfrak{L}'^{2l});$$

also ist

$$s\lambda_1'' \equiv -\lambda_1'' \quad \text{oder} \quad \lambda_1'' + s\lambda_1'' \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^{2l})$$

oder

$$N(\mathsf{A})^r - sN(\mathsf{A})^r \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^{2l})$$

also auch

$$\equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^2) \quad \text{w. z. b. w.}$$

1. **Ergänzung:** *Wenn $l = 3$, $\sigma = 2$, so ist die Norm in bezug auf k der $(1-s)^{\text{ten}}$ symbolischen Potenz jeder Zahl von K_1, die zu (l) prim ist, im Ring mit dem Führer 3.*

Denn es ist $\Lambda^{1-s} \equiv 1\ (\mathfrak{L}^2)$, da s eine Substitution der absoluten Verzweigungsgruppe ist. Daraus ergibt sich ohne weiteres für die Norm in bezug auf den Verzweigungskörper:

$$(\Lambda^{1-s})^{1+T+T^2} \equiv 1\ (\mathfrak{L}^6)$$

oder für die Norm in bezug auf k:

$$N(\Lambda^{1-s}) \equiv 1\ (3) \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wir kehren zum Körper $K(K', K'')$ von 1. zurück.

3. Es soll der Satz bewiesen werden:

Satz: *Die Verzweigungsgruppe der in* (l) *enthaltenen Primideale des Körpers* K' *resp.* K'' *ist zyklisch, wenn* $l \neq 2$.

Wir gehen von dem Gegenteil aus. Gäbe es in K' resp. K'' zwei zum Verzweigungskörper relativ-zyklische Körper K_1 und K_2 vom Relativgrade l, sodaß im Oberkörper $K(K_1, K_2)$ vom Relativgrad l^2:

$$(l) \equiv \mathfrak{L}^{\sigma l^2} \quad \left(\sigma = 1,\ \left(\frac{d}{l}\right) \neq 0;\ \sigma = 2,\ \left(\frac{d}{l}\right) = 0\right),$$

wo $\mathfrak{L}$ aus lauter voneinander verschiedenen Primidealen zusammengesetzt ist, so nehme man eine durch $\mathfrak{L}$ teilbare Zahl Λ; $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}}$ sei zu $\mathfrak{L}$ prim. Um unnötige Fallunterschiede zu vermeiden, schließen wir den Fall $sT = Ts$, $\sigma = 2$ aus.

a) Es seien T_1 und T_2 die Grundsubstitutionen von K_1 und K_2 relativ zum Verzweigungskörper. Man setze

$$\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_1 \equiv 1\ (\mathfrak{L}).$$

Ist $\mathfrak{L}'$ ein Primideal von $\mathfrak{L}$ und (Λ_1) genau durch $\mathfrak{L}'^r$ teilbar, so würde durch Bildung der Relativnorm von Λ in bezug auf K_1 folgen

$$\Lambda^{(1+T_2+\cdots+T_2^{l-1})(1-T_1)} = \Lambda^{*(1-T_1)} \equiv 1\ (\mathfrak{L}'^r).$$

Nach Hilfssatz I ist deshalb $r \leqq l$, wenn $l = 3$, $\sigma = 2$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}'^3)$ zunächst ausgeschlossen wird. Es sei

$$\Lambda_1^l - \lambda_1' \Lambda_1^{l-1} + \cdots - \lambda_l' = 0$$

die Relativgleichung von Λ_1 in bezug auf K_1, dann ist

$$\Lambda^{*1-T_1} = 1 + \lambda_1' + \lambda_2' + \cdots + \lambda_l'.$$

Somit dürfen nicht alle λ_i' durch $\mathfrak{L}^{l+1}$ teilbar sein. Nun ist aber

$$\Lambda_1^{1-T_2} \equiv 1\ (\mathfrak{L}), \qquad \Lambda_1 - T_2\Lambda_1 \equiv 0\ (\mathfrak{L}'^{r+1})$$

also:

$$\delta = \prod_{i=1}^{l-1} (\Lambda_1 - T_2^i \Lambda_1) = l\Lambda_1^{l-1} - \lambda_1'(l-1)\Lambda_1^{l-2} + \cdots + \lambda_{l-1}' \equiv 0\ (\mathfrak{L}'^{(r+1)(l-1)}).$$

Wenn $r < l$, so folgen hieraus, wie früher, die Ungleichungen:

$$x_i' l \geqq l - 1 + ri \geqq l - 1 + r,$$

wenn λ_i' genau durch $\mathfrak{L}'^{x_i' l}$ teilbar ist. Also ist nur $r = 1$ möglich.

Wäre aber $r = l$, so folgt aus $\Lambda - T_1\Lambda \equiv 0$ $(\mathfrak{L}'^{l+1})$ und der Relativgleichung

$$\Lambda^l - \lambda_1 \Lambda^{l-1} + \cdots + \lambda_{l-1}\Lambda - \lambda_l = 0$$

von Λ in bezug auf K_2, wie oben,

$$x_i l \geqq l^2 - l + i.$$

Einmal muß hier das Gleichheitszeichen auftreten, was nur für $i = 0$ eintreten könnte. Somit ist auch dieser Fall zu verwerfen und $r = 1$ bewiesen. Dies zeigt man für jedes $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{L}$.

Ist Λ_r eine durch $\mathfrak{L}^r$ teilbare Zahl, wo $r \not\equiv 0 \pmod{l}$ und $\frac{(\Lambda_r)}{\mathfrak{L}^r}$ zu $\mathfrak{L}$ prim ist, so ist $\frac{\Lambda_r}{\Lambda^r} = \Omega$ eine zu $\mathfrak{L}$ prime Zahl, für die $\Omega^{1-T_1} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^2)$. Somit ist auch

$$\Lambda_r^{1-T_1} \equiv \Lambda^{r(1-T_1)} \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^2)$$
$$\equiv 1 \ (\mathfrak{L}),$$

denn

$$\Lambda^{r(1-T_1)} \equiv 1 + r\Lambda_1 \ (\mathfrak{L}^2) \quad \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^2).$$

Resultat: *Ist Λ_r eine durch $\mathfrak{L}^r$ teilbare Zahl, wo $\frac{(\Lambda_r)}{\mathfrak{L}^r}$ zu $\mathfrak{L}$ prim ist, so ist*

$$\Lambda_r^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}) \quad \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^2)$$

falls $r \not\equiv 0 \pmod{l}$ für jedes in $\mathfrak{L}$ enthaltene Primideal $\mathfrak{L}'$. Dieser Satz gilt für jede Substitution T der Verzweigungsgruppe von $K(K_1, K_2)$

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} \quad \{0 \leqq x_i < l\},$$

mit Ausnahme von $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

b) Es sei $T_1 = S_1^{\nu_1}$, $T_2 = S_2^{\nu_2}$, wo S_1, S_2 Substitutionen der Relativgruppe von $K(K_1, K_2)$ in bezug auf k sind, dagegen seien T_1 und T_2 nicht die $l\nu_1$. resp. $l\nu_2$. Potenzen solcher Substitutionen. Dann kann man unter K_1 speziell den relativ-zyklischen Körper mit der Relativgruppe

$$S_1^{x_1} \ (0 \leqq x_1 < l\nu_1),$$

unter K_2 denjenigen mit der Relativgruppe

$$S_2^{x_2} \ (0 \leqq x_2 < l\nu_2)$$

verstehen. $K(K_1, K_2)$ hat dann die Relativgruppe $S_1^{x_1} S_2^{x_2}$ $(0 \leqq x_i < l\nu_i)$. Es habe Λ die frühere Bedeutung und $\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_1$. Dann ist

$$\Lambda^{(1-S_1)(1-T_1)} = 1 + \frac{\Lambda_1 - S_1\Lambda_1}{1 + S_1\Lambda_1}.$$

Nun ist aber $\Lambda^{1-S_1} = \Omega$ eine zu $\mathfrak{L}$ prime Zahl, somit:

$$\Omega^{1-T_1} = \Lambda^{(1-T_1)(1-S_1)} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^2),$$
$$\Lambda_1 - S_1 \Lambda_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^2),$$
$$\Lambda_1^{1-S_1} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}).$$

Die Zahl $\frac{(\Lambda_1 s \Lambda_1)^{s^{\frac{l+1}{2}}}}{l}$, die wir wieder mit Λ abkürzen, hat deshalb die Eigenschaften

1. $\Lambda \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^\sigma)$; 2. $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}^\sigma}$ zu $\mathfrak{L}$ prim; 3. $\Lambda = s\Lambda$; 4. $\Lambda^{1-S_1} \equiv 1 \ (\mathfrak{L})$.

Setzt man $\Lambda^{1-S_1} = 1 + \Lambda_1$, so ist $\frac{(\Lambda_1)}{\mathfrak{L}}$ zu $\mathfrak{L}$ prim und

$$\Lambda^{1-T_1} = (1+\Lambda_1)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}}.$$

Wird durch Λ_i eine genau durch $\mathfrak{L}^i$ teilbare Zahl bezeichnet

$$\left(\frac{(\Lambda_i)}{\mathfrak{L}^i} \text{ zu } \mathfrak{L} \text{ prim}\right),$$

so folgt sukzessive:

$$\Lambda^{(1-T_1)^2} = \left(1 + \frac{\Lambda_1 - T_1\Lambda_1}{1 + T_1\Lambda_1}\right)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}} = (1+\Lambda_2)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Lambda^{(1-T_1)^{l-1}} = \left(1 + \frac{\Lambda_{l-2} - T_1\Lambda_{l-2}}{1 + T_1\Lambda_{l-2}}\right)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}} = (1+\Lambda_{l-1})^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}}.$$

Wenn also T irgend eine Substitution der Verzweigungsgruppe bedeutet, so wird

$$\Lambda^{(1-T)(1-T_1)^{l-1}} = (1+\Lambda_l)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}},$$
$$\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \equiv (1+\Lambda_l^l)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}} \ (\mathfrak{L}^{n+1}),$$
$$\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{n+1}). \qquad (\varphi)$$

Jede Zahl ist (mod $\mathfrak{L}$) einer Zahl des Trägheits- resp. Verzweigungskörpers kongruent*), somit auch $\frac{\Lambda_l^l}{\lambda}$, wo λ eine durch $\mathfrak{L}^n$ teilbare Zahl von k ist $\left(\lambda = l, \left(\frac{d}{l}\right) \neq 0;\ \lambda = \sqrt{m}, \left(\frac{d}{l}\right) = 0\right)$. Somit ist Λ_l^l einer Zahl des Verzweigungskörpers (mod $\mathfrak{L}^{n+1}$) kongruent. Außerdem kann man S_1 so gewählt denken, daß die stets zyklische Relativgruppe des Trägheitskörpers zum Zerlegungskörper*) in $S_1^{x_1}$ $(0 \leqq x_1 < \nu_1)$ enthalten ist. Dann ist $(1+\Lambda_l^l)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}}$ einer Zahl des Zerlegungskörpers (mod $\mathfrak{L}^{n+1}$) kongruent. Ist $\mathfrak{L}'$ ein Primideal von $\mathfrak{L}$, so setze man $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}'$, wenn $\mathfrak{L}' = s\mathfrak{L}'$;

---

*) Weber: Algebra II, S. 663.

$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}' s \mathfrak{L}'$, wenn $\mathfrak{L}' \neq s\mathfrak{L}'$. Jede Zahl des Zerlegungskörpers ist (mod $\mathfrak{L}_1^{\varrho}$) einer Zahl von k kongruent*). Weil aber

$$\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \equiv 1 + \Lambda^*(\mathfrak{L}^{\varrho+1}),$$

wo Λ^* im Zerlegungskörper liegt und durch $\mathfrak{L}^{\varrho}$ teilbar ist, so ist $\frac{\Lambda^*}{\lambda}$ einer Zahl von k (mod $\mathfrak{L}_1$) kongruent und

$$\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \equiv \pi \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{L}_1^{\varrho+1}) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{L}_1^{\varrho})$$
$$\not\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{L}_1^{\varrho+1}),$$

wo π in k liegt. Wir setzen

$$\Lambda^{l(1-T_1)(1-T_1)^{l-1}} \equiv \pi_0 \quad (\mathfrak{L}_1^{\varrho+1}),$$
$$\Lambda^{l(1-T_1T_2)(1-T_1)^{l-1}} \equiv \pi_1 \quad (\mathfrak{L}_1^{\varrho+1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Lambda^{l(1-T_1T_2^{l-1})(1-T_1)^{l-1}} \equiv \pi_{l-1} (\mathfrak{L}_1^{\varrho+1}).$$

Wenn

α) $sT_1 = T_1^{-1}s$, $sT_2 = T_2^{-1}s$, so folgt wegen $\mathfrak{L}_1 = s\mathfrak{L}_1$, $\Lambda = s\Lambda$:

$$s\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} = \Lambda^{l(1-T^{-1})(1-T_1^{-1})^{l-1}} \equiv \Lambda^{-l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \equiv s\pi(\mathfrak{L}_1^{\varrho+1})$$

oder

$$\frac{1}{\pi} \equiv s\pi; \ \pi s\pi \equiv 1\,(\mathfrak{L}^{2\varrho}); \ \pi \equiv 1\,(\mathfrak{L}^{\varrho}) \not\equiv 1\,(\mathfrak{L}^{2\varrho}).$$

Dies gilt für jedes π_i. Da es aber nur $l-1$ inkongruente Zahlen π_i (mod $\mathfrak{L}^{2\varrho}$) in k gibt, die diesen Bedingungen genügen, so muß für bestimmtes i und k

$$\pi_i \equiv \pi_k(\mathfrak{L}^{2\varrho}) \ (i \neq k),$$
$$\Lambda^{l(1-T_2^iT_1)(1-T_1)^{l-1}} \equiv \Lambda^{l(1-T_2^kT_1)(1-T_1)^{l-1}} (\mathfrak{L}_1^{\varrho+1}),$$
$$\Lambda^{l(T_2^kT_1 - T_2^iT_1)(1-T_1)^{l-1}} \equiv 1 (\mathfrak{L}_1^{\varrho+1}),$$
$$\Lambda^{l(1-T_2^{i-k})(1-T_1)^{l-1}} \equiv 1 (\mathfrak{L}_1^{\varrho+1}).$$

Dies widerspricht der Formel (φ). Die Annahme ist daher zu verwerfen.

β) $sT_1 = T_1 s$, $sT_2 = T_2 s$, $\sigma = 1$. Durch dieselbe Überlegung wie im Falle α) folgt

$$\pi \equiv s\pi \ (\mathrm{mod}\ l^2), \ \pi \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ l) \not\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ l^2).$$

Da es nur $(l-1)$ solcher π gibt (mod l^2), folgt der Widerspruch auf gleiche Weise wie oben.

Fall $l = 3$, $\sigma = 2$; hier ist $(3) = \mathfrak{L}^{18}$; wir beschränken uns auf den Fall $sS = S^{-1}s$ und greifen, wie vorhin, K_1 und K_2 heraus. Es sei

$$\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_r \equiv 1(\mathfrak{L}'^{r}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r+1}).$$

*) Weber: Algebra II, S. 662. $\mathfrak{L}'^{\varrho}$ ist ein Primideal 1. Grades.

Durch Normbildung in bezug auf K_1 erkennt man, daß $r \leqq 9$. Es sei Λ die in b) definierte Zahl, für die $\Lambda = s\Lambda$, $\Lambda \equiv 0(\mathfrak{L}^x)$. Dann folgt

$$s\Lambda^{1-T_1} = \Lambda^{1-T_1^{-1}} = 1 + s\Lambda_r,$$

$$T_1 s\Lambda_r = -\frac{\Lambda_r^1}{1+\Lambda_r},$$

woraus man schließt, daß r *ungerade* sein muß. Wäre

a) $r = 3$, so wäre $\Lambda - T_1\Lambda \equiv 0(\mathfrak{L}'^5) \not\equiv 0(\mathfrak{L}'^6)$. Bedeutet

$$\Lambda^3 - \lambda_1\Lambda^2 + \lambda_2\Lambda - \lambda_3 = 0$$

die Relativgleichung von Λ in bezug auf K_2, so ist, falls λ_i genau durch $\mathfrak{L}^{6x_i}$ (wegen $s\Lambda = \Lambda$) teilbar ist,

$$3\Lambda^2 - 2\lambda_1\Lambda + \lambda_2 \equiv 0(\mathfrak{L}'^{10}) \not\equiv (\mathfrak{L}'^{11});$$

$$6x_i \geqq 6 + 2i.$$

In dieser Ungleichung muß für $i = 1$ oder 2 das Gleichheitszeichen auftreten; da dies unmöglich ist, ist die Annahme $r = 3$ zu verwerfen.

b) $r = 9$. In diesem Falle sei λ eine genau durch $\mathfrak{L}^9$ teilbare Zahl des Verzweigungskörpers. Man kann dann setzen:

$$\Lambda^{1-T_1} = (1 + \lambda)(1 + \lambda\Lambda'),$$

wo Λ' wenigstens durch $\mathfrak{L}$ teilbar ist. Bildet man die Norm in bezug auf K_1, so wird

$$\Lambda^{(1+T_2+T_2^2)(1-T_1)} = \Lambda^{*(1-T_1)} = (1+\lambda)^3(1 + \lambda\lambda_1' + \lambda^2\lambda_2' + \lambda^3\lambda_3')$$
$$\equiv 1(\mathfrak{L}'^{12}),$$

was nach Hilfssatz I. unmöglich ist.

c) r kann also nur eine ungerade zu 3 prime Zahl < 9 sein; somit $r = 1$, 5 oder 7. Da dasselbe für T_2 gilt, so kann man setzen:

$$\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_{r_1};\ \Lambda^{1-T_2} = 1 + \Lambda_{r_2};\ \left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = 1,\ 5 \text{ oder } 7.$$

Wäre $r_1 > 1$, $r_2 > 1$, so folgt durch Normbildung von $\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_{r_1}$ in bezug auf K_1:

$$\Lambda^{*1-T_1} = \Lambda^{(1+T_2+T_2^2)(1-T_1)} = 1 + \lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3',$$

wo

$$\Lambda_{r_1}^3 - \lambda_1'\Lambda_{r_1}^2 + \lambda_2'\Lambda_{r_1} - \lambda_3' = 0$$

die Relativgleichung von Λ_{r_1} in bezug auf K_1 bedeute. Die Relativdifferente von Λ_{r_1} ist aber

$$\delta(\Lambda_{r_1}) = 3\Lambda_{r_1}^2 - 2\lambda_1'\Lambda_{r_1} + \lambda_2' \equiv 0(\mathfrak{L}^{2(r_1+r_2)}),$$

also, da $r_1 \not\equiv 0(3)$ und $\lambda_i' \equiv 0(\mathfrak{L}^{3x_i'})$:

$$3x_i' \geqq 2r_2 + r_1 i \geqq 10 + 5i \geqq 15$$

oder

$$\Lambda^{*(1-T_1)} \equiv 1(\mathfrak{L}^{15}),$$

was unmöglich, wegen Hilfssatz I. Also ist wenigstens z. B. $r_1 = 1$. Aber auch dann ist bei $r_2 \geqq 5$:

$$3x_i' \geqq 10 + i \geqq 11,$$
$$\Lambda^{*(1-T_1)} \equiv 1(\mathfrak{L}^{12}),$$

was unmöglich. Also ist $r_1 = r_2 = 1$ und der Satz genau wie früher zu beweisen.

4. Im Fall $l = 2$ liegen die Verhältnisse anders; bilden doch schon $K(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$ zwei zu k relativ-zyklische Körper, deren Relativdiskriminante 2 wesentlich enthält.

Satz: *Die Verzweigungsgruppe relativ zu k der in* (2) *enthaltenen Primideale von K' resp. K'' ist zyklisch, wenn* $\left(\frac{d}{2}\right) = 0$; *zyklisch oder von der Form*

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} \begin{cases} 0 \leqq x_1 < 2 \\ 0 \leqq x_2 < 2^{\nu}, \end{cases}$$

wenn $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$, *wo ν irgendeine Zahl sein kann.*

Beweis.

a) $\left.\begin{matrix}\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0 \\ \sigma = 1\end{matrix}\right\}$. Wir nehmen zunächst an, die Verzweigungsgruppe sei

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} \text{ resp. } T_1^{x_1} T_2^{x_2} T_3^{x_3}, \text{ wo } 0 \leqq x_i < 2,\ T_i^2 = 1\ (i = 1, 2, 3).$$

Es ist somit $(2) = \mathfrak{L}^4$ resp. $\mathfrak{L}^8$. Wir setzen $(2) = \mathfrak{L}^{\nu}$, $\nu = 4, 8$. Ist $\Lambda \equiv 0(\mathfrak{L})$, $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}}$ zu $\mathfrak{L}$ prim, so wird für irgendein $T \neq 1$ der Verzweigungsgruppe

$$\Lambda^{1-T} = 1 + \Lambda_r \equiv 1(\mathfrak{L}'^r) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r+1}).$$

Wäre $r \geqq \nu$, so findet man z. B. im Falle $T = T_1$, $\nu = 8$ ohne weiteres

$$\Lambda^{(1-T_1)(1+T_2)(1+T_3)} = \Lambda^{*(1-T_1)} \equiv 1(\mathfrak{L}'^9),$$

was gegen Hilfssatz I. ist. Somit muß stets $r < \nu$ sein. *r ist aber auch ungerade;* denn es ist

$$\Lambda^{(1-T)(1+T)} = 1 = 1 + (\Lambda_r + T\Lambda_r) + \Lambda_r T\Lambda_r$$

oder

$$0 = (\Lambda_r + T\Lambda_r) + \Lambda_r T\Lambda_r = (\Lambda_r - T\Lambda_r) + 2T\Lambda_r + \Lambda_r T\Lambda_r$$
$$\equiv \Lambda_r - T\Lambda_r + \Lambda_r T\Lambda_r (\mathfrak{L}'^{\nu+r}).$$

Da aber $\Lambda_r - T\Lambda_r$ durch $\mathfrak{L}'^{2r+1}$ teilbar ist, sobald r gerade ist, weil $\left(\frac{\Lambda_r}{\Lambda^r}\right)^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}'^{r+1})$, so wäre auch $\Lambda_r T\Lambda_r$ durch $\mathfrak{L}'^{2r+1}$ teilbar, was unmöglich.

Im Fall $\nu = 4$ ist aber wenigstens für ein T das zugehörige $r = 1$. Wäre nämlich

$$\Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}^3), \quad \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}^3),$$

so wäre

$$\Lambda^{(1-T_1)(1+T_2)} = 1 + (\Lambda_r + T_2\Lambda_r) + \Lambda_r T_2 \Lambda_r \equiv 1 + (\Lambda_r - T_2\Lambda_r) + \Lambda_r T_2 \Lambda_r \; (\mathfrak{L}^7)$$
$$\equiv 1 \; (\mathfrak{L}^6),$$

was gegen Hilfssatz I. verstößt. Somit sind nur die beiden Fälle möglich:

$$\alpha) \quad \begin{array}{l} \Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2), \\ \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2). \end{array} \qquad \beta) \quad \begin{array}{l} \Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2), \\ \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}^3) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^4). \end{array}$$

Im Falle $\nu = 8$ ist deshalb ebenfalls für wenigstens ein $T = T_1$ das zugehörige $r = 1$. Denn wäre

$$\Lambda^{1-T_i} \equiv 1(\mathfrak{L}^3), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

so wäre

$$\Lambda^{(1-T_1)(1+T_2)} \equiv 1(\mathfrak{L}^4), \quad \Lambda^{(1-T_2)(1+T_3)} \equiv 1(\mathfrak{L}^4),$$

was gegen die beiden einzig möglichen Fälle α) und β) wäre.

Wäre aber nun

$$\Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2), \quad \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}^3), \quad \Lambda^{1-T_3} \equiv 1(\mathfrak{L}^3),$$

so würde auch

$$\Lambda^{(1+T_1)(1-T_2)} \equiv \Lambda^{(1+T_1)(1-T_3)} \equiv 1(\mathfrak{L}^4)$$

folgen, was wieder gegen die Fälle α) und β) verstößt. Somit sei

$$\Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2), \quad \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv (\mathfrak{L}'^2), \quad \Lambda^{1-T_3} \equiv 1(\mathfrak{L}^r) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r+1}).$$

r ist ungerade. Nun ist

$$\Lambda^{(1+T_1)(1-T_3)} = (1+\Lambda_r)^{1+T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}^{r+1}); \quad \Lambda^{(1+T_1)(1-T_2)} \equiv 1(\mathfrak{L}^2).$$

Somit, wegen der Fälle α) und β) sicher $1 + r \leqq 6$, $r \leqq 5$. Es kann also nur $r = 1$ oder 5 sein. Ist $r = 1$, so schließt man genau wie im allgemeinen Fall, daß

$$\Lambda^{4(1-T)(1-T_i)} \equiv \pi_i(\mathfrak{L}_1^9) \not\equiv 1(\mathfrak{L}_1^9)$$
$$\equiv 1(\mathfrak{L}_1^8). \qquad (i = 1, 2, 3).$$

T ist dabei eine durch die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}' s \mathfrak{L}'$ festgelegte Substitution. Da es (mod 4) nur vier inkongruente Zahlen $\pi \equiv 1(2)$ gibt, so müssen zwei π_i einander (mod 4) kongruent sein, also

$$\Lambda^{4(1-T)(1-T_i)} \equiv \Lambda^{4(1-T)(1-T_k)}(\mathfrak{L}_1^9),$$
$$\Lambda^{4(1-T)(1-T_i T_k)} \equiv 1(\mathfrak{L}_1^9),$$

was obigem widerspricht.

Ist dagegen $r = 5$, so folgt

$$\Lambda^{(1+T_3)(1-T_i)} = (1+\Lambda_1)^{1+T_3} = (1 + \Lambda_1 + T_3\Lambda_1 + \Lambda_1 T_3 \Lambda_1)$$
$$= (1 + \Lambda_1 - T_3\Lambda_1 + 2T_3\Lambda_1 + \Lambda_1 T_3 \Lambda_1) \equiv 1 + \Lambda_1 T_3 \Lambda_1 (\mathfrak{L}^4)$$
$$\equiv 1(\mathfrak{L}^2) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^3). \qquad (i = 1, 2)$$

Nehmen wir mit Hilfe der Substitution T_3 die Normen aller Zahlen, so erhalten wir deshalb einen Unterkörper, dessen Verzweigungsgruppe durch $T_1^{x_1} T_2^{x_2}$ gegeben werden kann und in dem

$$(2) = \mathfrak{L}^4, \quad \Lambda^{1-T_i} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv (\mathfrak{L}'^2), \qquad (i = 1, 2)$$

falls Λ eine genau durch $\mathfrak{L}$ teilbare Zahl ist. Wir betrachten diesen Unterkörper für sich allein, schreiben wieder $\mathfrak{L}$ an Stelle von $\mathfrak{L}$ und beweisen, daß er nicht existieren kann. Setzt man

$$T_1 = S_1^{\nu_1}, \; T_2 = S_2^{\nu_2} \text{ und } S_1 \neq S_1'^2, \; S_2 \neq S_2'^2,$$

so greife man den Oberkörper mit der Relativgruppe

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \qquad (0 \leqq x_i < 2\nu_i, \; i = 1, 2)$$

heraus. In demselben ist entweder

$$\Lambda_1 = \Lambda + s\Lambda \quad \text{oder} \quad \Lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{m}}{2} \Lambda + \frac{1 - \sqrt{m}}{2} s\Lambda$$

eine genau durch $\mathfrak{L}$ teilbare Zahl $\left(\frac{(\Lambda_1)}{\mathfrak{L}} \text{ zu } 2 \text{ prim}\right)$, für die $\Lambda_1 = s\Lambda_1$. Bilden die Potenzen von S_1 die Zerlegungsgruppe, so folgt genau wie früher

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{2(1-T_1)(1-T)} &\equiv (1 + \Lambda_2^2)^{1 + S_1 + \cdots + S_1^{\nu_1 - 1}} (\mathfrak{L}^6) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^5) \\ &\equiv \pi(\mathfrak{L}_1^5) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^5) \\ &\equiv 1(\mathfrak{L}_1^4), \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}' s \mathfrak{L}'$. Es müßte also $\pi \equiv -1(4)$. Nimmt man für T einmal T_1, einmal T_2, so erhält man den Widerspruch wie früher. Damit ist bewiesen, daß im Fall $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ die Verzweigungsgruppe der in 2 enthaltenen Primideale höchstens zwei unabhängige Substitutionen enthält, deren Quadrat die Einheitssubstitution ist.

b) $\left(\frac{d}{2}\right) = 0$, $\sigma = 2$. Dieser Fall wird mit den Mitteln von a) erledigt, wenn man dabei nur die absolute Verzweigungsgruppe der in 2 enthaltenen Primideale betrachtet, also die Substitution s neben den T mit hinzuzieht. Man findet, daß die absolute Verzweigungsgruppe nur die Form

$$s^x T^X \qquad (0 \leqq x < 2, \; 0 \leqq X < 2^u)$$

haben kann.

c) Es bleibt noch übrig, im Falle $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ zu beweisen, daß niemals der Fall einer Verzweigungsgruppe

$$T = T_1^{x_1} T_2^{x_2}, \qquad (0 \leqq x_i < 4)$$

wo $(2) = \mathfrak{L}^{16}$ ist, auftreten kann. Hat Λ die frühere Bedeutung, und ist

$$\Lambda^{1-T} = 1 + \Lambda_r \equiv 1(\mathfrak{L}^r) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r+1}),$$

so zeigt man mit den früheren Mitteln, daß $r < 4$. Es sei

$$\Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}^{r_1}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r_1+1}); \quad \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}^{r_2}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r_2}),$$

wo $r_1 \leqq r_2 < 4$. Dann folgt:

$$\Lambda^{1-T_1^2} \equiv 1(\mathfrak{L}^{2r_1}); \quad \Lambda^{1-T_2^2} \equiv 1(\mathfrak{L}^{2r_2})$$

und somit

$$\Lambda^{(1+T_1^2)(1+T_2^2)(1-T_1)} \equiv 1(\mathfrak{L}^{4r_1}),$$

$$\Lambda^{(1+T_1^2)(1+T_2^2)(1-T_2)} \equiv 1(\mathfrak{L}^{2(r_1+r_2)+1} \text{ resp. } \mathfrak{L}^{4r_2}, \text{ wenn } 4r_2 < 2(r_1+r_2)+1).$$

Nun liegt $\Lambda^{(1+T_1^2)(1+T_2^2)}$ in einem Unterkörper, wie er in Fall a) studiert wurde; da nur die dortigen Fälle α) und β) auftreten können, ist

$$4r_1 \leqq 4; \quad 2(r_1+r_2)+1 \leqq 12.$$
$$r_1 = 1 \qquad r_2 \leqq 4.$$

Man zeigt, daß r_2 ungerade, also $= 1, 3$ sein muß. Der Fall $r_2 = 1$ erledigt sich wie früher als unmöglich. Also bleibt nur der Fall $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ übrig. Man beweist, daß

$$\Lambda^{1-T_1^2} \equiv 1(\mathfrak{L}^3) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^4); \quad \Lambda^{1-T_2^2} \equiv 1(\mathfrak{L}^5).$$

Dann sieht man, daß

$$\Lambda^{4(1-T_1)(1-T_2)} \equiv \pi_1(\mathfrak{L}_1^{17}) \equiv 1(\mathfrak{L}_1^{16}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}_1^{17}),$$
$$\Lambda^{4(1-T_1)(1-T_1^2 T_2)} \equiv \pi_2(\mathfrak{L}_1^{17}) \equiv 1(\mathfrak{L}_1^{16}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}_1^{17}),$$

wo π_1, π_2 in k liegen und $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}' s \mathfrak{L}'$ ist. Da aber $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv -1(4)$ sein muß, so folgt

$$\Lambda^{4(1-T_1)(1-T_2)} \equiv \Lambda^{4(1-T_1)(1-T_1^2 T_2)} (\mathfrak{L}_1^{17}),$$
$$\Lambda^{4(1-T_1)(1-T_1^2)} \equiv 1 (\mathfrak{L}_1^{17}),$$

was unmöglich ist. Damit ist die Unmöglichkeit unserer Annahme in jedem Fall erwiesen und der Satz bewiesen.

5. Wir kehren nun wieder zu dem Körper $K(K', K'')$ zurück. Es werde $(l) = \mathfrak{L}'^{a n_0'}$ in K' resp. $= \mathfrak{L}''^{a n_0''}$ in K'', wo $\mathfrak{L}^{(i)}$ ein aus lauter voneinander verschiedenen Primidealen zusammengesetztes Ideal ist. Haben wir einen entsprechenden zweiten Körper $\bar{K}(\bar{K}', \bar{K}'')$, in dem alle Größen gleich, nur überstrichen bezeichnet seien, so bilden wir den gemeinsamen Oberkörper der beiden Körper $K^*(K^{*\prime}, K^{*\prime\prime})$, wo sich somit $K^{*\prime}$ aus K' und $\bar{K}'$, $K^{*\prime\prime}$ aus K'' und $\bar{K}''$ zusammensetzt. Es werde nun (l) in $K^{*\prime}$ die $n_0^{*\prime}$te Potenz, in $K^{*\prime\prime}$ die $n_0^{*\prime\prime}$te Potenz eines Ideals $\mathfrak{L}'^*$ resp. $\mathfrak{L}''^*$ von der früheren Eigenschaft. Dann gilt der Satz, *daß $n_0^{*\prime}$ die größere der beiden Zahlen n_0' und $\bar{n}_0'$, $n_0^{*\prime\prime}$ die größere der beiden Zahlen n_0'' und $\bar{n}_0''$ ist.* Dabei ist nur der Fall $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ ausgenommen; *in letzterem Falle ist $n_0'^*$ resp. $n_0''^*$ ebenfalls die größere der Zahlen n_0' und $\bar{n}_0'$ resp.*

n_0'' und $\bar{n}_0''$, falls die Verzweigungsgruppe in beiden Körpern K' und $\bar{K}'$ resp. K'' und $\bar{K}''$ nicht zyklisch ist; im anderen Falle kann sie auch das doppelte desjenigen $n_0^{(i)}$ oder $\bar{n}_0^{(i)}$ werden, in dessen Körper die Verzweigungsgruppe zyklisch ist.

Beweis: a) $l \neq 2$ oder $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) = 0$. Man darf $K^{(i)}$ und $\bar{K}^{(i)}$ als ohne gemeinsamen Unterkörper außer k annehmen ($i = 1, 2$). Dann setzt sich die Relativgruppe von $K^{*(i)}$ zusammen aus den Relativgruppen von $K^{(i)}$ und $\bar{K}^{(i)}$. Die Verzweigungsgruppe von den in (l) enthaltenen Primidealen ist in $K^{(i)}$, $\bar{K}^{(i)}$ und $K^{*(i)}$ zyklisch. Die Verzweigungsgruppe des letzteren Körpers ist also zyklische Untergruppe der Gruppe

$$T^{(i)x}\,\bar{T}^{(i)\bar{x}} \qquad (0 \leqq x < n_0^{(i)};\ 0 \leqq \bar{x} < \bar{n}_0^{(i)}).$$

Die größte hierin enthaltene zyklische Untergruppe besitzt aber als Grad die größere der Zahlen $n_0^{(i)}$ und $\bar{n}_0^{(i)}$, w. z. b. w.

b) $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$. Man zeigt auf gleiche Weise, daß wenn die Verzweigungsgruppen von $K^{(i)}$ und $\bar{K}^{(i)}$ beide nicht zyklisch sind, $K^{*(i)}$ eine Verzweigungsgruppe der Form

$$T^{y}\,T_0^{y_0} \qquad \left(0 \leqq y < \frac{n_0^{(i)}}{2},\ 0 \leqq y_0 < 2\right)$$

besitzt, die Untergruppe einer Gruppe

$$T^{(i)x}\,T_0^{(i)x_0}\,\bar{T}^{(i)\bar{x}}\,\bar{T}_0^{(i)\bar{x}_0} \qquad \left|\begin{array}{l} 0 \leqq x < \frac{n_0^{(i)}}{2} \\ 0 \leqq x_0 < 2 \\ 0 \leqq \bar{x} < \frac{\bar{n}_0^{(i)}}{2} \\ 0 \leqq \bar{x}_0 < 2 \end{array}\right.$$

ist. Ist dagegen die Verzweigungsgruppe z. B. von $\bar{K}^{(i)}$ zyklisch, so ist die Verzweigungsgruppe $T^{y}T_0^{y_0}$ von $K^{*(i)}$ Untergruppe von

$$T^{(i)x}\,T_0^{(i)x_0}\,\bar{T}^{(i)\bar{x}}, \qquad \left|\begin{array}{l} 0 \leqq x < \frac{n_0^{(i)}}{2} \\ 0 \leqq x_0 < 2 \\ 0 \leqq \bar{x} < \bar{n}_0^{(i)} \end{array}\right.$$

woraus sich wieder obiger Satz ergibt.

6. Der zu K gehörige Strahl (f) von k. Man bestimme alle in der Relativdiskriminante von K in bezug auf k aufgehenden Primzahlen $l_1, l_2, \cdots, l_r$; resp. $l, l_1, l_2, \cdots, l_r$. In letzterem Falle werde $(l) = \mathfrak{L}'^{\sigma' n_0'}$ in K', $= \mathfrak{L}''^{\sigma n_0''}$ in K'', wo $n_0' = l^{u_0'}$ und $n_0'' = l^{u_0''}$ ist. Dann setze man:

$$f = \varepsilon l_1 l_2 \cdots l_r l^{\nu},$$

wo.

$\varepsilon = 2$ für $m = -1$, $\varepsilon = 3$ für $m = -3$, $\varepsilon = 1$ in jedem anderen Falle;
$\nu = 0$ für $u_0' = u_0'' = 0$;
$\nu = u_0' + 1$, wenn $u_0' \geqq u_0''$ und $u_0' > 0$ ist, und $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ ausgeschlossen wird;
$\nu = u_0'' + 2 - \sigma$, wenn $u_0'' > u_0' \geqq 0$ ist, und $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ ausgeschlossen wird.

Ist im Fall $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$, $\tau_i = 1$, wenn die Verzweigungsgruppe in $K^{(i)}$ zyklisch ist, sonst $\tau_i = 0$, so ist

$$\nu = \tau_1 + u_0' + 1, \text{ wenn } \tau_1' + u_0' \geqq \tau_2 + u_0'',\ u_0' > 0,$$
$$\nu = \tau_2 + u_0'' + 2 - \sigma, \text{ wenn } \tau_2 + u_0'' > \tau_1 + u_0' \geqq 0.$$

Der Strahl (f) *heißt der dem Körper* K *zugeordnete Strahl von* k. Der Führer f enthält alle und nur die in der Relativdiskriminante auftretenden Primzahlen, ausgenommen für $\varepsilon \neq 1$. Der der Potenz l^ν entsprechende Faktor der Strahlklassenzahl*) genügt der Kongruenz

$$l^{2\nu-2}(l-1)\left(l - \left(\frac{d}{l}\right)\right) \equiv 0(n_0' n_0'').$$

Denn für $\left(\frac{d}{l}\right) \neq 0$, $\sigma = 1$ enthält der Ausdruck den Faktor $l^{2\nu-2}$, wo $\nu = u_0^{(i)} + 1$ resp. $\tau_i + u_0^{(i)} + 1$ und $u_0^{(i)}$ die größere der beiden Zahlen u_0' und u_0'' ist. Also ist $l^{2\nu-2}$ sicher durch $n_0' n_0'' = l^{u_0' + u_0''}$ teilbar. Ist $\left(\frac{d}{l}\right) = 0$, $\sigma = 2$, so ist $l^{2\nu-1}$ Faktor des Ausdruckes. Ist dann $\nu = u_0' + 1$ resp. $\tau_1 + u_0' + 1$, so ist $n_0' n_0'' = l^{u_0' + u_0''} \leqq l^{2u_0'} < l^{2u_0' + 1} = l^{2\nu - 1}$, resp. $n_0' n_0'' \leqq 2^{2u_0' + 1} \leqq 2^{2\nu - 1}$. Ist dagegen $\nu = u_0''$ resp. $\tau_2 + u_0''$, so ist wegen $u_0'' > u_0'$: $n_0' n_0'' \leqq l^{2u_0'' - 1} = l^{2\nu - 1}$ resp. $n_0' n_0'' \leqq 2^{2\nu - 1}$.

7. Hauptsatz: *Sind* K *und* $\bar{K}$ *zwei zu* k *relativ-Abelsche Körper von den in* 1. *angegebenen Eigenschaften, so ist der Führer des dem Oberkörper* $K^*(K, \bar{K})$ *zugeordneten Strahls* (f^*) *von* k *das kleinste gemeinsame Vielfache der Führer* f *und* $\bar{f}$ *der den Körpern* K *und* $\bar{K}$ *in* k *zugeordneten Strahlen.*

Der Satz ist für alle von l verschiedenen in f^* enthaltenen Primzahlen selbstverständlich.

Um ihn für l zu beweisen, nehme man l in f zur Potenz l^ν, in $\bar{f}$ zur Potenz $l^{\bar{\nu}}$ und in f^* zur Potenz l^{ν^*} als Faktor enthalten an. Dann ist sicher

$$\nu^* \geqq \bar{\nu};\quad \nu^* \geqq \nu.$$

Der Satz 5. und die Definition von ν in 6., insbesondere die Bedeutung von τ_i im Falle $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ zeigen aber, daß wenigstens in einer der Ungleichungen das Gleichheitszeichen auftreten muß, w. z. b. w.

*) S. 181.

Kapitel III.

Der Klassenstrahl.

1. Definition. Es sei K ein zu k relativ-zyklischer, absolut Galoisscher Körper mit der Relativgruppe $S^x (0 \leq x < n = l^u)$, wo l eine Primzahl, und $sS = S^{\pm 1}s$ ist. Es sei f der Führer des K zugeordneten Strahls von k: $f = \varepsilon l_1 l_2 \cdots l_r l^\nu$, wo $(l_i) = \mathfrak{L}_i^{n_i}$, $(l) = \mathfrak{L}^{\sigma n_0}$, $n_i = l^{u_i}$, $n_0 = l^{u_0}$, und $\mathfrak{L}_i$ resp. $\mathfrak{L}$ aus lauter voneinander verschiedenen Primidealen zusammengesetzt ist. Die Zahlen ε und ν sind nach Kapitel II, 6. genau bestimmt. Man setzt

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_r \mathfrak{L}^\mu,$$

wo $\mu = 2$, wenn $u_0 = 0$, $l = 2$, $m = -1$ oder $l = 3$, $m = -3$, sonst $\mu = 0$, wenn $u_0 = 0$, und, falls man zunächst die Fälle $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$; $m = -1$, $l = 2$; oder $m = -3$, $l = 3$ ausschließt:

$$\mu = (\sigma u_0 + \sigma - 1) n_0 + 1, \text{ wenn } u_0 > 0, \text{ und } sS = Ss,$$
$$\mu = (\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1, \text{ wenn } u_0 > 0, \text{ und } sS = S^{-1}s.$$

In den Fällen $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ oder $l = 2$, $m = -1$, oder $l = 3$, $m = -3$ sei

$$\mu = (\sigma u_0 + 2\sigma - 1) n_0 + 1, \text{ wenn } u_0 > 0 \text{ und } sS = Ss,$$
$$\mu = (\sigma u_0 + 1) n_0 + 1, \quad \text{ wenn } u_0 > 0 \text{ und } sS = S^{-1}s.$$

Alle Zahlen A *von* K, *die* (mod $\mathfrak{F}$) *der Einheit kongruent sind,*

$$\mathrm{A} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}},$$

bilden den Klassenstrahl. Wenn eine Zahl von k im Klassenstrahl liegt, so liegt sie auch im Strahl (f). Denn wenn

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}},$$

so ist auch

$$\alpha \equiv 1 \pmod{l_1 l_2 \cdots l_r l^{\bar\nu}}.$$

Wenn aber $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$, oder $l = 2$, $m = -1$; oder $l = 3$, $m = -3$ ausgeschlossen sind, so ist wegen der Definition von μ: $\bar\nu = u_0 + 1$ oder $\bar\nu = u_0 + 2 - \sigma$ (da $2 = 3\sigma - \sigma^2$), je nachdem $sS = Ss$ oder $sS = S^{-1}s$. Nach den Festsetzungen Kapitel II, 6 ist daher $\bar\nu = \nu$. Im Falle $l = 2$, $m = -1$; $l = 3$, $m = -3$ ist $\bar\nu = \nu + 1$; denn dann enthält f wegen ε einen weiteren Faktor 2 resp. 3. Wenn $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ ist, so ist die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{L}$ zyklisch, und $\bar\nu = \nu$, weil $\bar\nu$ mit der Festsetzung von ν übereinstimmt (nach Kapitel II, 6. ist $\tau_i = 1$).

Ist umgekehrt α eine Zahl des Strahles f in k, so ist nach Kapitel I, 2.

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod f,$$

also α^2 auch im Klassenstrahl, da nach obigem $\mu \leqq \bar{\nu} n_0$.

Mit Hilfe dieses Klassenstrahls $\mathfrak{F}$ können wir die Klassen des Oberkörpers K in Strahlklassen einteilen. *Zwei Ideale* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *von* K *heißen äquivalent* (mod $\mathfrak{F}$) *oder liegen in derselben Klassenstrahlklasse, wenn*

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = (\mathsf{A}),$$

und A *so mit einer Einheit multipliziert werden kann, daß eine Zahl des Klassenstrahls entsteht**). Man schreibt

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \pmod{\mathfrak{F}}.$$

Alle (mod $\mathfrak{F}$) äquivalenten Ideale bilden eine Strahlklasse, alle Strahlklassen eine Abelsche Gruppe. Aus letzterer greifen wir die zur Primzahl l gehörende Untergruppe heraus; d. h. ist l^{K} die größte in der Strahlklassenzahl H enthaltene Potenz von l, so betrachtet man nur die $\frac{H}{l^{\mathsf{K}}}$te Potenz aller Klassen resp. Ideale. l^{K} ist die Anzahl dieser Klassen.

Ist h die Klassenanzahl des Strahls f von k, $l^{\varkappa}$ die größte in h enthaltene Potenz von l, so macht man auch hier dieselbe Überlegung: $l^{\varkappa}$ ist die Anzahl der zu l gehörigen Strahlklassen in k.

Wenn $l \neq 2$ ist, so erkennt man aus obigem, daß alle Ideale jeder zu l gehörigen Klasse vom Strahl f in k in dieselbe zu l gehörige Klasse von $\mathfrak{F}$ in K fallen. Jede Klasse des Strahles f bleibt also Klasse im Strahle $\mathfrak{F}$ des Oberkörpers.

Ist $l = 2$, so bleibt dies nicht mehr bestehen. Man führt dann in k den *engeren Äquivalenzbegriff* ein, nach dem zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von k nur dann äquivalent sind, wenn

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = (\alpha)$$

und (α) so gewählt werden kann, daß

$$\alpha \equiv 1 \pmod{f}.$$

Ist h_s^* die Klassenzahl des Strahls im engeren Sinne, so ist

$$h_s^* = 2^{\sigma+\varrho-1} h_s.\text{**)}$$

Bei Zugrundelegung dieses engeren Begriffes gilt das vorige auch für $l = 2$.

---

*) Siehe hierzu Fueter: Der Klassenkörper der komplexen Multiplikation etc., Teubner 1911, S. 12 u. ff.

**) Siehe Kapitel I S. 181, wo σ und ϱ erklärt sind.

2. Satz: *Liegt die* $(1-S)^{te}$ *symbolische Potenz einer Zahl* A *im Klassenstrahl, so ist* A *nach jedem in* $\mathfrak{F}$ *enthaltenen Ideal* $\mathfrak{L}_i$, *das zu* (l) *prim ist, einer Zahl von* k *kongruent.*

Es sei

$$\mathsf{A}^{1-S} = \mathsf{H} \equiv 1(\mathfrak{L}_i),$$

so setze man

$$\mathsf{A}_1 = 1 + \mathsf{H} + \mathsf{H}^{1+S} + \cdots + \mathsf{H}^{1+S+S^2+\cdots+S^{n-2}};$$

dann ist

$$\mathsf{A}_1 \equiv n \not\equiv 0(\mathfrak{L}_i).$$

A_1 ist deshalb von Null verschieden; und da $\mathsf{H}^{1+S+\cdots+S^{n-1}} = \mathsf{A}^{1-S^n} = 1$ ist, muß

$$\mathsf{H} = \mathsf{A}_1{}^{1-S} = \mathsf{A}^{1-S};$$

somit ist $\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}_1}$ eine Zahl α von k und

$$\mathsf{A} = \alpha\mathsf{A}_1 \equiv n\alpha(\mathfrak{L}_i).$$

3. Für das in (l) enthaltene Ideal $\mathfrak{L}$ liegen die Verhältnisse komplizierter. Wir beweisen schrittweise:

a) *Wenn* A *eine Zahl des Zerlegungskörpers in bezug auf* k *der in* (l) *enthaltenen Primideale in* K *ist, und wenn* A *zu* l *prim ist, so folgt aus*

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1(\mathfrak{l}^i),$$

daß A (mod $\mathfrak{l}^i$) *einer Zahl von* k *kongruent ist.* i *ist eine beliebige ganze Zahl.*

Denn jedes Primideal $\mathfrak{L}'$ von (l) ist im Zerlegungskörper vom 1. Grade. Ist Λ' durch $\mathfrak{L}'$ resp. $\mathfrak{L}'s\mathfrak{L}'$, wenn $\sigma \neq 2$ ist, teilbar, aber so, daß $\frac{(\Lambda')}{\mathfrak{L}'}$ resp. $\frac{(\Lambda')}{\mathfrak{L}'s\mathfrak{L}'}$ zu (l) prim ist, so setze man:

$$\Lambda = \Lambda'^{S+S^2+\cdots+S^{r_z-1}}$$

(r_z der Grad der Zerlegungsgruppe). Λ ist zu $\mathfrak{L}'s\mathfrak{L}'$ prim; die Spur γ von Λ in bezug auf k ist ebenfalls zu (l) prim. Setzt man:

$$\mathsf{A}^{1-S} = \mathsf{H},\ \mathsf{A}_1 = \Lambda + \Lambda^S\mathsf{H} + \Lambda^{S^2}\mathsf{H}^{1+S} + \cdots + \Lambda^{S^{r_z-1}}\mathsf{H}^{1+S+\cdots S^{r_z-2}},$$

so ist wegen der Annahme $\mathsf{A}_1 \equiv \gamma$ (mod $\mathfrak{l}^i$) $\not\equiv 0(\mathfrak{l}^i)$; A_1 ist somit von Null verschieden, und da $\mathsf{A}_1{}^{1-S} = \mathsf{H}$, muß wieder $\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}_1}$ eine Zahl α von k sein; dieselbe ist zu (l) prim; also

$$\mathsf{A} = \alpha\mathsf{A}_1 \equiv \alpha\gamma(\mathfrak{l}^i).$$

b) *Wenn* A *eine zu* (l) *prime Zahl des Trägheitskörpers in bezug auf* k *der in* (l) *enthaltenen Primideale ist, so folgt aus*

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1 \text{ (mod } \mathfrak{l}^i),$$

daß A (mod $\mathfrak{l}^i$) *einer Zahl von* k *kongruent ist.*

Wegen a) haben wir nur zu beweisen, daß A (mod $\mathfrak{l}^e$) einer Zahl des Zerlegungskörpers kongruent sein muß. Wir nehmen an, der Satz gelte für einen beliebigen Unterkörper des Trägheitskörpers und beweisen ihn für den nächst höheren, relativ-zyklischen Körper vom Relativgrad l. Da der Satz für den Zerlegungskörper bewiesen ist, folgt daraus durch den Schluß der vollständigen Induktion der Satz allgemein. Z sei die Substitution der Relativgruppe, $\mathsf{Z}^l = 1$; Z ist eine Potenz von S. Aus

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1 \ (\mathfrak{l}^e)$$

folgt dann auch

$$\mathsf{A}^{1-\mathsf{Z}} \equiv 1 \ (\mathfrak{l}^e).$$

Da l prim zur Relativdiskriminante des Trägheitskörpers ist, gibt es wenigstens eine Zahl Θ', für die $\Theta' - \mathsf{Z}\Theta'$ zu $\mathfrak{L}'$, einem Primideal von (l), prim ist. Somit wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'$:

$$\begin{aligned}\Delta(\Theta') &= (\Theta' - \mathsf{Z}\Theta')(\Theta' - \mathsf{Z}^2\Theta') \cdots (\Theta' - \mathsf{Z}^{l-1}\Theta') \not\equiv 0 \ (\mathfrak{L}') \\ &= l\Theta'^{l-1} - (l-1)\vartheta_1\Theta'^{l-2} + \cdots - (-1)^l \vartheta_{l-1} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{L}'),\end{aligned}$$

wo $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_{l-1}$ Zahlen des Unterkörpers sind. Alle ϑ_i sind nicht durch $\mathfrak{L}'$ teilbar. Ist ϑ_i dasjenige unter ihnen, das zu $\mathfrak{L}'$ prim ist und den kleinsten Index besitzt, so setze man $\Theta'^i = \Theta$, die Spur ϑ von Θ in bezug auf den Unterkörper ist dann zu $\mathfrak{L}'$ prim, da sie kongruent $i\vartheta_i$ (mod $\mathfrak{L}'$) ist. Jetzt setzt man:

$$\mathsf{A}^{1-\mathsf{Z}} = \mathsf{H}, \ \mathsf{A}_1 = \Theta + \Theta^{\mathsf{Z}}\mathsf{H} + \Theta^{\mathsf{Z}^2}\mathsf{H}^{1+\mathsf{Z}} + \cdots + \Theta^{\mathsf{Z}^{l-1}}\mathsf{H}^{1+\mathsf{Z}+\cdots+\mathsf{Z}^{l-2}},$$

so wird wie früher:

$$\mathsf{A}_1^{1-\mathsf{Z}} = \mathsf{H}; \quad \mathsf{A}_1 \equiv \vartheta \ (\text{mod } \mathfrak{l}^e); \quad \mathsf{A}_1 \neq 0; \quad \mathsf{A} = \alpha\mathsf{A}_1 \equiv \alpha\vartheta \ (\text{mod } \mathfrak{L}'^e)$$

oder

$$\mathsf{A} \equiv \alpha^* \ (\text{mod } \mathfrak{L}'^e),$$

wo α^* im Unterkörper liegt. Da aber nach Annahme

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1 \ (\text{mod } \mathfrak{L}'^e)$$

und der Satz für den Unterkörper gelten soll, so ist α^*, d. h. auch A (mod $\mathfrak{L}'^e$) einer Zahl von k äquivalent. Da dies für jedes Primideal $\mathfrak{L}'$ gilt, so gilt es auch für $\mathfrak{l}^e$.

c) Der Trägheitskörper relativ zu k der in (l) enthaltenen Primideale ist mit dem Verzweigungskörper identisch, da der Relativgrad eine Potenz von l ist. Setzt man $S^{\frac{n}{n_0}} = T$, so ist T^x $(0 \leqq x < n_0)$ die Verzweigungsgruppe. Wir bauen K sukzessive aus dem Verzweigungskörper auf durch $K_1, K_2, \cdots, K_{n_0-1}$, $K_{n_0} = K$, wo jeder Körper den Relativgrad l zum vorhergehenden hat. Ist $(l) = \mathfrak{L}^{\sigma n_0}$ in K, $(l) = \mathfrak{L}_i^{\sigma l^i}$ in K_i, so ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_i^{l^{n_0 - i}}$ *).

*) Die Bezeichnung $\mathfrak{L}_i$ ist nur vorübergehend und darf nicht mit den früheren Teilern $\mathfrak{L}_i$ von l_i verwechselt werden.

α) *Jede Zahl* A *von* $K_\varkappa$ *läßt sich in der Form darstellen*

$$\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2} + \cdots + \Lambda_{q_\varkappa}; \quad q_1 \frac{n_0}{l} < q_2 \frac{n_0}{l^2} < \cdots < q_\varkappa \frac{n_0}{l^\varkappa},$$

wo Λ_{q_i} *eine genau durch* $\mathfrak{L}_i'^{q_i}$ *teilbare Zahl von* K_i *oder gleich Null und* q_i *zu* l *prim ist.* α *liegt im Verzweigungskörper;* $\mathfrak{L}_i'$ *ist ein in* K_i *liegendes Primideal von* $\mathfrak{L}_i$; $\mathfrak{L}_i' = \mathfrak{L}'^{l^{u_0-i}}$.

Denn jede Zahl A ist $(\text{mod}\, \mathfrak{L}_\varkappa')$ einer Zahl α des Verzweigungskörpers kongruent; ist $\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_r$, und $\mathfrak{L}_\varkappa'^r$ die größte in Λ_r enthaltene Potenz von $\mathfrak{L}_\varkappa'$, $r = l^{u_0-i} q_i$, wo q_i zu l prim, so ist, wenn Λ_{q_i} die obige Bedeutung hat, $\frac{\Lambda_r}{\Lambda_{q_i}}$ einer Zahl α_1 des Verzweigungskörpers kongruent $(\text{mod}\, \mathfrak{L}_\varkappa')$; also, da α zu $\mathfrak{L}_\varkappa'$ prim ist und für $\alpha_1 \Lambda_{q_i}$ wieder Λ_{q_i} geschrieben werden kann:

$$\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_i} + \Lambda_{r_1}, \quad r_1 > l^{u_0-i} q_i.$$

r_1 kann als die größte Zahl angenommen werden, für die A einer Zahl von K_i $(\text{mod}\, \mathfrak{L}_\varkappa'^{r_1})$ kongruent wird. Ist $r_1 = l^{u_0-i_1} q_{i_1}$, so ist deshalb $i_1 > i$; denn sonst könnte Λ_{r_1} in der eben angegebenen Weise nochmals umgeformt werden, wodurch ein $r_2 > r_1$ erhalten würde, für das A einer Zahl von K_i $(\text{mod}\, \mathfrak{L}_\varkappa'^{r_2})$ kongruent würde, gegen Annahme. Λ_{r_1} formt man weiter in der angegebenen Weise um und erkennt so die Richtigkeit des Satzes. Außerdem ist $l^{u_0-i_1} q_{i_1} > l^{u_0-i} q_i$.

β) Wir beschränken uns von jetzt an auf den Fall $sS = S^{-1}s$. Der Kreiskörperfall $sS = Ss$ ist für $\sigma = 1$ genau gleich, für $\sigma = 2$ entsprechend durchzuführen. Außerdem seien, wenn nicht das Gegenteil angenommen wird, die Fälle $l = 2$ und $l = 3$, $\sigma = 2$ ausgeschlossen.

Wenn

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{t n_0}) \ (t > 0), \ \mathsf{A} \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^r), \ \mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}},$$

wo $\mathfrak{L}'$ *ein Primideal von* (l) *und* Λ_{q_i} *die in* α) *angegebene Bedeutung hat, so wird*

$$q_1 \geqq tl - 1 + \frac{r}{l^{u_0-1}} - (\sigma - 1),$$

$$q_i \geqq tl^i - 1 + \frac{r}{l^{u_0-i}} - (\sigma - 1)l \qquad (i = 2, 3, \cdots, u_0).$$

Die Ungleichungen gelten nur für diejenigen q_i, *für die* Λ_{q_i} *von Null verschieden ist.*

Um Doppelindices zu vermeiden, beweisen wir nur den allgemeinsten Fall, daß alle $\Lambda_{q_i} \neq 0$ sind. Beschränken wir uns auf K_2, wo $\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2}$, so folgt aus $\mathsf{A} - T^l \mathsf{A} = \Lambda_{q_2} - T^l \Lambda_{q_2}$ wegen Hilfssatz II und III:

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}_2'^{\,tl^2+l}); \quad \Lambda_{q_2}^{1-T^l} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}_2'^{\,1+\sigma l}) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}_2'^{\,2+\sigma l});$$

also

$$q_2 + \sigma l + 1 \geqq tl^2 + l + \frac{r}{l^{\mu_0-2}}$$

oder

$$q_2 \geqq tl^2 - 1 + \frac{r}{l^{\mu_0-2}} - (\sigma-1)l.$$

Nehmen wir allgemein den Körper $K_{\varkappa-1}$, so ist nach Hilfssatz III:

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}+l}_{\varkappa-1}\right).$$

Wir nehmen an, in diesem Körper sei über A nichts anderes als diese Kongruenz vorausgesetzt, und es gelten dann die Ungleichungen:

$$q_i \geqq tl^i - 1 + \frac{r}{l^{\mu_0-i}} - (\sigma-1)l \qquad (i=2,3,\cdots,\varkappa-1).$$

Beweisen wir in $K_\varkappa$ für eine Zahl A dieses Körpers, für die

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^\varkappa+l}\right)$$

ist, dieselben Ungleichungen, so gelten dieselben allgemein, nach dem Schluß der vollständigen Induktion, da für $\varkappa = 2$ die Ungleichheit oben bewiesen ist. Es sei in $K_\varkappa$:

$$\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{\varkappa-1}} + \Lambda_{q_\varkappa}, \quad \mathsf{A}' = \alpha + \Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{\varkappa-1}},$$

also

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}' + \Lambda_{q_\varkappa},$$

wo A' in $K_{\varkappa-1}$ liegt. Dann ist

$$\mathsf{A} - T^{l^{\varkappa-1}}\mathsf{A} = \Lambda_{q_\varkappa} - T^{l^{\varkappa-1}}\Lambda_{q_\varkappa},$$

oder wegen der Hilfssätze II und III:

$$q_\varkappa + 1 + \sigma(l + \cdots + l^{\varkappa-1}) \geqq tl^\varkappa + \frac{r}{l^{\mu_0-\varkappa}} + l + \sigma(l^2 + \cdots + l^{\varkappa-1}),$$

$$q_\varkappa \geqq tl^\varkappa - 1 + \frac{r}{l^{\mu_0-\varkappa}} - (\sigma-1)l.$$

Deshalb ist

$$\mathsf{A} - T^l\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}' - T^l\mathsf{A}' \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{\,tl^\varkappa + \frac{r}{l^{\mu_0-\varkappa}} + l}\right),$$

oder, da A' wegen der Ungleichungen in Satz α) durch genau dieselbe Potenz von $\mathfrak{L}_\varkappa'$ teilbar ist, wie A:

$$\mathsf{A}'^{1-T^l} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^\varkappa+l}_\varkappa\right) \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}+1}_{\varkappa-1}\right).$$

Andererseits ist

$$\mathsf{A}'^{1-T} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}-(\sigma-1)}_{\varkappa-1}\right);$$

wenn $\sigma = 1$, folgt daher

$$\mathsf{A}'^{1-T^l} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}+l}_{\varkappa-1}\right).$$

Wenn $\sigma = 2$ und λ eine genau durch $\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}}_{\varkappa-1}$ teilbare Zahl des Verzweigungskörpers ist, so kann man $\mathsf{A}'^{1-T} = 1 + \frac{\lambda}{\Lambda}$ setzen, wo Λ durch $\mathfrak{L}'_{\varkappa-1}$ genau teilbar ist. Dann wird

$$\mathsf{A}'^{1-T^l} \equiv 1 + \lambda \sum_{\iota=0}^{l-1} \frac{1}{T^\iota \Lambda} \quad \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}+l}_{\varkappa-1}\right).$$

$\sum_{\iota=0}^{l-1} \frac{1}{T^\iota \Lambda} = \Lambda'$ ist wegen oben wenigstens durch $\mathfrak{L}'_{\varkappa-1}$ teilbar; man beweist wie früher*), daß es dann wenigstens durch $\mathfrak{L}^l_{\varkappa-1}$ teilbar ist. Also wieder

$$\mathsf{A}'^{1-T^l} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}+l}_{\varkappa-1}\right).$$

A' liegt aber in $K_{\varkappa-1}$ und nach Annahme folgt hieraus

$$q_i \geqq tl^i - 1 + \frac{r}{l^{u_0-i}} - (\sigma-1)l \quad \text{für} \quad i = 2, 3, \cdots, \varkappa-1.$$

Da für $i = \varkappa$ die Bedingung schon bewiesen, folgen dieselben allgemein. Es bleibt nur noch übrig, die Bedingung für q_1 zu zeigen. Man erkennt aber sofort

$$\mathsf{A} - T\mathsf{A} \equiv \Lambda_{q_1} - T\Lambda_{q_1} \equiv 0 \quad \left(\mathfrak{L}_2^{\,tl^2 + \frac{r}{l^{u_0-2}} - (\sigma-1)l}\right),$$

$$q_1 + 1 \geqq tl + \frac{r}{l^{u_0-1}} - (\sigma-1),$$

$$q_1 \geqq tl - 1 + \frac{r}{l^{u_0-1}} - (\sigma-1) \quad \text{w. z. b. w.}$$

γ) *Wenn* $\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^{tn_0})$ $(t > 0)$, *so kann man* A *stets so mit einer Zahl des Verzweigungskörpers multiplizieren, daß das Produkt zu* $\mathfrak{L}$ *prim wird.*

Wir beweisen den Satz zunächst für jedes in $\mathfrak{L}$ enthaltene Primideal $\mathfrak{L}'$. Ist nämlich A genau durch $\mathfrak{L}'^{\,q_\varkappa}_\varkappa$ teilbar ($q_\varkappa$ zu l prim), so ist

$$\mathsf{A} = \Lambda_{q_\varkappa} + \Lambda_{q_{\varkappa+1}} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}},$$

also nach β)

$$\varkappa = 1\colon\ q_1 \geqq tl - 1 + q_1 - (\sigma-1); \quad \text{oder} \quad tl \leqq \sigma,$$

$$\varkappa > 1\colon\ q_\varkappa \geqq tl^\varkappa - 1 + q_\varkappa - (\sigma-1)l; \quad \text{oder} \quad tl^\varkappa \leqq 1 + (\sigma-1)l,$$

was unmöglich ist, falls $l \neq 2$. Also kann A nur durch $\mathfrak{L}'^{\,\varkappa n_0}$ teilbar sein, woraus der Satz folgt.

δ) Wenn

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma)n_0 + 1}\right) \quad \text{und} \quad \mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}},$$

*) Beweis von Hilfssatz III S. 200.

so darf man wegen γ) α zu $\mathfrak{L}$ prim annehmen, also $r=0$ in β) setzen. Es ist somit

$$q_i \geqq (\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^i - 1 - (\sigma - 1) l \qquad (i > 1),$$
$$q_1 \geqq (\sigma u_0 + 1 - \sigma) l - \sigma$$

für alle q_i, für die $\Lambda_{q_i} \neq 0$. Daraus folgt

$$q_i \geqq \sigma (u_0 - 1) l^i \qquad (i = 1, 2, \cdots, u_0);$$

man kann A deshalb auch in der Form schreiben, wenn man es noch mit α^{-1} multipliziert denkt:

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0-1}\left(\Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}}\right),$$

wo

$$q_1 \geqq l - \sigma,$$
$$q_i \geqq l^i - (\sigma - 1)\, l - 1 \qquad (i > 1)$$

für alle q_i, für die $\Lambda_{q_i} \neq 0$ ist. Dabei ist Λ_{q_i} genau durch $\mathfrak{L}_i'^{\,q_i} = \mathfrak{L}'^{\,q_i l^{u_0 - i}}$ teilbar, und $\mathfrak{L}'$ ist irgend ein Primideal von $\mathfrak{L}$.

Es fragt sich, wie viel $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{L}'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) u_0 + 1})$ inkongruente A es gibt, deren $(1-T)^{\text{te}}$ symbolische Potenz die Bedingung

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) u_0 + 1})$$

erfüllen.

Zunächst in K_1 folgt aus $\mathsf{A} = 1 + l^{u_0 - 1}\Lambda_{q_1}$, $q_1 \geqq l - \sigma$:

$$\Lambda_{q_1} - T\Lambda_{q_1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}_1'^{\,l+1})$$

oder wegen Hilfssatz I

$$q_1 + 1 \geqq l + 1, \quad q_1 > l$$

und

$$\mathsf{A} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}_1'^{\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l + 1})$$

d. h. es gibt nur ein A.

In K_2 wird

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0 - 1}(\Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2}),\ q_1 \geqq l - \sigma,\ q_2 \geqq l^2 - (\sigma - 1) l - 1,$$

und

$$\mathsf{A} - T\mathsf{A} = l^{u_0 - 1}[(\Lambda_{q_1} - T\Lambda_{q_1}) + (\Lambda_{q_2} - T\Lambda_{q_2})] \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}_2'^{\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^2 + 1}).$$

$(\Lambda_{q_1} - T\Lambda_{q_1})$ ist genau durch $\mathfrak{L}_2'^{\,l(q_1+1)}$, $(\Lambda_{q_2} - T\Lambda_{q_2})$ genau durch $\mathfrak{L}_2'^{\,q_2+1}$ teilbar. Entweder ist also

$$q_2 + 1 \geqq l^2 + 1, \quad q_2 > l^2$$

und

$$l(q_1 + 1) \geqq l^2 + 1, \quad q_1 > l,$$

d. h.

$$\mathsf{A} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}_2'^{\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^2 + 1}),$$

oder es ist

$$l(q_1 + 1) = q_2 + 1;$$

daraus ergeben sich die beiden Lösungen

$$q_2 = l^2 - (\sigma - 1)\, l - 1, \quad q_1 = l - \sigma$$

und

$$q_2 = l^2 - 1, \qquad q_1 = l - 1,$$

die für $\sigma = 1$ zusammenfallen. Alle inkongruenten A sind dann gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A}_1 &= 1 + l^{u_0 - 1}\,\xi_1(\Lambda_{l-1} + \Lambda_{l^2-1}),\\ \mathsf{A}_\sigma &= 1 + l^{u_0 - 1}\,\xi_\sigma(\Lambda_{l-\sigma} + \Lambda_{l^2 - l(\sigma-1)-1}),\end{aligned}\right\}\ \mathsf{A}_1^{\,1-T} \equiv \mathsf{A}_\sigma^{\,1-T} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}_2'^{\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^2 + 1}\right),$$

wo ξ_1, ξ_σ alle Zahlen des Verzweigungskörpers (mod $\mathfrak{L}'^{\,n_0}$) durchlaufen. Man kann dann ξ_1, ξ_σ stets so bestimmen, daß

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma \ \left(\mathrm{mod}\ \mathfrak{L}_2'^{\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^2 + 1}\right).$$

Denn wegen obigem kann man A stets in der Form

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0 - 1}[\alpha \Lambda_{l-\sigma} + \beta \Lambda_{l^2 - l(\sigma-1)-1} + \gamma \Lambda_{l-1} + \delta \Lambda_{l^2-1}]$$

annehmen. Nimmt man

$$\xi_\sigma \equiv \alpha, \quad \xi_1 \equiv \gamma \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{L}_2'^{\,l^2}),$$

so wird

$$\mathsf{A} - \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma \equiv l^{u_0 - 1}[(\beta - \xi_\sigma)\Lambda_{l^2 - l(\sigma-1)-1} + (\gamma - \xi_1)\Lambda_{l^2-1}].$$

Da aber

$$(\mathsf{A} - \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma) - T(\mathsf{A} - \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma) \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}_2'^{\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^2 + 1}\right),$$

folgt ohne weiteres auch

$$\beta - \xi_\sigma \equiv 0, \quad \gamma - \xi_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_2'^{\,l^2}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Allgemein seien in $K_{\varkappa-1}$ $\sigma\tau_{\varkappa-1}$ Zahlen

$$\mathsf{A}_i,\ \mathsf{A}_{\sigma i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \tau_{\varkappa-1})$$

der Form

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0 - 1}\xi\left(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{\varkappa-1}}\right)$$

gegeben, für die $\mathsf{A}_i^{\,1-T}$ resp. $\mathsf{A}_{\sigma i}^{\,1-T} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}_{\varkappa-1}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^{\varkappa-1} + 1}\right)$. Wir nehmen an, jedes weitere A, für das $\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}_{\varkappa-1}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^{\varkappa-1} + 1}\right)$, lasse sich durch die Kongruenz

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma\, \mathsf{A}_2 \mathsf{A}_{2\sigma} \cdots \mathsf{A}_{\tau_{\varkappa-1}}\, \mathsf{A}_{\sigma\tau_{\varkappa-1}} \ \left(\mathfrak{L}_{\varkappa-1}'^{\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^{\varkappa-1} + 1}\right)$$

geben, falls man nur die ξ im Verzweigungskörper richtig $\left(\mathrm{mod}\ \mathfrak{L}_{\varkappa-1}'^{\,l^{\varkappa-1}}\right)$ bestimmt. Nach obigem ist dann $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$.

Um eine Rekursionsformel für $\tau_\varkappa$ zu finden, gehen wir von $K_{\varkappa-1}$ zu $K_\varkappa$ über. Ist $\mathsf{A} = 1 + l^{u_0 - 1}\left(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_\varkappa}\right)$, wo $q_\varkappa \geqq l^\varkappa - (\sigma - 1)\, l - 1$ sein muß, so sind nur die Fälle möglich $q_\varkappa > l^\varkappa$, $q_\varkappa = l^\varkappa - 1$, $q_\varkappa = l^\varkappa - (\sigma - 1) l - 1$, wie man gleich wie oben erkennt. Setzt man

$$\mathsf{A}_{\tau_\varkappa} = 1 + \xi_{\tau_\varkappa} \left(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{\varkappa-1}} + \Lambda_{l^\varkappa - 1}\right),$$

wo

$$\mathsf{A}_{\tau_\varkappa}^{1-T} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^\varkappa + 1}\right);$$

$$\mathsf{A}_{\sigma \tau_\varkappa} = 1 + \xi_{\sigma \tau_\varkappa} \left(\Lambda_{\bar{q}_1} + \cdots + \Lambda_{\bar{q}_{\varkappa-1}} + \Lambda_{l^\varkappa - (\sigma-1) l - 1}\right),$$

wo

$$\mathsf{A}_{\sigma \tau_\varkappa}^{1-T} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^\varkappa + 1}\right),$$

so sind $\xi_{\tau_\varkappa}$, $\xi_{\sigma \tau_\varkappa}$ unbestimmte Zahlen des Verzweigungskörpers (mod $\mathfrak{L}'^{n_0}$). Ist

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0 - 1}(\alpha_1 \Lambda_{q_1} + \cdots + \alpha_{\varkappa-1} \Lambda_{q_{\varkappa-1}} + \beta \Lambda_{l^2 - (\sigma-1) l - 1} + \gamma \Lambda_{l^2 - 1})$$

eine beliebige Zahl, für die

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^\varkappa + 1}\right),$$

so nehme man

$$\xi_{\tau_\varkappa} \equiv \gamma, \quad \xi_{\sigma \tau_\varkappa} \equiv \beta \ (\mathfrak{L}'^{n_0}).$$

Dann ist $\dfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}_{\tau_\varkappa} \mathsf{A}_{\sigma \tau_\varkappa}}$ einer Zahl A' von $K_{\varkappa-1}$ kongruent $\left(\bmod \mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^\varkappa + 1}\right)$, und da auch

$$\mathsf{A}'^{1-T} \equiv 1 \left(\mathfrak{L}_{\varkappa-1}'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^{\varkappa-1} + 1}\right),$$

so läßt sich A' durch die $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_\sigma, \cdots, \mathsf{A}_{\tau_{\varkappa-1}} \mathsf{A}_{\sigma \tau_{\varkappa-1}}$ darstellen, oder

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma \cdots \mathsf{A}_{\tau_{\varkappa-1}} \mathsf{A}_{\sigma \tau_{\varkappa-1}} \mathsf{A}_{\tau_\varkappa} \mathsf{A}_{\sigma \tau_\varkappa} \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^\varkappa + 1}\right).$$

Daher wird $\tau_\varkappa = \tau_{\varkappa-1} + 1$, und da $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$, so ist allgemein

$$\tau_\varkappa = \varkappa - 1, \quad \tau_{u_0} = u_0 - 1.$$

Damit ist der allgemeine Satz bewiesen:

Satz: *Es gibt höchstens $\sigma(u_0 - 1)$ verschiedene Zahlen A der Form:*

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A}_i &= 1 + \xi_i l^{u_0 - 1} \left(\Lambda_{q_1^{(i)}} + \cdots + \Lambda_{q_i^{(i)}}\right) \\ \mathsf{A}_{\sigma i} &= 1 + \xi_{\sigma i} l^{u_0 - 1} \left(\Lambda_{q_1^{(\sigma i)}} + \cdots + \Lambda_{q_i^{(\sigma i)}}\right) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \cdots, u_0 - 1),$$

deren $(1 - T)^{l\varkappa}$ symbolische Potenz der Einheit kongruent wird

$$(\bmod \mathfrak{L}'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}),$$

sodaß bei richtiger Bestimmung der Zahlen α, ξ_i, ξ_{σ_i} $(i = 1, 2, \cdots, u_0 - 1)$ (mod $\mathfrak{L}'^{n_0}$) im Verzweigungskörper jede andere Zahl A, für die

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1})$$

ist, sich in der Form darstellen läßt:

$$\mathsf{A} \equiv \alpha \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma \cdots \mathsf{A}_{u_0 - 1} \mathsf{A}_{\sigma(u_0 - 1)} \ (\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}).$$

ε) Wenn A eine zu $\mathfrak{L}$ prime Zahl ist, für die

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}),$$

so hat A die Form $\mathsf{A} = \alpha + l^{u_0-1}(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}})$, wo α im Verzweigungskörper liegt und zu $\mathfrak{L}$ prim ist. Dann ist auch

$$\alpha - S\alpha \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \alpha^{1-S} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0 + 2 - \sigma) n_0}),$$

d. h. nach b) $\alpha \equiv \alpha_0$ $(\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0 + 2 - \sigma) n_0})$, wo α_0 in k liegt. Da $\mathsf{A}^{1-S} = (\alpha_0^{-1}\mathsf{A})^{1-S}$, so kann man A immer mit α_0^{-1} multipliziert, oder in der Form

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0-1}(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}})$$

annehmen. Es fragt sich, wieviel (mod $\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}$) verschiedene solche A es gibt. Dazu haben wir nur die A_i und $\mathsf{A}_{\sigma i}$ von δ) zu betrachten. Es gebe A_i resp. $\mathsf{A}_{\sigma i}$, für die bei nun festem ξ_i, $\xi_{\sigma i}$:

$$\mathsf{A}_i'^{1-S} \equiv 1, \quad \mathsf{A}_{\sigma i}'^{1-S} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}),$$

wo

$$\mathsf{A}_i' = 1 + l^{u_0-1}(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i}) \ (\mathsf{A}_{\sigma i}' \text{ entsprechend})$$

ist. Dann ist

$$\mathsf{A}_i' - S\mathsf{A}_i' = l^{u_0-1}((\Lambda_{q_1} - S\Lambda_{q_1}) + \cdots + (\Lambda_{q_i} - S\Lambda_{q_i})) \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}).$$

Berücksichtigt man die Bedingungen*), denen die q_i unterliegen, so erkennt man sukzessive:

$$\Lambda_{q_\iota} - S\Lambda_{q_\iota} \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}'^{(l - (\sigma - 1))\frac{n_0}{l}}\right) \qquad (\iota = 1, 2, \cdots, i).$$

Daraus sieht man, daß Λ_{q_ι} auch genau durch $S\mathfrak{L}_\iota'^{q_\iota}$ teilbar ist, d. h. somit durch $\mathfrak{L}_\iota^{q_\iota}$ oder: für alle Primideale von $\mathfrak{L}$ erhält man dieselbe Darstellung von A. Wir dürfen von nun an die Kongruenzen mod. $\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}$ nehmen. Ist $\mathsf{A}_i = 1 + \xi_i l^{u_0-1}(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i})$ das allgemeine A_i, so ist nur dann $\mathsf{A}_i^{1-S} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1})$, wenn

$$\xi_i(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i}) - S\xi_i(S\Lambda_{q_1} + \cdots + S\Lambda_{q_i})$$
$$\equiv (\xi_i - S\xi_i)(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i}) + S\xi_i[(\Lambda_{q_1} - S\Lambda_{q_1}) + \cdots + (\Lambda_{q_i} - S\Lambda_{q_i})]$$
$$\equiv (\xi_i - S\xi_i)(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i}) \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^{n_0+1})$$

wird. Da $q_i < n_0$, so ist dies nur möglich, wenn

$$\xi_i - S\xi_i \equiv 0(\mathfrak{l}), \quad \xi_i^{1-S} \equiv 1(\mathfrak{l})$$

oder wegen b) ξ_i einer Zahl von k (mod $\mathfrak{l}$) kongruent ist. Dasselbe beweist man für $\xi_{\sigma i}$ in $\mathsf{A}_{\sigma i}$. Somit unter Berücksichtigung von γ):

Jede Zahl A, *für die* $\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1})$, *ist in der Form darstellbar:*

$$\mathsf{A} \equiv \alpha_0 \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma \cdots \mathsf{A}_{u_0-1} \mathsf{A}_{\sigma(u_0-1)} \ (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}),$$

wo α_0 *und die* ξ_i, $\xi_{\sigma i}$ *irgend welche Zahlen von* k *sind.*

Die ξ_i, $\xi_{\sigma i}$ können $\mathfrak{l}^2$ verschiedene Werte annehmen (mod $\mathfrak{l}$). Das System $\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma \cdots \mathsf{A}_{u_0-1} \mathsf{A}_{\sigma(u_0-1)}$ stellt somit $\mathfrak{l}^{2\sigma(u_0-1)} = l^{2(u_0-1)}$ (mod $\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}$)

*) Siehe δ) S. 225 u. ff.

verschiedene Kongruenzklassen dar. Wir kürzen das System durch Σ ab. Man erkennt somit den Satz:

Satz: *Wenn* $\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1})$, *so kann man* A *stets so mit einer Zahl von* k *multiplizieren, daß es einer der* $l^{2(u_0-1)}$ *Kongruenzklassen des Systems* Σ $(\text{mod } \mathfrak{L}^{(\sigma n_0+1-\sigma)n_0+1})$ *kongruent wird.*

Der Fall $l=3$, $\sigma=2$ erledigt sich ganz entsprechend. Nur besteht, falls $\Lambda_1^{1-T} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}_1^3)$, das System Σ aus 3^{2u_0} Klassen.

4. Kehren wir zum Klassenstrahl $\mathfrak{F}$ von 1. zurück. Um die Resultate von 2. und 3. zu vereinigen, können wir annehmen, daß die Kongruenzklassen Σ sämtlich der Einheit kongruent werden $(\text{mod } \mathfrak{L}_i)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$. Σ sei von nun an stets dieses System. Dann folgt der

Satz: *Wenn* A^{1-S} *eine Zahl des Klassenstrahls* $\mathfrak{F}$ *ist, so kann man* A *stets so mit einer Zahl von* α *multiplizieren, daß das Produkt der Einheit* $(u_0=0)$ *resp. einer der* $l^{2(u_0-1)}(u_0>0)$ *Klassen von* Σ $(\text{mod } \mathfrak{F})$ *kongruent wird.*

Im Fall $l=3$, $\sigma=2$, $\Lambda_1^{1-T_1} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}_1^3)$ tritt 3^{2u_0} an Stelle von $l^{2(u_0-1)}$.

5. Hilfssatz: *Im Klassenstrahl gibt es ein System von* u *unabhängigen Einheiten* $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \cdots, \mathsf{H}_u$, *deren Relativnormen in bezug auf* k *eins sind und für die ein Ausdruck der Form:*

$$\mathsf{H}_1^{x_1}\mathsf{H}_2^{x_2}\cdots\mathsf{H}_u^{x_u}, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq x_i < l \qquad (i=1, 2, \cdots, u),$$

nur dann die $(1-S)^{te}$ *symbolische Potenz einer* [illegible]*leinheit wird, wenn* $x_1 = x_2 = \cdots = x_u = 0$.

Beweis. Wir bauen K sukzessive durch $K_1, K_2, \cdots, K_u$ aus k auf, wo jedes $K_\varkappa$ relativzyklisch vom Relativgrad l zu $K_{\varkappa-1}$ ist.

a) Für K_1 folgt der Satz aus einem Hilbertschen*) Satze, falls man dort das System der unabhängigen Körpereinheiten durch ein solches von Strahleinheiten ersetzt.

b) Der Satz gelte für $K_{\varkappa-1}$. $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \cdots, \mathsf{H}_{\varkappa-1}$ seien die betreffenden Einheiten in $K_{\varkappa-1}$. Dann wird auch in $K_\varkappa$ niemals

$$\mathsf{H}_1^{x_1}\mathsf{H}_2^{x_2}\cdots\mathsf{H}_{\varkappa-1}^{x_{\varkappa-1}} = \mathsf{E}^{1-S}, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq x_i < l \quad (i=1, 2, \cdots, \varkappa-1),$$

sein können, es sei denn $x_1 = x_2 = \cdots = x_{\varkappa-1} = 0$. Denn durch Bildung der Norm fände man nach Annahme:

$$1 = \left[\mathsf{H}_1^{x_1}\cdots\mathsf{H}_{\varkappa-1}^{x_{\varkappa-1}}\right]^{1+S+\cdots+S^{l^{\varkappa-1}-1}} = \mathsf{E}^{1-S^{l^{\varkappa-1}}} \quad \text{oder} \quad \mathsf{E} = S^{l^{\varkappa-1}}\mathsf{E},$$

d. h. E läge in $K_{\varkappa-1}$ gegen Annahme. Um die Existenz einer $\varkappa^{\text{ten}}$ Einheit $\mathsf{H}_\varkappa$ in $K_\varkappa$ nachzuweisen, benutzen wir die relativen Grundeinheiten von $K_\varkappa$ in bezug auf $K_{\varkappa-1}$**), indem wieder ein System von unabhängigen

---

*) Zahlbericht, S. 275, Satz 92.

**) Zahlbericht, S. 272 u. ff.

Strahleinheiten den Hilbertschen Entwicklungen zugrunde gelegt wird. Es sei H die Einheit, deren Relativnorm in bezug auf $K_{\varkappa-1}$ eins ist, und die, mit irgend einer Einheit von $K_{\varkappa-1}$ multipliziert, niemals die $(1-S^{l^{\varkappa-1}})^{\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit wird. Es sei $\mathsf{E}_{\varkappa-1}$ irgend eine Strahleinheit von $K_{\varkappa-1}$ und

$$\mathsf{E}_{\varkappa-1}\mathsf{H} = \mathsf{E}^{(1-S)^{\tau}},$$

wo E eine Strahleinheit von $K_{\varkappa}$ sei; dagegen sei, bei beliebigem $\mathsf{E}'_{\varkappa-1}$, $\mathsf{E}'_{\varkappa-1}\mathsf{H}$ nicht die $(1-S)^{\tau+1\text{te}}$ symbolische Potenz einer Strahleinheit. Dann ist $\tau < l^{\varkappa-1}$. Denn aus der Identität

$$(1-S)^{l^{\varkappa-1}} \equiv f_1(S)(1-S^{l^{\varkappa-1}}) + f_2(S)(1+S^{l^{\varkappa-1}}+\cdots+S^{(l-1)l^{\varkappa-1}}),$$

wo $f_1(S)$ und $f_2(S)$ ganze rationale ganzzahlige Funktionen von S sind*), folgt

$$\mathsf{E}^{(1-S)^{l^{\varkappa-1}}} = \mathsf{E}'_{\varkappa-1}[\mathsf{E}^{f_1(S)}]^{1-S^{l^{\varkappa-1}}}$$

also für $\tau \geqq l^{\varkappa-1}$

$$\mathsf{E}''_{\varkappa-1}\mathsf{H} = [\mathsf{E}^{f_1(S)}]^{1-S^{l^{\varkappa-1}}}$$

gegen Annahme.

Man wähle $\mathsf{E}_{\varkappa-1}$ so, daß das zugehörige τ den größtmöglichen Wert von $\tau < l^{\varkappa-1}$, der für irgend eine Strahleinheit von $K_{\varkappa-1}$ eintreten kann, annimmt. Man setze $\mathsf{H}_{\varkappa} = \mathsf{E}^{2}(l+2)$; dann ist die Relativnorm von $\mathsf{H}_{\varkappa}$ in bezug auf k gleich 1. Denn ist $\mathsf{E}^{1+S+\cdots+S^{l^{\varkappa}-1}} = \varrho$, so muß, da E im Klassenstrahl liegt,

$$\varrho \equiv 1 \pmod f$$

sein. Im Fall $m=-1$ oder $m=-3$ enthält aber f sicher 2 resp. 3 und da $\pm i \not\equiv 1(2)$, $\pm\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \not\equiv 1(3)$, so ist nur $\varrho = \pm 1$ möglich; die Norm von $\mathsf{H}_{\varkappa}$ ist daher ϱ^2 oder 1. Wäre nun

$$\mathsf{H}_1^{x_1}\mathsf{H}_2^{x_2}\cdots\mathsf{H}_{\varkappa}^{x_{\varkappa}} = \mathsf{E}_1^{1-S} \quad (0 \leqq x_i < l,\ i=1,2,\cdots,\varkappa),$$

wo E_1 eine Strahleinheit und $x_{\varkappa} \neq 0$, so wäre

$$\mathsf{E}^2_{\varkappa-1}\mathsf{H}^2 = \mathsf{E}'_{\varkappa-1}\mathsf{E}^{(1-S)^{\tau+1}}$$

d. h. es gäbe eine Strahleinheit von $K_{\varkappa-1}$, mit der H^2, also auch H multipliziert, die $(1-S)^{\tau+1\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit würde, gegen Annahme. Also müßte $x_{\varkappa} = 0$ sein. Das ist aber nach dem obigen unmöglich. Also ist $\mathsf{H}_{\varkappa}$ die gesuchte Einheit.

Der Satz gilt auch für $l=3$, $\left(\frac{d}{3}\right) = 0$.

6. Einteilung der Klassen des Klassenstrahls in Geschlechter.

Definition: *Alle Idealklassen des Klassenstrahls $(\mathfrak{F})$, dessen Relativnormen in bezug auf k in dieselbe Strahlklasse von (f) fallen, bilden ein*

*) Siehe Fueter: Theorie der Zahlstrahlen II, J. f. Math. 130, S. 233, 234.

Geschlecht. Diese Definition gelte nicht nur für den relativzyklischen Körper K, sondern für jeden Relativ-Abelschen Oberkörper von k. Alle Klassen von $(\mathfrak{F})$, deren Relativnormen in bezug auf k in der Hauptstrahlklasse (f) liegen, bilden das *Hauptgeschlecht.* Ist h die Strahlklassenanzahl von (f), $l^{\varkappa}$ der größte in h enthaltene Faktor von l, so gibt es, wenn wir wieder, wie in 1., alles in bezug auf l betrachten, höchstens $l^{\varkappa}$ Geschlechter, die zur Primzahl l gehören.

Satz: *Die Anzahl der wirklich existierenden Geschlechter des relativzyklischen Körpers K vom Relativgrad l^u ist höchstens $l^{\varkappa-u}$.*

Beweis: a) *Ist $\mathfrak{A}$ ein Ideal von K, so ist $\mathfrak{A}^{1-S}$ in einer Klasse des Hauptgeschlechtes.* Denn die Relativnorm von $\mathfrak{A}^{1-S}$ ist (1).

b) Es sei $\mathfrak{A}^{1-S} \cong 1 \pmod{\mathfrak{F}}$, also

$$\mathfrak{A}^{1-S} = (\mathsf{A}),$$

wo A im Klassenstrahl liegt, $\mathsf{A} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}}$. Die Relativnorm von A in bezug auf k ist eine Einheit ϱ, für die $\varrho \equiv 1 (f)$, also $\varrho = \pm 1$. Ist $\varrho = -1$, so ersetze man $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}^2$, was erlaubt ist für $l \neq 2$. Dann wird $\varrho = +1$ und $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1^{1-S} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}}$. Nach dem Satz von 4 ist A_1 dann einer Zahl des Systems $\Sigma \pmod{\mathfrak{F}}$ kongruent. Andererseits ist

$$\mathfrak{A}^{1-S} = \mathsf{A}_1^{1-S}; \quad \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathsf{A}_1}\right) = S\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathsf{A}_1}\right).$$

Da $\mathfrak{A}$ und A_1 zu $\mathfrak{F}$ prim sind, muß $\frac{\mathfrak{A}}{(\mathsf{A}_1)}$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ von (f) in k sein. Also wird $\mathfrak{A} = (\mathsf{A}_1)\mathfrak{a}$ oder, wenn mit Σ eine Zahl des Systems bezeichnet wird,

$$\mathfrak{A} \cong (\Sigma)\mathfrak{a} \ (\mathfrak{F}).$$

c) Ist $\mathfrak{A}_1^{1-S} \cong \mathfrak{A}_2^{1-S} \ (\mathfrak{F})$, so ist $\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}\right)^{1-S} \cong 1 \ (\mathfrak{F})$, also nach obigem

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} \cong (\Sigma)\mathfrak{a} \ (\mathfrak{F})$$

d. h.: *Die Anzahl aller Strahlklassen, deren $(1-S)^{te}$ symbolische Potenzen dieselbe Klasse des Hauptgeschlechts sind, ist gleich der Anzahl der Strahlklassen, in die die Ideale $(\Sigma)\mathfrak{a}$ zerfallen, wenn (Σ) alle Ideale des Systems Σ und $\mathfrak{a}$ alle Ideale von (f) in k durchläuft.*

d) *Die Anzahl aller Klassen des Strahls $(\mathfrak{F})$, deren $(1-S)^{te}$ symbolische Potenzen dieselbe Klasse des Hauptgeschlechts ergeben, ist höchstens gleich $l^{\varkappa-u}$ $(u_0 = 0)$ resp. $l^{\varkappa+2(u_0-1)-u}$ $(u_0 > 0)$.*

Denn nach dem Hilfssatz von 5. und nach 4. kann man jede dortige Einheit H_i in der Form darstellen

$$\mathsf{H}_i = \mathsf{A}_i^{1-S}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, u),$$

wo (A_i) eine Klasse von Σ sein wird $\pmod{\mathfrak{F}}$. Außerdem ist (A_i) eine

Klasse $\mathfrak{a}_i$ von (f) in k. Es seien τ der Zahlen A_i zugleich im Klassenstrahl. Für $u_0 = 0$ ist dann $\tau = u$. Das System dieser τ Klassen $\mathfrak{a}_{i_1}, \mathfrak{a}_{i_2}, \cdots, \mathfrak{a}_{i_\tau}$

$$\mathfrak{a}_{i_1}^{x_1} \mathfrak{a}_{i_2}^{x_2} \cdots \mathfrak{a}_{i_\tau}^{x_\tau} \qquad (0 \leqq x_i < l, \; i = 1, 2, \cdots, \tau)$$

stellt dann l^τ verschiedene Klassen von (f) dar. Denn wäre

$$\mathfrak{a}_{i_1}^{x_1} \mathfrak{a}_{i_2}^{x_2} \cdots \mathfrak{a}_{i_\tau}^{x_\tau} = (\alpha),$$

wo α in (f) wäre, so gäbe es eine Einheit H des Klassenstrahls, sodaß

$$\mathsf{A}_{i_1}^{x_1} \cdots \mathsf{A}_{i_\tau}^{x_\tau} = \alpha \mathsf{H} \quad \text{oder} \quad \mathsf{H}_{i_1}^{x_1} \mathsf{H}_{i_2}^{x_2} \cdots \mathsf{H}_{i_\tau}^{x_\tau} = \mathsf{H}^{1-S},$$

was nur für $x_1 = x_2 = \cdots = x_\tau = 0$ möglich ist. Somit fallen l^τ Klassen von (f) im Klassenstrahl $(\mathfrak{F})$ in die Hauptklasse. Da $\tau = u$, für $u_0 = 0$, gibt es in diesem Fall also nur $l^{\varkappa - u}$ Klassen des Systems $\mathfrak{a}(\Sigma)$ (mod $\mathfrak{F}$). Im Falle $u_0 > 0$ gibt es noch $l^{\varkappa + 2(u_0 - 1) - \tau}$ verschiedene Klassen in $\mathfrak{a}(\Sigma)$. Da aber die noch bleibenden $l^{u-\tau}$ Klassen $\mathfrak{a}_i = (\mathsf{A}_i)$ Klassen des Systems (Σ) sind, die alle voneinander verschieden sind, da ja die $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots, \mathsf{A}_u$ den aufeinanderfolgenden Körpern $K_1, K_2, \cdots, K_u = K$ angehören, so bleiben auch in diesem Falle nur $\dfrac{l^{\varkappa + 2(u_0 - 1) - \tau}}{l^{u-\tau}} = l^{\varkappa + 2(u_0 - 1) - u}$ verschiedene Klassen des Systems $\mathfrak{a}(\Sigma)$ übrig. *Im Falle* $l = 3$, $\sigma = 2$, $\left(\frac{d}{3}\right) = 0$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^3)$, *ist für* $u_0 > 0$ *die Anzahl höchstens* $3^{\varkappa + 2u_0 - u}$.

e) *Die Anzahl der existierenden Geschlechter sei g; jedes Geschlecht umfaßt gleichviel $= e$ Klassen.* Denn man erhält *alle* Klassen eines Geschlechts, wenn man eine seiner Klassen mit *allen* e Klassen des Hauptgeschlechts multipliziert. *Die Anzahl aller Klassen ist somit eg.*

f) Ist $u_0 = 0$, so gibt es höchstens $l^{\varkappa - u}$ Klassen, deren $(1 - S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz eine der e Klassen des Hauptgeschlechts ist. Also ist die Anzahl aller Klassen höchstens $el^{\varkappa - u}$; oder

$$eg \leqq el^{\varkappa - u}; \quad g \leqq l^{\varkappa - u}.$$

Der Satz ist in diesem Fall bewiesen.

g) Ist dagegen $u_0 > 0$, so gibt es höchstens $l^{\varkappa + 2(u_0 - 1) - u}$ Klassen, deren $(1 - S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz eine Klasse des Hauptgeschlechts ist. Wir werden nachher zeigen, daß es andererseits höchstens $\dfrac{e}{l^{2(u_0 - 1)}}$ Klassen im Hauptgeschlecht gibt, die die $(1 - S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz einer Klasse werden können. Also ist die Klassenzahl $\leqq \dfrac{e}{l^{2(u_0 - 1)}} l^{\varkappa + 2(u_0 - 1) - u}$ oder

$$eg \leqq \frac{e}{l^{2(u_0 - 1)}} l^{\varkappa + 2(u_0 - 1) - u}; \quad g \leqq l^{\varkappa - u}.$$

Um noch zu beweisen, daß es höchstens $\frac{e}{l^{2(u_0-1)}}$ verschiedene Klassen im Hauptgeschlecht gibt, die die $(1-S)^{te}$ symbolische Potenz einer Klasse sind, nehmen wir die in Hilfssatz IV, Kapitel II definierte Zahl $\Lambda_{r_{u_0}-1}$. Dieselbe nehmen wir noch durch $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots, \mathfrak{L}_r$ teilbar an und setzen ihre Spur in Bezug auf k in der Form

$$\lambda^{u_0-\sigma}\alpha, \text{ wenn } sS = Ss; \quad \lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\alpha, \text{ wenn } sS = S^{-1}s$$

ist, voraus, wo α zu l prim ist und λ durch $\mathfrak{l}$ teilbar, aber $\frac{(\lambda)}{\mathfrak{l}}$ zu l prim ist. Letzteres dürfen wir annehmen; denn es gibt im Verzweigungskörper stets eine Zahl Θ, deren Spur in bezug auf k zu l prim ist.*) Wenn die Spur von $\Lambda_{r_{u_0}-1}$ in bezug auf k nicht obiger Bedingung genügte, so stelle man die Spur von $\Lambda_{r_{u_0}-1}$ in bezug auf den Verzweigungskörper in der Form $\lambda^{\sigma' u_0}\Theta'$, resp. $\lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\Theta'$ dar, wo Θ' zu (l) prim ist. Dann genügt $\frac{\Theta}{\Theta'}\Lambda_{r_{u_0}-1}$ sicher allen gestellten Anforderungen. Wir beschränken uns von nun an auf den Fall $sS = S^{-1}s$ und setzen

$$\mathfrak{B}_i = (1+\alpha_i\lambda^{i-1}\Lambda_{r_{u_0}-1}) \quad (i = 2, 3, \cdots, \sigma u_0-(\sigma-1)).$$

α_i, λ sind Zahlen von k und λ hat obige Bedeutung. *$\mathfrak{B}_i$ sind Ideale des Hauptgeschlechts.* Denn bedeutet N die Norm in bezug auf k, so ist nach Annahme

$$N(1+\alpha_i\lambda^{i-1}\Lambda_{r_{u_0}-1}) = 1 + \alpha_i\lambda^{i-1}\lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\alpha + \alpha_i^2\lambda^{2(i-1)}\lambda^{\sigma u_0+1}\bar{\alpha},$$

oder, da $i > 1$:

$$N(1+\alpha_i\lambda^{i-1}\Lambda_{r_{u_0}-1}) \equiv 1 \ (\mathfrak{l}^{\sigma u_0+2-\sigma})$$
$$\equiv 1 \ (\mathfrak{l}_\iota) \qquad (\iota = 1, 2, \cdots, r).$$

Aus der Annahme

$$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\cdots\mathfrak{B}_{\sigma u_0-(\sigma-1)} \cong 1 \ (\mathfrak{F}),$$

folgt

$$\alpha_i \equiv 0 \ (\mathfrak{l}) \qquad (i = 2, 3, \cdots, \sigma u_0-(\sigma-1)).$$

Denn sonst müßte es eine Einheit H geben, sodaß

$$\mathrm{H}(1+\lambda\alpha_2\Lambda_{r_{u_0}-1})(1+\lambda^2\alpha_3\Lambda_{r_{u_0}-1})\cdots(1+\lambda^{\sigma u_0-\sigma}\alpha_{\sigma u_0-(\sigma-1)}\Lambda_{r_{u_0}-1})$$
$$= 1 + \lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\Lambda,$$

wo Λ wenigstens durch $\mathfrak{L}$ teilbar wäre. Bildet man hier die Relativnorm in bezug auf k, so wird, wie oben, wegen $N(\mathrm{H}) = 1$,

$$(1+\alpha_2\lambda^{\sigma u_0+2-\sigma}\alpha + \alpha_2^2\lambda^{\sigma u_0+3}\bar{\alpha}_1)(1+\alpha_3\lambda^{\sigma u_0+3-\sigma}\alpha + \alpha_3^2\lambda^{\sigma u_0+5}\bar{\alpha}_2)\cdots$$
$$\cdots(1+\alpha_{\sigma u_0-(\sigma-1)}\lambda^{2\sigma u_0-2\sigma+1}\alpha + \alpha^2_{\sigma u_0-\sigma-1}\lambda^{2\sigma u_0+1}\bar{\alpha}) = 1 + \lambda^{2\sigma u_0-(\sigma-1)}\bar{\alpha},$$

*) Siehe dieses Kapitel S. 222, 3. b) Beweis.

wo α sicher zu l prim ist. Liest man diese Gleichung sukzessive als Kongruenz mit den Moduln $\mathfrak{l}^{\sigma u_0+3-\sigma}, \mathfrak{l}^{\sigma u_0+4-\sigma}, \cdots, \mathfrak{l}^{2\sigma u_0-(\sigma-1)}$, so folgt

$$\alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \cdots \equiv \alpha_{\sigma u_0-(\sigma-1)} \equiv 0 \ (\mathfrak{l}).$$

Genau ebenso beweist man, daß aus

$$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 \cdots \mathfrak{B}_{\sigma u_0-(\sigma-1)} \simeq \mathfrak{C}^{1-S}\ (\mathfrak{F}) : \alpha_i \equiv 0\ (\mathfrak{l})$$

folgt $(i = 2, \cdots, \sigma u_0 - (\sigma - 1))$, da dann $\mathfrak{C}^{1-S} = \Gamma$ und

$$\mathrm{H}(1+\alpha_1\lambda\Lambda_{\nu_{u_0-1}}) \cdots (1+\alpha_{\sigma u_0-(\sigma-1)}\lambda^{\sigma u_0-\sigma}\Lambda_{\nu_{u_0-1}}) = \Gamma(1+\lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\Lambda)$$

sein müßte, was wegen $N(\mathrm{H}) = 1$, $N(\Gamma) = 1$ unmöglich ist, außer wenn $\alpha_i \equiv 0\ (\mathfrak{l})$.

Wenn also die α_i die $\mathfrak{l}^2$ inkongruenten Werte (mod $\mathfrak{l}$) durchlaufen, so stellen $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 \cdots \mathfrak{B}_{\sigma u_0-(\sigma-1)}$ im ganzen $l^{2(u_0-1)}$ Klassen des Hauptgeschlechts dar, die nicht die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz einer Klasse werden. Diese Klassen bilden eine Abelsche Untergruppe der Abelschen Gruppe aller e Klassen des Hauptgeschlechts. e ist durch $l^{2(u_0-1)}$ teilbar, und es gibt höchstens $\frac{e}{l^{2(u_0-1)}}$ Klassen mit der verlangten Eigenschaft.

Ist $l = 3$, $\left(\frac{d}{3}\right) = 0$, $\sigma = 2$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}^3)$, und bedeutet Λ_k eine durch $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots, \mathfrak{L}_r$ und $\mathfrak{L}^k$ teilbare Zahl, wo $\frac{(\Lambda_k)}{\mathfrak{L}^k}$ zu $\mathfrak{L}$ prim ist, so setzt man

$$\mathfrak{B}_i = (1+\alpha_i\Lambda_{2u_0+i+\tau}), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, 2u_0 - 1 + \tau \quad \begin{pmatrix}\tau = 0, & m \neq -3\\ \tau = 1, & m = -3\end{pmatrix}.$$

Man beweist wie oben, daß dadurch 3^{2u_0} verschiedene Klassen des Hauptgeschlechts gegeben sind, die nicht die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz einer anderen Klasse werden. Es gibt also nur $\frac{e}{3^{2u_0}}$ Klassen des Hauptgeschlechts, die die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz werden. Dabei ist auch $k = k(\sqrt{-3})$ mit eingeschlossen.

7. In K existieren genau l^{x-u} Geschlechter.

Dies ist eine Folge des von H. Weber bewiesenen Hilfssatzes*): *Durchläuft p_i alle Primzahlen, die Normen von Primidealen einer Strahlklasse in bezug auf die Primzahl l**) von k mit dem Führer f sind, und ist l^x die Strahlklassenzahl in bezug auf l, so ist:*

$$\sum \frac{1}{p_i^s} = \frac{1}{2l^x}\lg\frac{1}{s-1} + f(s) \qquad (s>1),$$

wo $f(s)$ für lim inf. $s = 1$ *endlich bleibt.*

*) Math. Ann. 49, S. 89; Algebra, Bd. III, S. 606, 608, 612. Der Hilfssatz gilt auch für $l = 2$ und den engeren Äquivalenzbegriff.

**) S. 220 dieser Arbeit.

Durchläuft nämlich andererseits p_i' die Primzahlen, die Normen von Primidealen 1. Grades des Galoisschen Körpers K vom Grade $2l^u$ sind, *so ist**)

$$\sum \frac{1}{p_i'^s} = \frac{1}{2l^u} \lg \frac{1}{s-1} + f_1(s), \qquad (s>1),$$

wo $f_1(s)$ *für* lim inf. $s=1$ *endlich bleibt.*

Wenn l^t die Anzahl der existierenden Geschlechter in K bedeutet, so gibt es l^t Klassen im Strahl (f) von k, die Relativnormen von Klassen in $(\mathfrak{F})$ von K sind. Nur die Primideale dieser l^t Klassen können also in Primideale 1. Grades zerfallen. Durchläuft $\overline{p}_i$ alle Primzahlen, die Normen von Primidealen dieser l^t Klassen sind, so ist nach dem Hilfssatz

$$\sum \frac{1}{\overline{p}_i^s} = \frac{l^t}{2l^\varkappa} \lg \frac{1}{s-1} + f_2(s), \qquad (s>1)$$

und da

$$\sum \frac{1}{p_i'^s} \leqq \sum \frac{1}{\overline{p}_i^s},$$

so ist

$$\frac{1}{2l^u} \lg \frac{1}{s-1} \leqq \frac{l^t}{2l^\varkappa} \lg \frac{1}{s-1} + f_3(s), \qquad (s>1),$$

wo der lim inf. $s=1$ von $f_3(s)$ endlich ist. Also:

$$\frac{1}{2l^u} \leqq \frac{l^t}{2l^\varkappa},$$

$$t \geqq \varkappa - u.$$

Andererseits wurde in 6. bewiesen, daß $t \leqq \varkappa - u$; also ist nur $t = \varkappa - u$ möglich, w. z. b. w.

Da jetzt

$$\left.\begin{aligned} \sum \frac{1}{\overline{p}_i^s} &= \frac{1}{2l^u} \lg \frac{1}{s-1} + f_2(s) \\ \sum \frac{1}{p_i'^s} &= \frac{1}{2l^u} \lg \frac{1}{s-1} + f_1(s) \end{aligned}\right\} \qquad (s>1),$$

so folgt: *Sämtliche Primideale der $l^{\varkappa-u}$ Klassen von (f), denen ein Geschlecht entspricht, zerfallen in K in Primideale 1. Grades in bezug auf k, mit Ausnahme der Primideale $\mathfrak{p}_i^*$, für die*

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)}$$

konvergiert.

8. Das Resultat von 7. läßt sich auf jeden in k relativ-Abelschen Körper ausdehnen, falls derselbe die Eigenschaften von Kapitel II. 1. hat. Der dort definierte Körper vom Relativgrad $N = l^u$ setze sich aus den zu k relativ-zyklischen Körpern $K_1, K_2, \cdots, K_r$ mit den Relativgraden

*) Zahlbericht, S. 265, Satz 84.

$l^{u_1}, l^{u_2}, \cdots, l^{u_r}$ zusammen. Dieselben sollen keine gemeinsamen Unterkörper besitzen, also $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_r$ sein. Ist f das kleinste gemeinsame Vielfache der den Körpern $K_1, K_2, \cdots, K_r$ zugeordneten Führer $f_1, f_2, \cdots, f_r$, so ist nach Kapitel II f der Führer des K zugeordneten Strahls in k. In K_i zerfallen nun *alle* Primideale einer Klasse von (f_i) in l^{u_i} Primideale, oder keine; um so mehr also auch in einer Klasse von (f). Eine Ausnahme können nur die Primideale $\mathfrak{p}_i^*$ machen, für die

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)}$$

konvergiert. Ist $l^{\varkappa_i}$ die zu l gehörige Klassenzahl von (f_i), $l^{\varkappa}$ die von (f), so zerfällt jede Klasse von (f_i) in (f) in $l^{\varkappa - \varkappa_i}$ Klassen. Also gibt es $l^{\varkappa-\varkappa_i} \cdot l^{\varkappa_i - u} = l^{\varkappa - u}$ Klassen von (f), denen ein Geschlecht in K_i entspricht. *Alle Primideale einer Klasse von (f) in k zerfallen in l^u Primideale in K oder keine zerfallen in l^u Primideale. Ausgenommen sind die $\mathfrak{p}_i^*$, für die $\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)}$ konvergiert.*

Ist also l^t die Anzahl der Klassen von (f), denen ein Geschlecht in K entspricht, so ist nach dem Hilfssatz, wenn p_i alle Primzahlen, die Normen von Primidealen der l^t Klassen sind, durchläuft:

$$\sum \frac{1}{p_i^s} = \frac{l^t}{2 l^{\varkappa}} \lg \frac{1}{s-1} + f(s) \qquad (s > 1).$$

Durchläuft p_i' alle Primzahlen, die in Primideale 1. Grades in K zerfallen, so ist*)

$$\sum \frac{1}{p_i'^s} = \frac{1}{2 l^u} \lg \frac{1}{s-1} + f_1(s) \qquad (s > 1).$$

Also ist

$$\sum \frac{1}{p_i^s} - \sum \frac{1}{p_i'^s} = \sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)^s} = \left(\frac{l^t}{2 l^{\varkappa}} - \frac{1}{2 l^u}\right) \lg \frac{1}{s-1} + f_2(s) \qquad (s > 1).$$

Nun konvergiert aber $\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)^s}$ für lim inf. $s = 1$. Also muß

$$\frac{l^t}{2 l^{\varkappa}} = \frac{1}{2 l^u},$$

$$t = \varkappa - u$$

sein.

Hauptsatz: I. *Ist K ein zu k relativ-Abelscher, absolut Galoisscher Körper vom Relativgrad l^u, der sich in eine Reihe von relativ-zyklischen absolut Galoisschen Körpern auflösen läßt ($sS = S^{\pm 1} s$); ist ferner $l^{\varkappa}$ die größte Potenz von l, die in der Klassenzahl des K zugeordneten Strahls (f) von k enthalten ist, so existieren genau $l^{\varkappa - u}$ Geschlechter in K.*

*) Zahlbericht, S. 265, Satz 84.

II. *Ordnet man K den Strahl f^* zu, dessen Führer ein Vielfaches von (f) ist, und ist $l^{\varkappa^*}$ der entsprechende Faktor der Klassenzahl von (f^*), so existieren genau $l^{\varkappa^*-u}$ Geschlechter in K.*

Denn jede Klasse von (f) zerfällt in $l^{\varkappa^*-\varkappa}$ Klassen in (f^*), die $l^{\varkappa-u}$ Klassen, denen Geschlechter entsprechen, also in $l^{\varkappa^*-\varkappa}\cdot l^{\varkappa-u}=l^{\varkappa^*-u}$ Klassen (f^*).

9. Während der Fall $l=3$, $\left(\frac{d}{3}\right)=0$, $\sigma=2$ leicht mit behandelt werden konnte, verlangt $l=2$ eine besondere Betrachtung. Die Beweismethode bleibt dieselbe, nur daß der engere Äquivalenzbegriff vorausgesetzt wird. Wir geben der Kürze halber die Abweichungen an, die gegenüber dem allgemeinen l eintreten. Im Satz 3c) β) lauten die Ungleichungen für die q_i:

$$q_i \geqq t2^i - 1 + \frac{r}{2^{u_0-i}}, \quad i > \varkappa; \quad \sigma = 1,$$

$$q_i \geqq t2^i - 2 + \frac{r}{2^{u_0-i}}, \quad i \leqq \varkappa; \quad \sigma = 1.$$

Für $\sigma = 2$ ist

$$q_i \geqq t2^i - 1 + \frac{r}{2^{u_0-i}}, \quad \sigma = 2,$$

oder das erste q_ι, für das $\Lambda_{\mathfrak{R}} \neq 0$ ist, hat den Wert

$$q_\iota = t2^\iota - 3 + \frac{r}{2^{u_0-\iota}}$$

und alle weiteren q_i $(i > \iota)$ sind eindeutig bestimmt. Dabei hat $\varkappa$ die Bedeutung der Ergänzung zu Hilfssatz III, Kapitel II.*) Ist

$$v_{u_0-1} = \sigma 2^{u_0+1} - 2\sigma + 1,$$

so bleibt alles weitere gleich, nur treten im ganzen $2^{2(u_0+2-\sigma)}$ Klassen in (Σ) auf und entsprechend $2^{2(u_0+2-\sigma)}$ Klassen der $\mathfrak{B}_i$. Der Hauptsatz bleibt derselbe. Ist dagegen $v_{u_0-1} = \sigma 2^{u_0+1} - \sigma + 1$, so treten geringfügige Veränderungen ein, die dem Falle $l=3$, $\sigma=2$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^3)$ entsprechen. Der Satz ist auch jetzt zu beweisen.

Der Hilfssatz von 5. ist für $l=2$ leicht mit denselben Mitteln zu beweisen, falls $f \neq 1$. Denn für $f \geqq 3$ muß die Norm jeder Strahleinheit $\equiv 1 \pmod f$ sein, also sicher gleich $+1$. Ist aber $f=2$, so ist $m=-1$ und $m=-3$ sicher ausgeschlossen; ebenso $\sigma=1$. Wenn aber $\sigma=2$, so ist $f=2$ nicht mit den einfachen Mitteln zu behandeln. *Der Hauptsatz gilt dann nur für $f > 2$.*

*) S. 202.

Kapitel IV.

Die Diskriminante der Körper $K(f)$.

Mit Hilfe der Sätze von Kapitel II. und III. kann für die Körper $K(f)$*) diejenige Eigenschaft bewiesen werden, die der Eigenschaft 4.**) der Kreiskörper entspricht:

Hauptsatz: *Die Relativdiskriminante von $K(f)$ in bezug auf k enthält nur die Primzahlen von f; die Primteiler von f treten umgekehrt alle in der Relativdiskriminante auf mit Ausnahme:*

a) *von 2, wenn 2 nur einfach in f enthalten ist und $m \equiv 1\,(8)$ oder $m = -1$;*

b) *von 3, wenn 3 nur einfach in f enthalten und $m = -3$.*

Der Satz wird für jeden Unterkörper $K_i(f)$ von $K(f)$ bewiesen und gilt dann allgemein.

1. Zunächst werde der zweite Teil des Satzes bewiesen. Gibt es eine Primzahl l_1 die auch $= l$ sein kann, die in f, aber nicht in der Relativdiskriminante enthalten ist, so ist der dem Körper $K(f)$ nach Kapitel II. 6.***) zugeordnete Führer $\bar{f}$ von k zu l_1 prim, falls man zunächst von den Ausnahmefällen $l=2$, $\left(\frac{d}{2}\right)=1$, oder $m=-1$; $l=3$, $m=-3$ absieht. Dann zerfallen nach Kapitel III. 8.†) alle Primideale der Hauptklasse des Strahls $(\bar{f})$ in $K_i(f)$ in Primideale 1. Grades, abgesehen von $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*, \cdots$, für die

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)^s}$$

für lim inf. $s=1$ konvergiert. Nun gibt es nach dem Hilfssatz Kapitel III. 7.††) unendlich viele Primideale 1. Grades in jeder Strahlklasse. Also gibt es unendlich viele Primideale 1. Grades, die in der Hauptklasse des Strahls $(\bar{f})$, nicht aber in der Hauptklasse des Strahls (l_1) resp. (l^ν) liegen. Für diese Primideale $\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\cdots)$ existiert außerdem der $\liminf\limits_{s=1} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s}$ nicht. Somit gäbe es unendlich viele Primideale, die sicher nicht in der Hauptklasse des Strahls (f) von k liegen und die trotzdem in Primideale 1. Grades in $K_i(f)$ zerfielen; dies widerspricht dem Zerlegungssatz 2. der Körper $K(f)$.†††)

In den Ausnahmefällen würde $\bar{f}$, wenn 2 resp. 3 in f zu höherer als 1. Potenz enthalten wäre und die Relativdiskriminante trotzdem zu 2 resp. 3 prim wäre, die Primzahl 2 resp. 3 nur zur 1. Potenz enthalten. Dieselbe

*) S. 183. **) S. 182. ***) S. 217. †) S. 236. ††) S. 235. †††) S. 183.

Überlegung wie oben führt auch hier zum Ziel. Der Fall, daß 2 nur einfach in f enthalten und $\left(\frac{d}{2}\right) = -1, 0$, wird später behandelt.

2. *Die Relativdiskriminante von $K_l(f)$ enthalte eine Primzahl $l_1 \neq l$, wo l_1 zu f prim ist.*

a) $l \neq 2$. α) Wir betrachten $K_l(l_1 f)$. Dieser Körper ist relativ-Abelsch zu $K_l(f)$ und enthält letzteren vollständig*). Sein Relativgrad ist die größte in

$$\frac{1}{2}(l_1 - 1)\left(l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right)\right)$$

enthaltene Potenz $l^{\varkappa_1}$ von l**). Dabei sei $l = 3$, $m = -3$ zunächst ausgeschlossen. $K_l(l_1 f)$ hat einen Unterkörper $\overline{K}_l$, der denselben Relativgrad $l^u = N$ zu k hat wie $K_l(f)$, und dessen Relativdiskriminante zu l_1 prim ist. Denn nach dem Satz Kapitel II. 1.***) hat die Trägheitsgruppe der in l_1 enthaltenen Primideale höchstens den Grad $l^{\varkappa_1}$. Der Trägheitskörper hat aber eine zu l_1 prime Relativdiskriminante zu k und hat wenigstens den Grad $l^u = N$. Zu $\overline{K}_l$ gehöre der Führer $\bar{f}$ in k. *$\bar{f}$ ist also prim zu l_1.* Bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache f^* von f und $\bar{f}$, so *ist auch f^* zu l_1 prim.* Die zu l gehörige Klassenanzahl des Strahls f^* in k sei $l^{\varkappa'}$. Nach Kapitel III. Hauptsatz†) existieren genau $l^{\varkappa'-u}$ Geschlechter in $\overline{K}_l$ in bezug auf den Führer f^*. Andererseits entsprechen jeder Klasse von (f) $l^{\varkappa'-u}$ Klassen von (f^*), da l^u die Klassenanzahl von (f) ist, die zu l gehört††).

β) *Die $l^{\varkappa'-u}$ Klassen von (f^*), denen Geschlechter in $\overline{K}_l$ entsprechen, liegen alle in der Hauptklasse von (f).*

Denn es zerfallen $(l^{\varkappa'} - l^{\varkappa'-u})$ Klassen von (f^*) *nicht* in $\overline{K}_l$. Fiele eine derselben in die Hauptklasse von (f), so gäbe es, da l_1 zu f^* prim ist, unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$, für die der

$$\liminf_{s=1} \sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s}$$

nicht existiert und die in der Hauptklasse des Strahls $(l_1 f)$ lägen. Dies ist gegen Zerlegungssatz 2.†††) der Körper $K(f)$ resp. $K(l_1 f)$, nach dem alle Primideale dieser Hauptklasse zerfallen müssen, abgesehen von endlich vielen. Alle $(l^{\varkappa'} - l^{\varkappa'-u})$ Klassen von (f^*) müssen also in Nebenklassen von (f) liegen. Den $l^u - 1$ Nebenklassen von (f) entsprechen aber genau $(l^{\varkappa'} - l^{\varkappa'-u})$ Klassen in (f^*). Also müssen alle Klassen von (f^*), die in Nebenklassen von (f) liegen, nicht zerfallen, und die $l^{\varkappa'-u}$ Klassen, die

*) Weber: Algebra II, S. 451. Hilbert: Zahlbericht, S. 330 u. ff.
) S. 183, Eigenschaft 1. *) S. 188. †) S. 237.
††) S. 183, Eigenschaft 1. †††) S. 183.

in der Hauptklasse von (f) liegen, entsprechen den existierenden Geschlechtern.

γ) Die Körper $\overline{K}_l$ und $K_l(f)$ haben denselben Relativgrad zu k. Sie sind beide relativ-Abelsch zu k. Die Primideale 1. Grades sind nach β) und wegen Zerlegungssatz 2.*) dieselben, wenn man von den Primidealen $\mathfrak{p}_i^*$ $(i=1,2,\cdots)$ absieht, für die

$$\lim_{s=1}\inf. \sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)^s}$$

existiert. *$\overline{K}_l$ und $K_l(f)$ sind dann identisch.*

Um dies zu zeigen, adjungiere man die l^{ten} Einheitswurzeln zu $\overline{K}_l$ und zu $K_l(f)$, außer wenn $l=3$, $m=-3$. Die beiden Körper sollen in $\overline{K}_l'$ und $K_l'(f)$ übergehen. Die oben angegebenen Eigenschaften bleiben dann erhalten. Denn da $(l-1)$ der Grad des Körpers der l^{ten} Einheitswurzeln ist, kann keiner der beiden Körper $\overline{K}_l$ und $K_l(f)$ dieselben enthalten. K_1 sei ein Unterkörper von $K_l'(f)$, zu dem $K_l'(f)$ den Relativgrad l besitze. $K_l'(f)$ entstehe aus K_1 durch Adjunktion von $\sqrt[l]{w}$. Andererseits müßte, wenn $K'(f)$ nicht identisch mit $\overline{K}_l'$ ist, bei dem algebraischen Aufbau des Körpers $\overline{K}_l'$ der Fall eintreten, daß der Unterkörper $\overline{\overline{K}}_l'$ von $\overline{K}_l'$ noch in $K_l'(f)$ liegt, der durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\overline{w}}$ erhaltene nächst höhere Unterkörper von $\overline{K}_l'$ aber nicht mehr. Dann gibt es unendlich viele Primideale $\mathfrak{P}_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 1. Grades in K_1, für die

$$\lim_{s=1}\inf. \sum \frac{1}{n(\mathfrak{P}_i)^s}$$

nicht existiert, und für die:

$$\left(\frac{w}{\mathfrak{P}_i}\right)=1;\quad \left(\frac{\overline{w}}{\mathfrak{P}_i}\right)\neq 1 \qquad (i=1,2,\cdots)$$

ist, wo $\left(\frac{w}{\mathfrak{P}}\right)$ das l^{te} Potenzrestsymbol bedeutet**). Alle $\mathfrak{P}_i$ zerfallen in $K_l'(f)$ in Primideale 1. Grades, nicht aber in $\overline{K}_l'$. Dies widerspricht der Annahme. Also muß $K_l'(f)$ mit $\overline{K}_l'$ und $K_l(f)$ mit $\overline{K}_l$ identisch sein. Nun ist die Relativdiskriminante von $\overline{K}_l$ in bezug auf k zu l_1 prim. Also ist die Annahme, diejenige von $K_l(f)$ in bezug auf k enthalte l_1, hinfällig.

δ) $l=3$, $m=-3$. In diesem Falle darf man $f=1$ immer durch 3 ersetzen, da (1) und (3) in bezug auf 3 die gleiche Klassenanzahl haben, also $K_3(3)=K_3(1)$. In jedem Falle ist dann der Relativgrad von $K_3(l_1 f)$ zu $K_3(f)$ gleich der größten in $\frac{1}{2}(l_1-1)\left(l_1-\left(\frac{d}{l_1}\right)\right)$***) enthaltenen Potenz von 3.

*) S. 183.

**) Hilbert: Zahlbericht, S. 426, Satz 152 und sein Beweis.

***) Siehe die Formel von h, S. 183.

Die übrige Überlegung bleibt gleich.

b) $l = 2$. Ist $m = -1$, $f = 1$, so kann man f stets durch 2 ersetzen, da (1) und (2) in diesem Fall dieselbe Klassenzahl haben, also $K_2(1) = K_2(2)$. Somit ist in jedem Fall der Relativgrad von $K_2(l_1 f)$ zu $K_2(f)$ gleich der größten in $\frac{1}{2}(l_1 - 1)\left(l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right)\right)$ enthaltenen Potenz von 2. Der Körper $K_2(l_1 f)$ hat demnach einen Unterkörper vom Relativgrad $2^u = N$, dessen Relativdiskriminante zu 2 prim ist. Denn zerlegt man $K_2(l_1 f)$ in den absolut Abelschen Kreiskörper und den relativ-Abelschen Körper der komplexen Multiplikation, so haben die beiden Körper nach Kapitel I.*) jedenfalls den quadratischen Unterkörper $\sqrt{(-1)^{\frac{l_1-1}{2}} l_1}$, dessen Relativdiskriminante l_1 enthält, gemein. Vergleicht man dies mit dem Satz Kapitel II. 4.**), so erkennt man sofort, daß die Trägheitsgruppe von den in l_1 enthaltenen Primidealen höchstens als Grad die größte in $\frac{1}{2}(l_1 - 1)\left(l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right)\right)$ enthaltene Potenz von 2 besitzen kann. Alles weitere bleibt sich gleich. Nur ist nun $2^{x' + \sigma + \varrho}$ die Klassenanzahl von (f^*) im *engeren Sinne****) und es gibt nach dem Hauptsatz von Kapitel III. $2^{x' + \sigma + \varrho - u}$ existierende Geschlechter in $\overline{K}_2$, da $f^* > 2$. Alle Klassen von (f^*) im engeren Sinne, die existieren, fallen aber in die Hauptklasse von (f) im weiteren Sinne. Also haben wieder $K_2(f)$ und $\overline{K}_2$ dieselben Primideale 1. Grades, abgesehen von jenen $\mathfrak{p}_i^*$ $(i = 1, 2, \cdots)$; der Schluß ist derselbe wie vorhin.

3. Die Primzahl l sei in f nicht enthalten. *Die Relativdiskriminante von $K_l(f)$ in bezug auf k ist dann zu l prim.*

a) $l \neq 2$. Man denke sich die $K_l(f)$ aus den Kreiskörpern und den Körpern der singulären Moduln aufgebaut. Für den Kreiskörper kennt man die Diskriminante†). Der Satz gilt dann und ist nur noch für den in $K_l(f)$ enthaltenen Körper $K_l''(f)$ der singulären Moduln zu beweisen.

Wir betrachten die Relativgruppe

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_\nu^{x_\nu} \qquad (0 \leq x_i < l^{n_i},\ i = 1, 2, \cdots, \nu)$$

von $K_l''(l^{u_0 + 2 - \sigma} f)$ in bezug auf k. Dabei ist u_0 so gewählt, daß l in $K_l''(f)$ genau die l^{u_0}te Potenz eines aus lauter verschiedenen Primidealen zusammengesetzten Ideals wird. $K_l''(f l^{u_0 + 2 - \sigma})$ ist relativ-zyklisch zu $K_l''(f)$. Denn die Gruppen sind holoedrisch isomorph mit den Gruppen der Klassen des Ringes $(l^{u_0 + 2 - \sigma} f)$ resp. (f)††) und für dieselben gilt, wie leicht zu sehen, diese Tatsache. Der Relativgrad ist l^{u_0}. Die Relativgruppe soll nun etwa

*) S. 183, Beweis von 1. **) S. 213.

***) S. 220. Man unterscheide das jetzige σ von dem sonstigen.

†) S. 182, Eigenschaft 4. ††) S. 183. Eigenschaft 3.

gerade durch die Potenzen von $S_1^{l^{n_1-u_0}}$ gegeben sein. Dann ist die Relativgruppe von $K_l''(f)$ in bezug auf k gegeben durch:

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_\nu^{x_\nu} \quad \begin{cases} 0 \leqq x_1 < l^{n_1-u_0} \\ 0 \leqq x_i < l^{n_i} \ (i = 2, 3, \cdots, \nu). \end{cases}$$

Dabei kann $l^{n_1-u_0}$ auch gleich Eins sein. Wir wollen beweisen, daß es dann immer einen Unterkörper $\overline{K}_l''$ in $K_l''(l^{u_0+2-\sigma}f)$ vom Relativgrad l^{u_0} zu k gibt, dessen Relativdiskriminante zu l prim ist.

Die Verzweigungsgruppe (gleich der Trägheitsgruppe) der in $\mathfrak{l}$ enthaltenen Primideale ist zyklisch*). Ist dieselbe eine zyklische Untergruppe von

$$S_2^{x_2} \cdots S_\nu^{x_\nu} \quad \{0 \leqq x_i < l^{n_i} \ (i = 2, 3, \cdots, \nu),$$

so ergibt sich ohne weiteres der gewünschte Unterkörper. Ist dagegen eine Potenz von S_1 die Basissubstitution der Verzweigungsgruppe, so müßte dieselbe den Grad l^{2u_0} haben. Denn da dieselbe zyklisch ist und schon in $K_l''(f)$ den Grad l^{u_0} hat, müßte sie wenigstens den Grad l^{u_0} haben, oder $S_1^{l^{n_1-u_0}}$ müßte eine ihrer Substitutionen sein. Wäre aber auch $S_1^{l^{n_1-2u_0}}$ nicht in ihr, so würde, da $S_1^{l^{n_1-u_0}}$ die Grundsubstitution der Relativgruppe von $K_l''(l^{u_0+2-\sigma}f)$ zu $K_l''(f)$ ist, auch $\mathfrak{l}$ in $K_l''(f)$ *nicht* die l^{u_0}te Potenz eines Ideals werden. Somit ist sicher $n_1 - 2u_0 \geqq 0$ oder $n_1 \geqq 2u_0$.

Wegen des holoedrischen Isomorphismus mit den Klassen der Ringe von (f) resp. $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ gibt es aber eine Ringklasse A, für die

$$A^{l^{n_1-u_0+\mu}} \ (\mu < u_0)$$

im Ring (f), nicht aber im Ring $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ liegt; für die dagegen $A^{l^{n_1}}$ im Ring $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ liegt. Diese Klasse A ist der Substitution S_1 in $K_l''(f)$ und $K_l''(l^{u_0+2-\sigma}f)$ umkehrbar eindeutig zugeordnet. Dies ist unmöglich.

Denn ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal (prim zu l) von A, so gibt es in $K_l''(f)$ eine Zahl Π, für die

$$(\Pi) = \mathfrak{p}; \quad \Pi^{1+S_1+\cdots+S_1^{l^{n_1-u_0}-1}} = \pi; \quad \mathfrak{p}^{l^{n_1-u_0}} = (\pi),$$

wo π im Ring (f) liegt**). Dabei ist $m = -3$, $l = 3$ zunächst ausgeschlossen. Nach Hilfssatz VI, Kapitel II.***), ist aber, wenn $l = 3$, $\sigma = 2$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^3)$ ausgeschlossen wird, π auch im Ring $(\mathfrak{l}^2)$. Also ist $\pi^{l^{u_0}-1}$ schon im Ring $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ oder $\mathfrak{p}^{l^{n_1}-1}$ liegt im Ring $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ gegen Obiges.

Somit ist dieser Fall auszuschließen, und es gibt einen Unterkörper $\overline{K}_l''$, dessen Relativdiskriminante zu l prim ist. Für denselben beweist man ge-

*) Kapitel II. 3, S. 208.

**) Weber: Algebra III. S. 449. S. 439.

***) S. 205.

nau nach α), β) und γ), daß er mit $K_l''(f)$ identisch sein muß. Man hat bloß beiderseits den Kreiskörper $K_l'(f)$, dessen Relativdiskriminante zu l prim ist, zu adjungieren, um den Satz über Geschlechter anwenden zu können.

Ist $l = 3$, $\sigma = 2$, so führt man den Beweis gleich; nur ist $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{p}^{1-s}$ und Π durch Π^{1-s} zu ersetzen. $\mathfrak{p}^{1-s}$ hat aber in bezug auf die Primzahl 3 die gleichen Eigenschaften wie $\mathfrak{p}$; also ergibt die Anwendung der 1. Ergänzung von Hilfssatz VI.*) den Beweis wie vorhin.

Ist schließlich $l = 3$, $m = -3$, so ist $K_3''(1) = K_3''(3)$. Wir nehmen f immer einmal durch 3 teilbar an und setzen $f = 3 l_1 l_2 \cdots l_r$. Die Klassenzahl der Körper $k = (\sqrt{-3})$ ist Eins. Man kann deshalb die Klassengruppe des Ringes (f) durch

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_r^{x_r} \quad (0 \leqq x_i < 3^{u_i},\ i = 1, 2, \cdots, r)$$

gegeben denken, wo S_i der Primzahl l_i zugeordnet und 3^{u_i} die größte in $\left(l_i - \left(\frac{-3}{l_i}\right)\right)$ enthaltene Potenz von 3 ist. $(3^{u_0+1} l_1 l_2 \cdots l_r)$ hat dann die Gruppe:

$$S^x S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_r^{x_r} \quad (0 \leqq x < 3^{u_0},\ 0 \leqq x_i < 3^{u_i},\ i = 1, 2, \cdots, r).$$

Diese Gruppen sind holoedrisch isomorph mit den Gruppen von $K_3''(f)$ und $K_3''(3^{u_0} f)$. Wird (3) in $K_3''(f)$ die $2 \cdot 3^{u_0}$te Potenz eines aus lauter verschiedenen Primidealen zusammengesetzten Ideals, so erkennt man sofort aus obigen Gruppen, daß $K_3''(3^{u_0+1} l_1 \cdots l_r)$ einen Unterkörper vom selben Relativgrad zu k wie $K_3''(f)$ haben muß, dessen Relativdiskriminante zu 3 prim ist; denn die Verzweigungsgruppe jedes in 3 enthaltenen Primideals ist zyklisch**). Alles weitere ergibt sich wie früher. Daraus schließt man rückwärts, daß der Satz auch für zu 3 prime f gilt.

b) $l = 2$. $m = -1$ werde zunächst ausgeschlossen. Ist 2^γ die Anzahl der Geschlechter des Ringes (f) von k, so wird die Gruppe der zu 2 gehörigen Klassen des Ringes (f) gegeben durch

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_\gamma^{x_\gamma} \quad (0 \leqq x_i < 2^{u_i},\ i = 1, 2, \cdots, \gamma).$$

Denn jede ambige Klasse enthält auch ein ambiges Ideal***). Also ist die Anzahl der unabhängigen Basissubstitutionen γ. Betrachtet man bei ungeraden f die quadratischen Unterkörper†), so sieht man, daß dieselben eine zu 2 prime Relativdiskriminante bezüglich k haben, da††) stets:

*) S. 207. **) S. 208, Kapitel II, 3. Satz.

***) Vgl. hierzu Zahlbericht, S. 302 u. ff., insbesondere den Satz 107, S. 305. Außerdem Dirichlet-Dedekind, S. 315 u. ff.

†) S. 183, Kapitel I, Beweis zu 1.

††) Siehe Fueter: Der Klassenkörper der quadratischen Körper etc. Diss. Göttingen 1903, S. 7 u. ff.

$$(-1)^{\frac{l-1}{2}} l \equiv 1(4);$$

dasselbe gilt auch im Fall $m \equiv 1(4)$, $\sigma = 1$, wenn f nur einfach durch 2 teilbar ist. Wir unterscheiden:

α) $m \equiv 1(4)$, $\sigma = 1$; es sei $f = 2l_1 l_2 \cdots l_r$ einmal durch 2 teilbar. Dies ist keine Beschränkung, da $K_2''(l_1 l_2 \cdots l_r) = K_2''(2l_1 l_2 \cdots l_r)$. Gehen wir zum Ring $(2^{u_0+\tau}f)$, wo $u_0 + \tau \geq 2$, so wird, da sich die Anzahl der ambigen Klassen vervierfacht*), die Klassengruppe gegeben sein durch

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_\gamma^{x_\gamma} S_{\gamma+1}^{x_{\gamma+1}} S_{\gamma+2}^{x_{\gamma+2}} \quad (0 \leq x_i < 2^{n_i},\ i = 1, 2, \cdots, \gamma, \gamma+1, \gamma+2).$$

Den neuen Substitutionen $S_{\gamma+1}$, $S_{\gamma+2}$ entsprechen aber die quadratischen Unterkörper $\sqrt{-1}$, $\sqrt{2}$**), die einen Körper ergeben, in dem 2 die 4. Potenz eines Ideals wird. Ferner ist $n_{\gamma+1} + n_{\gamma+2} = u_0 + \tau$ und $n_{\gamma+1}$ oder $n_{\gamma+2}$ gleich Eins***).

Wird nun (2) in $K_2''(f)$ die $n_0^{te} = 2^{u_0 te}$ Potenz eines aus lauter verschiedenen Primidealen zusammengesetzten Ideals, so setze man $\tau = 1$, wenn die Verzweigungsgruppe zyklisch, sonst $\tau = 0$. Im letzteren Fall sieht man dann ohne weiteres nach dem Satz Kapitel II. 4.***) wegen $n_{\gamma+1} + n_{\gamma+2} = u_0$, daß $K_2''(2^{u_0}f)$ einen Unterkörper $\overline{K}_2''$ vom selben Relativgrad zu k besitzt wie $K_2''(f)$, dessen Relativdiskriminante zu 2 prim ist. Ebenso im Fall $\tau = 1$.

β) $m \not\equiv 1(4)$, $\sigma = 2$; ist dann f ungerade und wird (2) die $2 \cdot 2^{u_0 te}$ Potenz eines aus lauter verschiedenen Primidealen zusammengesetzten Ideals, so ist $K_2''(2^{u_0}f)$ relativ-zyklisch zu $K_2''(f)$ vom Relativgrade 2^{u_0}. Die relative Verzweigungsgruppe der in 2 enthaltenen Primideale ist jetzt zyklisch***). Die Anzahl der ambigen Klassen des Ringes $(2^{u_0}f)$ ist doppelt so groß wie diejenige von (f). Die Gruppe von $K_2''(2^{u_0}f)$ ist also

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_\gamma^{x_\gamma} S_{\gamma+1}^{x_{\gamma+1}}.$$

Algebraisch entspricht der Substitution $S_{\gamma+1}$ der quadratische Unterkörper†) $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{-2}$, dessen Relativdiskriminante zu k 2 sicher enthält. Die Existenz des Unterkörpers $\overline{K}_2''$ folgt dann gleich wie unter α).

γ) $m = -1$, $\sigma = 2$. Dieser Fall erledigt sich gleich wie β); nur ist f zunächst als einmal durch 2 teilbar anzunehmen (es ist $K_2''(2) = K_2''(1)$). Damit ist in jedem Fall die Existenz eines Unterkörpers $\overline{K}_2''$ bewiesen, der den gleichen Relativgrad zu k hat wie $K_2''(f)$ und dessen Relativdiskriminante zu 2 prim ist. Daß die beiden Körper identisch sein müssen folgt wie im früheren Fall 2b).

---

*) Dirichlet-Dedekind: Vorlesungen, S. 316. **) S. 183 und 184, Kapitel I.
***) S. 213, Kapitel II, 4. †) S. 183 und 184, Kapitel I.

Der Satz ist damit in jedem Fall bewiesen. Denn nur im Fall $m \equiv 1 (8)$ ist die Klassenanzahl von (f) und $(2f)$ bei ungeradem f gleich. Sonst ist sie das dreifache ($m \equiv 5$), resp. zweifache ($m \not\equiv 1 (4)$).

4. Aus dem Hauptsatz erkennt man das Resultat:

Satz: *Der dem Körper $K_l(f)$ zugeordnete Strahl von k hat einen Führer $\bar{f}$, der ein Teiler des Führers f ist. Dabei ist nur im Fall $m = -1$, $l = 2$ f durch 2, im Fall $m = -3$, $l = 3$ f durch 3 teilbar angenommen.*

Kapitel V.

Die Vollständigkeit.

1. Es sei K ein beliebiger in k relativ-Abelscher Körper vom Relativgrade N. Von diesem setzen wir voraus, daß er *absolut Galoissch* sei. Wir erreichen dies immer durch Adjunktion der konjugierten Körper, da dieselben auch relativ-Abelsch sind. Wir bestimmen denjenigen Unterkörper K_l von K, der zur Primzahl l gehört, d. h. dessen Grad die größte in N enthaltene Potenz l^u ist. K_l wird dann ebenfalls *absolut Galoissch* und zu k *relativ-Abelsch* sein. Die Relativgruppe sei

$$S = S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_r^{x_r} \quad (0 \leqq x_i < l^{u_i},\ i = 1, 2, \cdots, r),$$

wo also $S_i S_k = S_k S_i$ und $l^u = l^{u_1 + u_2 + \cdots + u_r}$. $s = (\sqrt{m} : -\sqrt{m})$ sei die Substitution von k.

2. $l \neq 2$. Da der Körper K_l absolut Galoissch ist, ist seine Galoissche Gruppe durch

$$s^x S_1^{x_1} \cdots S_r^{x_r} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqq x < 2 & \\ 0 \leqq x_i < l^{u_i}, & i = 1, 2, \cdots, r \end{pmatrix}$$

gegeben. Es muß also für jedes $i = 1, 2, \cdots, r$:

$$s S_i = S s, \quad S_i s = s S$$

sein, wo S sich wieder in der Form $S_1^{x_1} \cdots S_r^{x_r}$ darstellen läßt. Es sei

$$S = S_i^{v_i} S',$$

wo S' nur von S_h $(h \neq i, = 1, 2, \cdots, r)$ abhängt. Setzt man

$$S_0 = S_i S \quad = S_i^{v_i + 1} S',$$

$$S_{00} = S_i S^{-1} = S_i^{v_i - 1} S',$$

so ist, weil $s S^u = S_i^u s$, für jedes u:

$$s S_0 = s S_i S \quad = S s S \quad = S S_i s \quad = S_0 s \quad,$$

$$s S_{00} = s S_i S^{-1} = S s S^{-1} = S S_i^{-1} s = S_{00}^{-1} s.$$

Da l ungerade ist, so ist v_i+1 oder v_i-1 zu l prim. Jenachdem nehme man S_0 oder S_{00} und setze es gleich S_i'. Dann ist $sS_i' = S_i'^{\pm 1}s$. Nun gehört aber S_i' zum selben Exponenten wie S_i, und da S_i in S_i' zu einem Exponenten, der nicht durch l teilbar ist, auftritt, so darf man S_i als Basis sukzessive $(i=1,2,\cdots,r)$ durch S_i' ersetzen. Man erhält so die Relativgruppe

$$S_1'^{x_1} S_2'^{x_2} \cdots S_r'^{x_r} \qquad (0 \leqq x_i < l^{u_i},\ i=1,2,\cdots,r),$$

und diese Gruppe ist identisch mit der vorigen. Wir dürfen deshalb von vornherein voraussetzen, daß die Relativgruppe von K_l gegeben sei durch

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_r^{x_r} \qquad (0 \leqq x_i < l^{u_i},\ i=1,2,\cdots,r),$$

wo

$$sS_i = S_i^{\pm 1}s \qquad (i=1,2,\cdots,r).$$

K_l hat dann alle Eigenschaften, die in Kapitel II. 6.*) vorausgesetzt sind. Man kann also K_l einen Strahl (f) von k eindeutig zuordnen. Dabei ist f im Fall $m=-3$, $l=3$ durch 3, im Fall $m=-1$, $l=2$ durch 2 teilbar. Wir betrachten den Körper $K_l(f)$**) der singulären Moduln und Kreiskörper und bilden den Oberkörper $\overline{K} = K(K_l, K_l(f))$. Derselbe ist wieder absolut-Galoisch, relativ-Abelsch zu k und die Relativgruppe hat die vorigen Eigenschaften. Also wird auch $\overline{K}$ ein Strahl in k zugeordnet sein. Der Führer ist das kleinste gemeinsame Vielfache der den Körpern $K_l(f)$ und K_l zugeordneten Führer***). Nach dem Schluß von Kapitel IV.†) ist aber der dem Körper $K_l(f)$ zugeordnete Führer ein Teiler von f. Also ist f selbst der Führer von $\overline{K}$.

Es sei nun $N=l^u$ der Relativgrad von $\overline{K}$ zu k, und $l^\varkappa$ die zu l gehörige Klassenzahl des Strahls (f). Die Anzahl der in $\overline{K}$ existierenden Geschlechter ist $l^{\varkappa-u}$††). Nun muß wenigstens ein Geschlecht existieren. Denn es gibt in jedem Körper unendlich viele Primideale 1. Grades $\mathfrak{P}_i$, $(i=1,2,\cdots)$, für die

$$\liminf_{s=1} \frac{1}{N(\mathfrak{P}_i)^s}$$

nicht existiert, da sonst die Klassenzahl von $\overline{K}$ Null wäre. Also ist

$$l^{\varkappa-u} \geqq 1,$$

$$\varkappa \geqq u.$$

Andererseits ist der Relativgrad von $K_l(f)$ in bezug auf k gleich $l^\varkappa$; somit ist der Grad l^u von $\overline{K}$ wenigstens gleich dem Grad $l^\varkappa$ von $\overline{K}_l(f)$, oder

$$l^u \geqq l^\varkappa; \quad u \geqq \varkappa.$$

---

*) S. 217. **) S. 186, Kapitel I. 7.
***) S. 218, Hauptsatz, Kapitel II. 7. †) S. 246.
††) S. 237, Kapitel III. 8., Hauptsatz.

Daraus folgt $u = z$, oder *der Körper K_l muß in dem Körper $K_l(f)$ enthalten sein.* Zugleich ist hiermit das Mittel gegeben, um denjenigen Körper der singulären Moduln zu bestimmen, in dem ein vorgelegter Körper K_l enthalten ist.

Satz: *Jeder Körper K_l ist in einem Körper der singulären Moduln und der Kreiskörper enthalten.*

3. $l = 2$. Wenn sich die Relativgruppe des Körpers K_2 auf eine Gruppe

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_r^{x_r} \quad (0 \leqq x_i < 2^{u_i},\ i = 1, 2, \cdots, r),$$

wo $sS_i = S_i^{\pm 1} s$ ist, zurückführen läßt, so ist der Beweis wörtlich derselbe wie unter 2., falls der dem Körper K_2 zugeordnete Führer (1) oder eine ungerade Primzahl (l_1) ist. Denn in diesem Falle stimmen die beiden Strahlklassenzahlen*) miteinander überein. Satz 8., Kapitel III.**) darf dann angewandt werden. Gehen aber mehrere Primzahlen oder zwei in f auf, so zerlegt man $K_2(f)$ in seinen absolut-Abelschen und relativ-Abelschen Teil $K_2'(f)$ und $K_2''(f)$; ebenso K_2 in K_2' und K_2'', was wegen der Annahme über die Relativgruppe möglich ist. Wäre nun z. B. $K(K_2'', K_2''(f))$ von höherem Grade als $K_2''(f)$, so müßte die Relativdiskriminante von $K(K_2'', K_2''(f))$ in bezug auf $K''(f)$ wenigstens zwei ungerade Primzahlen l_1, l_2 oder $l = 2$ enthalten. Denn sonst hätte dieser Körper einen Unterkörper, dem der Führer (1) oder (l_1) zugeordnet wäre und dessen Relativgrad zu k von höherem Relativgrad als $K_2''(1)$ resp. $K_2''(l_1)$ wäre gegen obiges. Würde nun l_1 in $K_2''(f)$ die n_1^{te} Potenz, in $K(K_2''(f), K_2'')$ die $2n_1^{\text{te}}$ Potenz von einem Ideal, so müßte nach Satz 1 Kapitel II. $(l_1 + 2)$***)

$$l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right) \equiv 0 (2n_1).$$

Dies ist unmöglich, da n_1 schon die größte in $l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right)$ enthaltene Potenz von 2 ist†). Ist aber 2 in f enthalten, so ist für $\sigma = 1$ die Verzweigungsgruppe von (2) nicht zyklisch. Wäre also 2 in der Relativdiskriminante von $K(K_2''(f), K_2'')$ zu $K_2''(f)$ enthalten, so müßte die Verzweigungsgruppe der in 2 enthaltenen Primideale für $\sigma = 1$ drei voneinander unabhängige, im Falle $\sigma = 2$ zwei voneinander unabhängige Grundsubstitutionen haben, was nach Satz 4., Kapitel II. S. 213 unmöglich ist. Damit ist bewiesen, daß K_2'' in $K_2''(f)$ und ebenso K_2' in $K_2'(f)$ enthalten ist.

*) Siehe Kapitel III. 1. S. 220.

**) S. 61. Ausgenommen ist $f \leqq 2$, $m = -1$. Doch ist hier die Klassenzahl $h = 1$.

***) S. 188. Für $m = -1$ ist l_2 die $2n_2^{\text{te}}$ Potenz eines Ideals und

$$\left(l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right)\right)\left(l_2 - \left(\frac{d}{l_2}\right)\right) \equiv 0\ (4n_1 n_2),$$

was unmöglich.

†) S. 182, Kapitel I. 4. Eigenschaft 1.

Wenn jedoch die Relativgruppe von K_2 *nicht* die obige Eigenschaft hat, so kann man dieselbe im allgemeinen *nicht* auf die gewünschte Form wie in 2. bringen. Es ist dann notwendig, Strahlen mit Führern zu betrachten, die nicht rationale Zahlen, sondern irgendwelche Ideale von k sind. Ein Fall, wo sich auch durch Bildung des Galoisschen Körpers die Relativgruppe nicht auf die gewünschte Form bringen läßt, ist z. B. gegeben durch

$$x = x_1 = \sqrt[4]{1+i}; \quad x_2 = i\sqrt[4]{1+i} = ix; \quad x_3 = -\sqrt[4]{1+i} = -x;$$
$$x_4 = -i\sqrt[4]{1+i} = -ix; \quad S_1 = (x : ix); \quad i = \sqrt{-1}.$$

Trotzdem läßt sich x als Unterkörper aus $K(f)$ erhalten. Denn ist

$$\zeta = \sqrt[4]{\frac{1-i}{\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{-2}}}$$

eine 32. Einheitswurzel, und $y = \sqrt[8]{-2}$, so ist:

$$x = \sqrt[4]{1+i} = \zeta y.$$

y ist aber in einem Körper der singulären Moduln enthalten. Denn $K(y)$ ist relativ-zyklisch vom 8. Relativgrad zu $k(\sqrt{-1})$:

$$\begin{aligned}
y &= y_1 = \sqrt[8]{-2}, & S^4 y &= y_5 = -y,\\
S\,y &= y_2 = \frac{i-1}{\sqrt{-2}}\,y = \frac{1-i}{2}\,y^5, & S^5 y &= y_6 = -\frac{1-i}{2}\,y^5,\\
S^2 y &= y_3 = -iy, & S^6 y &= y_7 = +iy,\\
S^3 y &= y_4 = \frac{-1-i}{2}\,y^5, & S^7 y &= y_8 = \frac{1+i}{2}\,y^5,
\end{aligned}$$

wo $S = (y_1 : y_2)$. Außerdem ist $K(y, \sqrt{-1})$ absolut-Galoissch und wegen $sSy = sy_2 = \frac{1+i}{2}\,y^5 = y_8 = S^7 y$ auch

$$sS = S^{-1}s.$$

Nach dem Obigen ist also $y^8 + 2 = 0$ eine Gleichung, die aus den Gleichungen der komplexen Multiplikation erhalten wird.

4. Trotzdem es für obiges Problem nicht notwendig ist, wollen wir der Vollständigkeit halber auch für ungerade Primzahlen l die Theorie der Oberkörper, die zu Idealen in k als Führer gehören, durchführen. Es sei also l *ungerade* und l_1 irgendeine Primzahl $\neq l$, die in k zerfalle, $\left(\frac{d}{l_1}\right) = +1$; l^u sei die höchste in $l_1 - 1$ enthaltene Potenz von l; $(l_1) = \mathfrak{l}_1 s\mathfrak{l}_1$. Die l_1^{ten} Einheitswurzeln haben dann einen zyklischen Unterkörper $K_l'(l_1)$ vom $l^{u\text{ten}}$ Grade, in dem $\mathfrak{l}_1$ und $s\mathfrak{l}_1$ die $l^{u\text{ten}}$ Potenzen eines Ideals werden. T' sei die Substitution der zyklischen Gruppe von $K_l'(l_1)$. Nimmt man den Körper $K_l''(l_1)$ hinzu, so wird in demselben $\mathfrak{l}_1$ und $s\mathfrak{l}_1$ ebenfalls die

$l^{u\text{te}}$ Potenz eines Ideals. T'' sei die Grundsubstitution der Trägheitsgruppe in $K_l''(l_1)$. Es ist dann

$$sT' = T's, \quad sT'' = T''^{-1}s.$$

Bildet man nun $K(K_l'(l_1), K_l''(l_1))$, so ist der Relativgrad dieses Körpers zu k die größte in $(l_1-1)^2h$ enthaltene Potenz von l; dabei ist h die Klassenzahl von k. Da die Trägheitsgruppe jedes in $\mathfrak{l}_1$ enthaltenen Primideals $\mathfrak{L}_1$ von K zyklisch ist*), und zugleich Untergruppe von

$$T'^{x'}\,T''^{x''} \qquad \left(0 \leqq {x' \atop x''} < l^u\right)$$

ist, so sieht man, daß $\mathfrak{l}_1$ durch Adjunktion von $K_l''(l_1)$ zu $K_l'(l_1)$ wohl noch weiter zerfällt, aber nicht mehr in gleiche Faktoren. Nimmt man also z. B. $T'T''$ als Grundsubstitution der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{L}_1$, so ist für jede Zahl Ω von K:

$$\Omega \equiv T'T''\Omega \ (\mathfrak{L}_1);$$

also auch

$$s\Omega \equiv T'T''s\Omega \ (\mathfrak{L}_1) \equiv sT'T''^{-1}\Omega \ (\mathfrak{L}_1)$$

oder für jede Zahl Ω in K:

$$\Omega \equiv T'T''^{-1}\Omega \ (s\mathfrak{L}_1).$$

$T'T''^{-1}$ ist dann die Grundsubstitution der Trägheitsgruppe von $s\mathfrak{L}_1$ und $T'T''$ ist sicher nicht in letzterer. Bildet man also den zu

$$(T'T''^{-1})^x \qquad (0 \leqq x < l^u)$$

gehörigen Unterkörper $\overline{K}_l(\mathfrak{l}_1)$, so wird dessen Relativdiskriminante in bezug auf k zu $s\mathfrak{l}_1$ prim sein**). Andererseits enthält dieselbe aber alle in $\mathfrak{l}_1$ enthaltenen Primideale von K, also $\mathfrak{l}_1$ selbst. Der Relativgrad von $\overline{K}_l(\mathfrak{l}_1)$ in bezug auf k ist außerdem die größte in $(l_1-1)h$ enthaltene Potenz von l. Seine Relativdiskriminante enthält nur das Primideal $\mathfrak{l}_1$.***)

Bildet man umgekehrt den Strahl $(\mathfrak{l}_1)$ in k, d. h. greift man alle Zahlen α von k heraus, für die

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}_1},$$

so ist die Strahlklassenanzahl $\frac{1}{w}(l_1-1)h$, wo w die Anzahl der Einheitswurzeln von k ist. *Diesen Strahl ordnet man* $\overline{K}_l(\mathfrak{l}_1)$ *zu.* Aus obigem geht dann für $l \neq 2$ der Satz hervor:

Zu jedem Primideal $\mathfrak{l}_1$, *das zu* l *prim ist, existiert ein in* k *relativ-Abelscher Körper, dessen Relativdiskriminante nur* $\mathfrak{l}_1$ *enthält und dessen Re-*

*) Zahlbericht, S. 264, Satz 71.
**) Zahlbericht, S. 259, Satz 76.
***) S. 239, Hauptsatz, Kapitel IV.

lativgrad gleich der größten in der Klassenanzahl des Strahls $(\mathfrak{l}_1)$ *enthaltenen Potenz von* l *ist.*

Im Falle $k(\sqrt{-3})$ hat man den Führer $\mathfrak{l}_1$ durch $3\mathfrak{l}_1$ zu ersetzen.

Ist $\left(\frac{d}{l}\right) = +1$, so macht man dieselbe Überlegung für $K_l'(l^\nu)$ und $K_l''(l^\nu)$, wo ν irgendeine Zahl > 1 ist. Da nun $(l) = \mathfrak{l}s\mathfrak{l}$, so wird für jedes in $\mathfrak{l}$ enthaltene Primideal $\mathfrak{L}$ die Verzweigungsgruppe in $K_l(K_l''(l^\nu), K_l''(l^\nu))$ zyklisch sein müssen mit einer Grundsubstitution $T'T''$, wo

$$sT' = T's; \quad sT'' = T''^{-1}s.$$

Man beweist dies genau nach der Methode, mit der Satz 3 in Kapitel II bewiesen wurde*). $T'T''^{-1}$ ist dann wieder die Grundsubstitution der Verzweigungsgruppe von $s\mathfrak{L}$, und der zu

$$(T'T''^{-1})^x \qquad (0 \leqq x < l^{\nu-1})$$

gehörige Körper $\overline{K}_l(\mathfrak{l}^\nu)$ hat folgende Eigenschaften:

a) Er ist relativ-Abelsch zu k;

b) sein Relativgrad ist die größte in $\frac{1}{w} l^{\nu-1}(l-1)h$ enthaltene Potenz von l;

c) seine Relativdiskriminante enthält nur $\mathfrak{l}$;

d) $\mathfrak{l}$ wird in ihm die $l^{\nu-1\text{te}}$ Potenz eines Ideals, nicht aber die $l^{\nu\text{te}}$.

Andererseits hat der Strahl $(\mathfrak{l}^\nu)$ in k die Klassenanzahl $\frac{1}{w} l^{\nu-1}(l-1)h$. Also:

Zu jedem Strahl $(\mathfrak{l}^\nu)$ *in* k *existiert ein relativ-Abelscher Körper* $\overline{K}_l(\mathfrak{l}^\nu)$, *dessen Relativdiskriminante nur* $\mathfrak{l}$ *enthält, in dem* $\mathfrak{l}$ *die* $l^{\nu-1\text{te}}$ *Potenz eines Ideals wird und dessen Relativgrad gleich der zu* l *gehörigen Klassenzahl des Strahls* $(\mathfrak{l}^\nu)$ *in* k *ist.*

Durch Zusammensetzen der Körper $\overline{K}_l(\mathfrak{l}_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ und $\overline{K}_l(\mathfrak{l}^\nu)$ erhält man einen Körper $\overline{K}_l(\mathfrak{f})$, wo $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^\nu \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \cdots \mathfrak{l}_r$ ist, der in bezug auf den Strahl $(\mathfrak{f})$ von k dieselben Beziehungen hat wie oben. Nur im Fall $m = -3$, $l = 3$ ist eine einfache ergänzende Betrachtung hinzuzufügen. Schließlich kann man in $\mathfrak{f}$ einen beliebigen rationalen Idealfaktor (f) als Faktor hinzufügen, wenn man dementsprechend den Körper $K_l(f)$ von früher zu $\overline{K}_l(\mathfrak{f})$ adjungiert. Man erhält den

Satz: *Zu jedem Strahl* $(\mathfrak{f})$ *in* k, *wo* $\mathfrak{f}$ *ein beliebiges Ideal von* k *ist, existiert ein zu* k *relativ-Abelscher Körper, dessen Relativdiskriminante nur die Primideale von* $\mathfrak{f}$ *enthält, und dessen Relativgrad gleich der zu* $l \neq 2$ *gehörigen Klassenzahl des Strahles* $(\mathfrak{f})$ *ist. Dabei heißen zwei Ideale in* $(\mathfrak{f})$ *äquivalent, wenn ihr Quotient zu einer Zahl gemacht werden kann, die* (mod $\mathfrak{f}$) *der Einheit kongruent ist.*

---

*) S. 208.

5. Ist dagegen $l = 2$, so kann man den eben aufgestellten Satz nicht beweisen unter Zuhilfenahme der in Kapitel IV betrachteten Körper. Es ist dann notwendig, in höhere Körper, die *Teilungskörper* von Weber*), zu gehen. Dies wollen wir zunächst an einem Beispiel zeigen. Es sei $k(\sqrt{-1}) = k(i)$ der zugrunde gelegte Körper. Bilden wir $K(10)$. Dieser Körper setzt sich aus den 5. Einheitswurzeln, die durch $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ gegeben sind und $\sqrt[8]{2}\; f_1(\sqrt{-100})$**) zusammen. Letztere Größe ist

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(1+\sqrt[4]{5}).$$

Also wird $K(10)$ gebildet durch $K\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt[4]{5}\right)$, was ein Körper 8. Grades ist. In demselben wird jedes der beiden in (5) enthaltenen Primideale $(1+2i)$ und $(1-2i)$ von k die 4. nicht aber 8. Potenz eines Ideals***). Ist S_1 die Substitution des Körpers der 5. Einheitswurzeln, S_2 die Substitution des Körpers von $(\sqrt[4]{5})$, so ist

$$S_1 S_2 = S_2 S_1, \quad sS_1 = S_1 s, \quad sS_2 = S_2^{-1} s, \quad S_1^4 = 1, \quad S_2^4 = 1,$$

und es kann die Substitution S_1 so gewählt werden, daß die Trägheitsgruppe der in $(1+2i)$ enthaltenen Primideale durch $(S_1 S_2)^x$ $(0 \leqq x < 4)$, der in $(1-2i)$ enthaltenen Primideale durch $(S_1 S_2^{-1})^x$ $(0 \leqq x < 4)$ gegeben ist. Daraus erkennt man sofort, *daß* $K(10)$ *keinen Unterkörper enthält, dessen Relativdiskriminante zu* $(1-2i)$ *prim ist, und in dem* $(1+2i)$ *die 4. Potenz eines Ideals wird.* Denn im Trägheitskörper von $(1-2i)$ würde $(1+2i)$ nur das Quadrat eines Ideals, da er bloß vom 2. Relativgrad ist. Derselbe ist nämlich $\sqrt{1+2i}$.

Geht man in einen beliebigen Körper $K_2(f)$, wo f ein Vielfaches von 10 ist, so wird auch dieser Körper keinen solchen Unterkörper enthalten. Denn derselbe ist Oberkörper von $K(10)$†) und die Relativdiskriminante muß zu 5 prim sein††). Er setzt sich zudem aus Körpern $K_2(2^\nu)$, $K_2(2l_i)$ zusammen, deren Relativdiskriminanten für $l_i \neq 5$ zu 5 prim sind nach dem Hauptsatz Kapitel IV.††) Somit:

Es gibt keinen Körper $K_2(f)$ *in bezug auf* $k(i)$, *der einen Unterkörper besitzt, dessen Relativdiskriminante zu* $(1-2i)$ *prim ist, und in dem* $(1+2i)$ *die* 4. *Potenz eines Ideals wird.* Ein solcher Körper ist aber

$$z = \sqrt[4]{1+2i},$$

*) Weber: Algebra III (1908), S. 563 u. ff.

**) Tabelle Weber: Algebra III, S. 724.

***) Denn die Trägheitsgruppe ist zyklisch.

†) Weber: Algebra III, S. 451. ††) S. 239.

der relativ-zyklisch zu $k(i)$ ist. Derselbe ist der Körper $K(2(1+i)(1+2i))$, d. h. der zum Strahl $(2(1+i)(1+2i))$ gehörige Oberkörper. Die Klassenzahl des Strahls ist $\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 2^2 \cdot [(1+2i)(1-2i)-1] = 4$.

Nehmen wir aber einen beliebigen Oberkörper $K_2^{(m)}(f)$ in bezug auf $k(\sqrt{m})$, so muß, damit (5) die 4. Potenz eines Ideals in demselben wird, m zu 5 prim sein. Denn sonst ist $K_2^{(m)}(5)$ der Oberkörper $(\sqrt{5})$ von $K_2^{(m)}(1)$. Ist dagegen m zu 5 prim, so kann (5) die 4. Potenz eines Ideals werden. Da von allen Kreiskörpern nur die 5. Einheitswurzeln und deren Oberkörper die Eigenschaft haben, daß in ihnen (5) die 4. Potenz eines Ideals wird, so genügt es, in $K_2^{(m)}(f)$ nur die nicht absolut-Abelschen Bestandteile zu betrachten. Könnte man aus $K(10)$ und solchen Körpern einen Oberkörper bilden, der $K(z)$ enthielte, so müßte in jedem m wenigstens eine Primzahl l_1 aufgehen, die das Quadrat eines Ideals ist. Ist l_1 ungerade, so wird aber (l_1) in $K(z)$ *nicht* das Quadrat eines Ideals. Also müßte z auch in dem zu $s = (\sqrt{m} : -\sqrt{m})$ und zu der aus s gebildeten invarianten Untergruppe gehörigen Unterkörper enthalten sein. Nun enthält aber diese invariante Untergruppe, da

$$S^{-1} s S = s S^2,$$

auch die Substitution S^2, oder der zugehörige Unterkörper würde aus z und aus lauter Quadratwurzeln $\sqrt{m_i}$ bestehen. In einem solchen Körper würde aber 5 niemals die 4. Potenz eines Ideals. Ist $l_1 = 2$, so wären die Oberkörper von $k(\sqrt{-2})$ zu betrachten. In denselben wird aber wegen $\left(\frac{-2}{5}\right) = -1$ (5) höchstens das Quadrat eines Ideals, nicht die 4. Potenz. Somit erkennt man den

Satz: *Der zu $k(i)$ relativ-Abelsche Körper $\sqrt[4]{1+2i}$ ist in keinem Körper der singulären Moduln und Kreiskörper enthalten.*

6. Dagegen gilt der

Hauptsatz: *Jede in einem imaginär quadratischen Körper Abelsche Gleichung ist durch Kreiskörper und Teilungskörper der elliptischen Funktionen lösbar.*

Während die singulären Moduln nur den Oberkörper in bezug auf den im Kapitel I, S. 181 ausgesprochenen Äquivalenzbegriff der Strahlen im Grundkörper liefern, ergeben die *Teilungskörper die entsprechenden Oberkörper, die zum engeren Äquivalenzbegriff der Strahlen,* Kapitel III, S. 220, *gehören.* In bezug auf die ungeraden Teiler der Klassenzahlen stimmen beide überein, also auch ihre Oberkörper, nicht aber für die in den Klassenzahlen enthaltene Potenz von 2.

Dieser Satz ist nur für die Oberkörper von einem Relativgrad 2^u zu

beweisen, da derselbe nach 4. für alle Körper ungeraden Relativgrades gilt. Dazu ist genau mit den Mitteln von Kapitel II der folgende, den dortigen Resultaten entsprechende Satz zu beweisen, der sich nun auf einen beliebigen Oberkörper bezieht:

Hilfssatz: *Wenn K ein beliebiger zu k relativ-Abelscher Körper vom Relativgrad 2^u ist, so ist*

1. *für* $l_1 \neq 2$, $\left(\frac{d}{l_1}\right) = +1$, $(l_1) = \mathfrak{l}_1 s \mathfrak{l}_1$:

$$l_1 - 1 \equiv 0 \pmod{2^{\nu_1}},$$

falls 2^{ν_1} *der Grad der Trägheitsgruppe von* $\mathfrak{l}_1$ *ist;*

2. *für* $l_1 \neq 2$, $\left(\frac{d}{l_1}\right) = -1$:

$$l_1^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2^{\nu_1}},$$

falls 2^{ν_1} *der Grad der Trägheitsgruppe von* l_1 *ist;*

3. *für* $l_1 \neq 2$, $\left(\frac{d}{l_1}\right) = 0$: *die Relativdiskriminante zu* l_1 *prim.*

4. *für* $\left(\frac{d}{2}\right) = +1$, $(2) = \mathfrak{l} s \mathfrak{l}$: *die Verzweigungsgruppe von* $\mathfrak{l}$ *von der Form*

$$T^x T'^{x'} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq x < 2 \\ 0 \leqq x' < 2^{\nu'} \end{pmatrix};$$

5. *für* $\left(\frac{d}{2}\right) \neq +1$: *die Verzweigungsgruppe von (2) in der Form*

$$T'^{x'} T'^{x''} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq x' < 2^{\nu'} \\ 0 \leqq x'' < 2^{\nu'} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ist die Theorie von Kapitel III durchzuführen, unter Zugrundelegung des Äquivalenzbegriffes im engeren Sinne. Außerdem kann man jedem relativ-Abelschen Oberkörper K vom Relativgrad 2^u einen Führer $\mathfrak{f}$ zuordnen, der alle zu 2 primen, in der Relativdiskriminante enthaltenen Primideale $\mathfrak{l}_1$ einfach und jedes in 2 und der Relativdiskriminante enthaltene Primideal $\mathfrak{l}$ zur $2+\nu^{\text{ten}}$ Potenz enthält, wenn ν die größere der Zahlen ν' und ν'' vom Hilfssatz ist. Damit ist die Theorie dieser allgemeinen Gleichungen erledigt.

Um die Anwendung dieser Entwicklung auf die Teilungskörper durchzuführen, muß deren Theorie besser bekannt sein, als dies bisher der Fall ist. Man weiß, daß die Teilungskörper in bezug auf den Klassenkörper $K(1)$ relativ-Abelsch sind, aber nicht, ob zu k relativ-Abelsch.*) Dagegen weiß man, daß die Primideale der Hauptstrahlklasse in Primideale 1. Grades im Teilungskörper zerfallen.**) Wenn also die Körperklassenzahl von k eins ist, kann man genau nach Kapitel IV den Satz beweisen:

---

*) Weber: Algebra III (1908), S. 576.

**) ibid. S. 596, Resultat 8.

Satz: *Die Relativdiskriminante des Teilungskörpers, der zum Führer* $\mathfrak{f}$ *gehört, enthält nur die Primideale von* $\mathfrak{f}$.

Damit ist dann auch der obige Hauptsatz genau wie in 2. zu beweisen.

Ist dagegen die Körperklassenzahl von k von eins verschieden, so verlangt die Untersuchung ein Eingehen auf die funktionentheoretische Seite des Problems. Diese Betrachtungen habe ich noch nicht durchgeführt, sie würden auch zu weit abseits führen. Ich werde dieses Problem in einem Teubnerschen Lehrbuche im Zusammenhange darstellen. Doch glaube ich, daß die zahlentheoretische Seite durch meine Entwicklungen ausreichend gefördert ist.

Karlsruhe, 5. Juni 1913.

Inhalt.

Beweis für die Existenz von Integralen einer gewöhnlichen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unstetigkeitsstelle.

Von

Oskar Perron in Tübingen.

Bekanntlich hat die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad (x, y \text{ reell}),$$

wenn die reelle Funktion $F(x, y)$ an einer Stelle x_0, y_0 und in deren Umgebung stetig ist und der Lipschitzschen Bedingung

$$\left|\frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2}\right| < K \qquad (y_1 \neq y_2)$$

genügt, ein und nur ein Integral y, welches für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annimmt. Ich behandle im folgenden den Fall, wo die Funktion $F(x, y)$ an der Stelle x_0, y_0 eine *Unstetigkeit* hat, welche aber durch Multiplikation mit einer stetigen Funktion $\varphi(x)$ von x allein beseitigt werden kann; ich nehme also die Differentialgleichung in der Form

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

an, wo f und φ stetig sind, und $\varphi(x_0) = 0$ ist. Diese Differentialgleichung ist mehrfach behandelt worden für den Fall, daß $\varphi(x) = (x - x_0)^n$ (n = positive ganze Zahl), und $f(x, y)$ an der Stelle x_0, y_0 holomorph ist.*) Beschränkt man aber x, y auf reelle Werte, was ja bei topologischen Untersuchungen der Integral*kurven* allein in Frage kommt, so ist es wünschenswert, das Problem unter geringeren Voraussetzungen zu behandeln. Ich werde von der Funktion $\varphi(x)$ nur verlangen, daß sie stetig ist und für $x \neq x_0$ nicht verschwindet, während $f(x, y)$ ebenfalls stetig sein soll und daneben nur noch einer Bedingung unterworfen wird, die der Lipschitzschen sehr ähnlich ist und nicht viel mehr verlangt wie diese.

---

*) Siehe z. B. J. Horn: Journal für die reine und angewandte Mathematik, 119, 120. — J. Bendixson: Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 55 (1898), Acta Mathematica, 24.

§ 1.

Wir setzen $x_0 = 0$, was keine Beschränkung bedeutet, und betrachten im übrigen nur positive x, da der Fall negativer x sich darauf durch die Substitution $x = -x'$ zurückführen läßt. Die Differentialgleichung sei also

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} = f(x, y); \tag{1}$$

dabei sei $\varphi(x)$ stetig für $0 \leqq x \leqq a$; ferner

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq a.$$

Hiernach hat $\varphi(x)$ konstantes Vorzeichen, und wir dürfen, indem wir nötigenfalls die Gleichung (1) mit -1 multiplizieren,

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq a$$

voraussetzen. Die Funktion $f(x, y)$ sei zunächst in dem Gebiet

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |y - y_0| \leqq b$$

nur reell und stetig angenommen.

Trivial ist der Fall, wo das Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\varphi(x)} \tag{2}$$

existiert, d. h. endlich ist. Man hat dann nur nötig, eine neue unabhängige Variable t vermittels der Substitution

$$\int_0^x \frac{dx}{\varphi(x)} = t$$

einzuführen. Dann ist nämlich t eine beständig wachsende Funktion von x, also auch umgekehrt x eine beständig wachsende Funktion von t:

$$x = \psi(t),$$

und die Differentialgleichung geht über in die folgende:

$$\frac{dy}{dt} = f(\psi(t), y).$$

Daraus erkennt man beispielsweise auf Grund des in der Einleitung erwähnten Satzes, daß, wenn nur $f(x, y)$ der Lipschitzschen Bedingung genügt, dann ein und nur ein Integral existiert, welches für $t = 0$, d. h $x = 0$, dem Wert $y = y_0$ zustrebt.

§ 2.

Wir wenden uns jetzt zu dem interessanteren Fall, daß das Integral (2) nicht existiert. Wenn dann $f(0, y_0) \neq 0$ ist, so sieht man leicht, daß die Differentialgleichung (1) kein Integral hat, welches für $x = 0$ dem Wert $y = y_0$ zustrebt. Denn für ein solches würde aus (1) folgen:

$$y - y_0 = \lim_{\varepsilon = +0} \int_\varepsilon^x \frac{f(x, y)}{\varphi(x)} \, dx,$$

während doch dieser Grenzwert nach unseren Annahmen nicht endlich sein kann.

Die Integralkurven können also nur an solchen Stellen y_0 die Y-Achse erreichen, wo $f(0, y_0) = 0$ ist. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß etwa $y_0 = 0$ eine solche Stelle sei; also $f(0, 0) = 0$. Weiter soll von der Funktion $f(x, y)$ vorausgesetzt werden, daß es zwei positive Zahlen k, K gibt, für welche

$$k < \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| < K \qquad (y_1 \neq y_2)$$

ist, so lange x, y_1, y_2 im Gebiet

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |y_1| \leqq b, \quad |y_2| \leqq b$$

bleiben. Diese Voraussetzung ist z. B. stets dann erfüllt, wenn $f(x, y)$ eine *stetige von Null verschiedene* partielle Ableitung nach y besitzt.

Aus unserer Voraussetzung folgt leicht, daß der Quotient

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

konstantes Vorzeichen hat. Je nachdem dieses nun das positive oder das negative ist, wird sich die Untersuchung verschieden gestalten und auch zu verschiedenen Resultaten führen, die wir zunächst in folgender Weise formulieren wollen.

Theorem I. *Die Funktion $\varphi(x)$ sei für $0 \leqq x \leqq a$ stetig, und es sei*

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) > 0 \text{ für } 0 < x \leqq a,$$

$$\lim_{\varepsilon = +0} \int_\varepsilon^x \frac{dx}{\varphi(x)} = \infty.$$

Die Funktion $f(x, y)$ verschwinde für $x = 0$, $y = 0$ und sei für $0 \leqq x \leqq a$, $|y| \leqq b$ reell und stetig, ferner sei in diesem Gebiet

$$0 < k < \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| < K \qquad (y_1 \neq y_2),$$

sodaß der Quotient $\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}$ *konstantes Vorzeichen hat. Wenn dann dieses Vorzeichen das negative ist, so hat die Differentialgleichung*

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ein und nur ein Integral, welches für $\lim x = +0$ *dem Wert* $y = 0$ *zustrebt.*

Wenn das Vorzeichen aber das positive ist, so gibt es unendlich viele Integrale mit dieser Eigenschaft. Man kann dann nämlich zwei positive Zahlen a', b' *angeben derart, daß für jedes dem Gebiet* $0 < x_0 \leqq a'$, $|y_0| \leqq b'$ *angehörige Wertesystem* x_0, y_0 *ein und nur ein Integral existiert, welches für* $x = x_0$ *den Wert* $y = y_0$ *annimmt und außerdem für* $\lim x = +0$ *dem Wert* $y = 0$ *zustrebt.*

Wir haben absichtlich nicht gesagt, daß die der Differentialgleichung genügende Funktion y für $x = 0$ den Wert $y = 0$ annimmt; denn tatsächlich können wir nur behaupten, daß y für $x > 0$ der Differentialgleichung genügt. An der Stelle $x = 0$ selbst ist, nachdem wir der Funktion y daselbst ihren Grenzwert 0 als Funktionswert beigelegt haben, bei unseren allgemeinen Annahmen ein bestimmter endlicher (vorderer) Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ unter Umständen gar nicht vorhanden.*)

*) Man betrachte z. B. die Differentialgleichung

$$xy' = f(x) - y,$$

wo $f(x)$ für $0 \leq x \leq a$ stetig sein und für $x = 0$ verschwinden soll. Hier sind alle Bedingungen unseres Theorems erfüllt, und zwar für das *negative* Vorzeichen. Es gibt also *nur ein* Integral der fraglichen Art, und das ist offenbar das folgende:

$$y = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx.$$

Nachdem man noch dem obigen zufolge $y(0) = 0$ festgesetzt hat, können nun je nach der Beschaffenheit von $f(x)$ die folgenden drei Fälle wirklich eintreten.

1. y hat am Nullpunkt eine bestimmte endliche vordere Derivierte; Beispiel: $f(x) = x$.

2. y hat am Nullpunkt die vordere Derivierte $+\infty$ (bzw. auch $-\infty$); Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ (bzw. $f(x) = -\sqrt{x}$).

3. y hat am Nullpunkt überhaupt keine bestimmte vordere Derivierte; Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Bei dem letzten Beispiel achte man darauf, daß $f(x)$ am Nullpunkt wirklich stetig bleibt.

§ 3.

Wir behandeln zuerst den Fall des negativen Vorzeichens; also

$$-k > \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} > -K \qquad (y_1 \neq y_2)$$

für $0 \leqq x \leqq a$, $|y_1| \leqq b$, $|y_2| \leqq b$. Daraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{K+k}{2} = \alpha, \quad \frac{K-k}{K+k} = \vartheta$$

gesetzt wird,

$$(3) \qquad |f(x, y_1) - f(x, y_2) + \alpha(y_1 - y_2)| \leqq \vartheta\alpha|y_1 - y_2|,$$

was in dieser Form offenbar auch noch für $y_1 = y_2$ gilt. Dabei ist α eine positive Zahl, ϑ ist positiv und kleiner als 1.

Aus den Voraussetzungen des Theorems I folgt weiter die Existenz einer positiven Zahl a' ($\leqq a$) derart, daß für $0 \leqq x \leqq a'$ stets

$$(4) \qquad |f(x, 0)| \leqq b\alpha(1 - \vartheta)$$

ist. Wir beschränken x von jetzt an auf dieses Intervall und setzen

$$(5) \qquad \int_x^{a'} \frac{dz}{\varphi(z)} = \psi(x), \quad \text{also} \quad \psi'(x) = -\frac{1}{\varphi(x)} \qquad (0 < x \leqq a').$$

Nach unseren Voraussetzungen ist dann

$$(6) \qquad \psi(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < a',$$

$$(7) \qquad \lim_{x=+0} \psi(x) = \infty,$$

und die Differentialgleichung (1) ist gleichbedeutend mit der folgenden:

$$(8) \qquad \frac{d}{dx}(ye^{-\alpha\psi(x)}) = \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y) + \alpha y],$$

wo α die in (3) eingeführte positive Zahl sein soll. Hieraus folgt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, durch Integration von 0 bis x:

$$(9) \qquad y = e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y) + \alpha y]\,dx,$$

und umgekehrt folgt aus (9) auch wieder (8), also auch (1). Die für $x = 0$ verschwindenden Lösungen*) von (1) sind daher identisch mit den für $x = 0$ verschwindenden Lösungen*) von (9).

*) Genauer sollte es heißen; „Die für $\lim x = +0$ gegen Null strebenden Lösungen" (siehe Schluß von § 2; auch hat die rechte Seite von (9) für $x = 0$ keinen Sinn ($\infty \cdot 0$)). Indes wollen wir hier und später die kürzere Ausdrucksweise anwenden, die ja zu Fehlern doch keinen Anlaß gibt.

Zur Lösung von (9) wenden wir nun sukzessive Näherungen an, indem wir

(10) $$y_1 = 0,$$

(11) $$y_{\nu+1} = \begin{cases} e^{\alpha\psi(x)} \int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) + \alpha y_\nu]\,dx & \text{für} \quad 0 < x \leqq a', \\ 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

setzen ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$). Dann sieht man zunächst, daß die Funktionen y_ν für $0 \leqq x \leqq a'$ wirklich existieren, stetig sind und absolut $\leqq b$ bleiben. Denn für $\nu = 1$ ist das nach (10) evident. Nimmt man aber an, für einen bestimmten Wert von ν sei die Sache erkannt, so hat wegen $|y_\nu| \leqq b$ der Ausdruck $f(x, y_\nu)$ wirklich einen Sinn und ist eine stetige Funktion von x. Das Integral (11) existiert also, und zugleich ist nach (3) und (4)

$$\begin{aligned} |f(x, y_\nu) + \alpha y_\nu| &\leqq |f(x, 0)| + \vartheta\alpha |y_\nu| \\ &\leqq b\alpha(1 - \vartheta) + \vartheta\alpha b = b\alpha. \end{aligned}$$

Daher nach (11) für $0 < x \leqq a'$:

$$|y_{\nu+1}| \leqq e^{\alpha\psi(x)} \int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\, b\alpha\, dx = e^{\alpha\psi(x)} \cdot b e^{-\alpha\psi(x)} = b.$$

Die Stetigkeit von $y_{\nu+1}$ ist für $x > 0$ evident, braucht also nur für die Stelle $x = 0$ bewiesen zu werden. Nun ist nach Definition $y_{\nu+1}(0) = 0$; andererseits folgt aus (11) durch Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned} y_{\nu+1}(x) &= e^{\alpha\psi(x)} [f(x_1, y_\nu(x_1)) + \alpha y_\nu(x_1)] \int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\, dx \\ &= \frac{1}{\alpha} f(x_1, y_\nu(x_1)) + y_\nu(x_1), \end{aligned}$$

wo x_1 ein Mittelwert zwischen 0 und x ist. Mit x wandert auch x_1 gegen Null, also auch $y_\nu(x_1)$, weil für diesen Wert von ν die Stetigkeit schon als bewiesen angenommen wird; man erhält somit:

$$\lim_{x = +0} y_{\nu+1}(x) = 0,$$

womit auch die Stetigkeit von $y_{\nu+1}$ bewiesen ist.

Nunmehr wollen wir zeigen, daß die Funktionen y_ν für $0 \leqq x \leqq a'$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion y konvergieren. In der Tat ist nach (11) für $\nu = 2, 3, 4, \cdots$

$$y_{\nu+1} - y_\nu = e^{\alpha\psi(x)} \int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) - f(x, y_{\nu-1}) + \alpha(y_\nu - y_{\nu-1})]\,dx,$$

also mit Rücksicht auf (3)

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha |y_\nu - y_{\nu-1}| dx.$$

Die stetige Funktion $|y_\nu - y_{\nu-1}|$ hat im Intervall $0 \leqq x \leqq a'$ ein Maximum. Bezeichnet man dieses mit M_ν, so folgt:

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha M_\nu dx = \vartheta M_\nu.$$

Daher auch $M_{\nu+1} \leqq \vartheta M_\nu$, und folglich

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq M_{\nu+1} \leqq \vartheta^{\nu-1} M_2.$$

Daraus ergibt sich die zu beweisende gleichmäßige Konvergenz. Die Grenzfunktion

$$y = \lim_{\nu=\infty} y_\nu$$

ist wegen der Gleichmäßigkeit auch stetig; ferner verschwindet sie für $x = 0$, weil alle y_ν für $x = 0$ verschwinden; schließlich ist auch $|y| \leqq b$, weil alle $|y_\nu| \leqq b$ waren.

Daß die so gefundene Funktion y nun wirklich die Gleichung (9) löst, erkennt man jetzt leicht. Denn wegen der gleichmäßigen Konvergenz läßt sich zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl n angeben derart, daß für $\nu \geqq n$ im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq a'$ stets $|y_\nu - y| < \varepsilon$ ist. Wegen $|y_\nu| \leqq b$, $|y| \leqq b$ folgt dann mit Rücksicht auf (3):

$$\left| e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) - f(x, y) + \alpha(y_\nu - y)] dx \right|$$

$$\leqq e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha |y_\nu - y| dx$$

$$< e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\varepsilon dx = \vartheta\varepsilon.$$

Daher ist

$$\lim_{\nu=\infty} e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) + \alpha y_\nu] dx$$

$$= e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y) + \alpha y] dx.$$

Läßt man also ν in Gleichung (11) über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich gerade die zu beweisende Formel (9).

§ 4.

Wir haben im vorigen Paragraphen eine Lösung y der Gleichung (9) und damit der Gleichung (1) gefunden, welche für $x = 0$ verschwindet. Wir wollen jetzt zeigen, daß die Gleichung (1) keine weitere derartige Lösung hat. Wäre nämlich noch eine vorhanden — sie möge z heißen —, so wäre das auch eine Lösung von (9) und man hätte:

$$y - z = e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y) - f(x, z) + \alpha(y - z)]\, dx.$$

Ist a'' eine hinreichend kleine positive Zahl, so wird für $0 \leqq x \leqq a''$ nicht nur $|y| \leqq b$, sondern auch $|z| \leqq b$ sein. Wir können also die Ungleichung (3) anwenden und erhalten:

$$|y - z| \leqq e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\, |y - z|\, dx.$$

Im Intervall $0 \leqq x \leqq a''$ muß die stetige Funktion $|y - z|$ irgendwo ihren größten Wert M annehmen; das sei etwa der Fall für $x = x_1$. Dann folgt aus der vorigen Ungleichung, wenn speziell $x = x_1$ gesetzt wird,

$$M \leqq e^{\alpha\psi(x_1)} \int_0^{x_1} \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha M\, dx = \vartheta M.$$

Daher ist $M = 0$, also $z = y$. W. z. b. w.

§ 5.

Wir wenden uns jetzt zu dem in Theorem I erwähnten Fall des positiven Vorzeichens. Es ist dann

$$0 < k < \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} < K \qquad (y_1 \neq y_2)$$

für $0 \leqq x \leqq a$, $|y_1| \leqq b$, $|y_2| \leqq b$. Setzt man wieder

$$\frac{K + k}{2} = \alpha, \quad \frac{K - k}{K + k} = \vartheta,$$

so folgt diesmal

$$(12) \qquad |f(x, y_1) - f(x, y_2) - \alpha(y_1 - y_2)| \leqq \vartheta\alpha\, |y_1 - y_2|,$$

was auch für $y_1 = y_2$ noch gilt; dabei ist α wieder positiv, ϑ positiv und kleiner als 1.

Aus den Voraussetzungen des Theorems I resultiert nun weiter die

Existenz von zwei positiven Zahlen $a'(\leqq a)$ und $b'(<b)$ derart, daß für $0 \leqq x \leqq a'$ stets

$$ab' + |f(x, 0)| \leqq b\alpha(1-\vartheta) \tag{13}$$

ist. Alsdann setzen wir wieder

$$\int_x^{a'} \frac{dz}{\varphi(z)} = \psi(x), \quad \text{also} \quad \psi'(x) = -\frac{1}{\varphi(x)} \qquad (0 < x \leqq a'), \tag{14}$$

und es ist wie früher

$$\psi(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < a', \tag{15}$$

$$\lim_{x=+0} \psi(x) = \infty. \tag{16}$$

Die Differentialgleichung (1) ist hiernach gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\frac{d}{dx}(ye^{\alpha\psi(x)}) = \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y) - \alpha y]. \tag{17}$$

Indem wir zwei beliebige Zahlen x_0, y_0 in dem Spielraum

$$0 < x_0 \leqq a', \quad |y_0| \leqq b' \tag{18}$$

wählen, wollen wir die Gleichung (17) in der Weise integrieren, daß für $x = x_0$ der Wert $y = y_0$ herauskommt; so ergibt sich:

$$y = e^{-\alpha\psi(x)}\left\{y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y) - \alpha y]\,dx\right\} \tag{19}$$

und offenbar sind diejenigen Lösungen der Differentialgleichung (1), welche für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annehmen, identisch mit den entsprechenden Lösungen von (19). Das Theorem I wird daher bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß (19) gerade *eine* Lösung hat, die für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ und zugleich für $x = 0$ den Wert $y = 0$ annimmt.

Wir suchen nun (19) wieder durch sukzessive Näherungen zu lösen, indem wir

$$y_1 = \frac{y_0 x}{x_0}, \tag{20}$$

$$y_{\nu+1} = \begin{cases} e^{-\alpha\psi(x)}\left\{y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu]\,dx\right\} & \text{für } 0 < x \leqq x_0, \\ 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \tag{21}$$

setzen ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$). Zunächst zeigen wir, daß diese Funktionen y_ν für $0 \leqq x \leqq x_0$ wirklich existieren, stetig sind und absolut $< b$ bleiben. Nach (18) und (20) ist das wegen $b' < b$ in der Tat für $\nu = 1$ der Fall. Nimmt man aber an, es gelte für einen gewissen Wert von ν, so ist zunächst nach (12) und (13)

$$|f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu| \leqq |f(x, 0)| + \vartheta\alpha |y_\nu|$$
$$< b\alpha(1-\vartheta) - \alpha b' + \vartheta\alpha b;$$

also

$$|f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu| < \alpha(b-b') \qquad (\text{für } 0 \leqq x \leqq x_0). \tag{22}$$

Mit Rücksicht hierauf folgt aus (21) für $0 < x \leqq x_0$:

$$|y_{\nu+1}| \leqq e^{-\alpha\psi(x)} \left\{ |y_0| e^{\alpha\psi(x_0)} + \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \alpha(b-b')\,dx \right\}$$
$$\leqq e^{-\alpha\psi(x)} \{ b' e^{\alpha\psi(x_0)} + (b-b')(e^{\alpha\psi(x)} - e^{\alpha\psi(x_0)}) \}$$
$$< b' + (b-b') = b.$$

Die Stetigkeit von $y_{\nu+1}$ ist für $x > 0$ evident, braucht also nur für $x = 0$ bewiesen zu werden. Nun ist $y_{\nu+1}(0) = 0$; andererseits folgt aus (21):

$$y_{\nu+1} = e^{-\alpha\psi(x)} \left\{ y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \int_x^{x_1} - \int_{x_1}^{x_0} \right\} \qquad (0 < x < x_1 < x_0). \tag{23}$$

Da y_ν bereits als stetig angenommen wird, so ist $\lim\limits_{x=+0} y_\nu = 0$, und man kann nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε die Zahl x_1 so klein wählen, daß für $0 \leqq x \leqq x_1$

$$|f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu| < \varepsilon\alpha$$

ist. Dann folgt

$$\left| \int_x^{x_1} \right| \leqq \int_x^{x_1} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \varepsilon\alpha\,dx = \varepsilon(e^{\alpha\psi(x)} - e^{\alpha\psi(x_1)}) < \varepsilon e^{\alpha\psi(x)}.$$

Außerdem wird unter Berücksichtigung von (22)

$$\left| \int_{x_1}^{x_0} \right| \leqq \int_{x_1}^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \alpha(b-b')\,dx = (b-b')(e^{\alpha\psi(x_1)} - e^{\alpha\psi(x_0)})$$
$$< (b-b') e^{\alpha\psi(x_1)}.$$

Setzt man dies in (23) ein, so kommt:

$$|y_{\nu+1}| < e^{-\alpha\psi(x)} \{ b' e^{\alpha\psi(x_0)} + \varepsilon e^{\alpha\psi(x)} + (b-b') e^{\alpha\psi(x_1)} \}$$
$$< \varepsilon + b e^{\alpha\psi(x_1) - \alpha\psi(x)}.$$

Läßt man hier x gegen Null wandern, so wird wegen (16) schließlich $b e^{\alpha\psi(x_1) - \alpha\psi(x)} < \varepsilon$, also $|y_{\nu+1}| < 2\varepsilon$, womit die Stetigkeit bewiesen ist.

Schließlich bemerken wir, daß die Funktionen y_ν für $x = x_0$ alle den Wert y_0 annehmen; das ergibt sich aus (20) und (21) unmittelbar.

Nunmehr zeigen wir, daß die Funktionen y_ν für $0 \leqq x \leqq x_0$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. In der Tat ist nach (21) für $\nu = 2, 3, 4, \cdots$

$$y_{\nu+1} - y_\nu = -e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) - f(x, y_{\nu-1}) - \alpha(y_\nu - y_{\nu-1})]\, dx.$$

Daher mit Rücksicht auf (12):

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\, |y_\nu - y_{\nu-1}|\, dx.$$

Die stetige Funktion $|y_\nu - y_{\nu-1}|$ hat im Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ ein Maximum M_ν; es ist dann

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha M_\nu\, dx$$

$$= e^{-\alpha\psi(x)} \vartheta M_\nu (e^{\alpha\psi(x)} - e^{\alpha\psi(x_0)}) < \vartheta M_\nu.$$

Daher auch $M_{\nu+1} < \vartheta M_\nu$, und folglich

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq M_{\nu+1} < \vartheta^{\nu-1} M_2.$$

Daraus ergibt sich die zu beweisende gleichmäßige Konvergenz. Die Grenzfunktion

$$y = \lim_{\nu=\infty} y_\nu$$

ist wegen der Gleichmäßigkeit auch stetig; ferner nimmt sie für $x = 0$ bzw. $x = x_0$ die Werte $y = 0$ bzw. $y = y_0$ an, weil alle y_ν dies tun. Schließlich ist auch $|y| \leqq b$ weil alle $|y_\nu| < b$ waren.

Daß die so gefundene Funktion y nun wirklich die Gleichung (19) löst, sieht man jetzt leicht ein. Denn wegen der gleichmäßigen Konvergenz läßt sich zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl n angeben derart, daß für $\nu \geqq n$ im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ stets $|y_\nu - y| < \varepsilon$ ist. Wegen $|y_\nu| < b$, $|y| \leqq b$ folgt dann mit Rücksicht auf (12):

$$\left| e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) - f(x, y) - \alpha(y_\nu - y)]\, dx \right|$$

$$\leqq e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\, |y_\nu - y|\, dx$$

$$\leqq e^{-\alpha\psi(x)} \vartheta\varepsilon (e^{\alpha\psi(x)} - e^{\alpha\psi(x_0)}) < \varepsilon.$$

Daher ist

$$\lim_{\nu=\infty} e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu]\, dx$$

$$= e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y) - \alpha y]\, dx.$$

Läßt man also ν in (21) über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich gerade die zu beweisende Formel (19).

§ 6.

Wir haben im vorigen Paragraphen eine Lösung der Gleichung (1) gefunden, welche für $x = 0$ verschwindet und außerdem für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Wir wollen jetzt zeigen, daß es keine weitere derartige Lösung gibt. Nehmen wir nämlich an, es sei noch eine vorhanden — sie möge z heißen —, so ist das auch eine Lösung von (17); also ist

$$(24) \qquad \frac{d}{dx}\left((y-z)\, e^{\alpha\psi(x)}\right) = \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y) - f(x, z) - \alpha(y-z)].$$

Nun sei x_1 die obere Grenze derjenigen x des Intervalles $(0, x_0)$, für welche $y \neq z$ ist. Offenbar ist $x_1 > 0$, und man hat dann

$$(25) \qquad z(x_1) = y(x_1),$$

während das Maximum M_h, das die stetige Funktion $|z - y|$ im Intervall $(x_1 - h, x_1)$ erreicht, notwendig *größer* als Null ist, wie klein auch die positive Zahl h sei; dieses Maximum werde etwa für $x = x_1 - h_1$ erreicht. Offenbar ist $0 < h_1 \leqq h$, und man hat:

$$(26) \qquad \begin{cases} |z(x) - y(x)| \leqq M_h \quad (\text{für } x_1 - h \leqq x \leqq x_1), \\ |z(x_1 - h_1) - y(x_1 - h_1)| = M_h > 0. \end{cases}$$

Nun haben wir $|y| \leqq b$ gefunden; wir werden am Schluß dieses Paragraphen zeigen, daß hierbei Gleichheit ausgeschlossen ist. Nehmen wir dies einstweilen als bewiesen an, so ist auch $|z(x_1)| = |y(x_1)| < b$. Man kann daher h so klein wählen, daß $|y|$ und $|z|$ im Intervall $(x_1 - h, x_1)$ kleiner als b bleiben. Indem man dann Gleichung (24) von $x_1 - h_1$ bis x_1 integriert, kommt unter Berücksichtigung von (25):

$$z(x_1 - h_1) - y(x_1 - h_1)$$

$$= e^{-\alpha\psi(x_1 - h_1)} \int_{x_1 - h_1}^{x_1} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y) - f(x, z) - \alpha(y - z)]\, dx.$$

Da $|y|$ und $|z|$ kleiner als b sind, kann man auf die rechte Seite die Formel (12) anwenden und erhält:

$$|z(x_1-h_1)-y(x_1-h_1)| \leqq e^{-\alpha\psi(x_1-h_1)} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\, \vartheta\alpha\, |y-z|\, dx .$$

Also auch mit Rücksicht auf (26)

$$M_h \leqq e^{-\alpha\psi(x_1-h_1)} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\, \vartheta\alpha M_h\, dx$$
$$= e^{-\alpha\psi(x_1-h_1)}\, \vartheta M_h \left(e^{\alpha\psi(x_1-h_1)} - e^{\alpha\psi(x_1)}\right) < \vartheta M_h .$$

Die Ungleichung $M_h < \vartheta M_h$ enthält aber wegen $M_h > 0$ einen Widerspruch, es gibt also keine zweite Lösung z.

Nun ist noch der Beweis nachzutragen, daß für $0 \leqq x \leqq x_0$ stets $|y| < b$ ist mit Ausschluß der Gleichheit. Aber aus der bereits bewiesenen Ungleichung $|y| \leqq b$ folgt mit Rücksicht auf (12) und (13):

$$|f(x,y)-\alpha y| \leqq |f(x,0)| + \vartheta\alpha\, |y|$$
$$\leqq b\alpha(1-\vartheta) - \alpha b' + \vartheta\alpha b = \alpha(b-b').$$

Daher nach (19) für $0 < x \leqq x_0$:

$$|y| \leqq e^{-\alpha\psi(x)} \left\{ |y_0|\, e^{\alpha\psi(x_0)} + \int\limits_{x}^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\, \alpha(b-b')\, dx \right\}$$
$$\leqq e^{-\alpha\psi(x)} \left\{ b' e^{\alpha\psi(x_0)} + (b-b')\left(e^{\alpha\psi(x)} - e^{\alpha\psi(x_0)}\right)\right\}$$
$$< b' + (b-b') = b.$$

Da aber auch $|y(0)| = 0 < b$, so ist allgemein $|y| < b$. W. z. b. w.

§ 7.

Wir zeigen jetzt, daß die Integralkurven in gewissen Fällen die Kurve $f(x,y) = 0$ im Nullpunkt berühren. Bemerken wir zunächst, daß unter den Voraussetzungen von Theorem I die Gleichung $f(x,y) = 0$ wirklich eine Kurve definiert; oder analytisch ausgedrückt: Es gibt eine und nur eine stetige Funktion y von x, welche der Gleichung $f(x,y) = 0$ genügt und für $x = 0$ verschwindet. In der Tat war nach unseren Voraussetzungen

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2) \pm \alpha(y_1-y_2)| \leqq \vartheta\alpha |y_1 - y_2| \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

wo α eine positive Zahl bedeutet und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Fall des § 3 oder § 5 vorliegt. Setzt man nun

$$y \pm \frac{1}{\alpha} f(x,y) = \chi(x,y),$$

so nimmt die Gleichung $f(x, y) = 0$ die Form an:

$$y = \chi(x, y)$$

und dabei ist

$$|\chi(x, y_1) - \chi(x, y_2)| \leqq \vartheta |y_1 - y_2|.$$

Nach einem von Herrn Goursat bewiesenen Satz*) folgt hieraus für genügend kleine x gerade die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion y. W. z. b. w.

Wir setzen nun weiter voraus, daß die Kurve $f(x, y) = 0$ im Nullpunkt eine bestimmte Tangente hat, die nicht mit der Y-Achse zusammenfällt. Das ist beispielsweise immer der Fall, wenn die partiellen Ableitungen f_x', f_y' existieren und stetig sind (f_y' kann nach den Voraussetzungen von Theorem I nicht Null sein). Wenn wir dann weiter annehmen, daß

$$\lim_{x=+0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0 \tag{27}$$

ist, wollen wir zeigen, daß die Integralkurven im Nullpunkt die Kurve $f(x, y) = 0$ berühren. Zu dem Zweck sei mit Y_1 die für $x = 0$ verschwindende Lösung der Gleichung $f(x, y) = 0$ bezeichnet; also

$$f(x, Y_1) = 0. \tag{28}$$

Unsere Voraussetzung über die Tangentenexistenz besagt dann, daß der Grenzwert

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_1}{x} = \lambda \tag{29}$$

existiert und endlich ist.

Indem wir jetzt zuerst den Fall des § 3 behandeln, sei Y_2 das für $x = 0$ verschwindende Integral der Differentialgleichung (1); wir haben dann nur zu zeigen, daß auch $\frac{Y_2}{x}$ für $x = +0$ dem Grenzwert λ zustrebt. Nun ist nach Formel (9)

$$Y_2 = e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_2) + \alpha Y_2]\, dx.$$

Also, wenn wir zur Abkürzung

$$e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_1) + \alpha Y_1] dx - Y_1 = x\Phi(x) \qquad (x > 0) \tag{30}$$

*) É. Goursat: „Sur la théorie des fonctions implicites". Bulletin de la Société Mathématique de France, 31 (1903).

setzen, auch

$$Y_2 - Y_1 = x\Phi(x) + e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_2) - f(x, Y_1) + \alpha(Y_2 - Y_1)]\, dx.$$

Daher für genügend kleines x mit Rücksicht auf (3) und unter Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned} |Y_2(x) - Y_1(x)| &\leqq x|\Phi(x)| + e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\, |Y_2 - Y_1|\, dx \\ &= x|\Phi(x)| + \vartheta|Y_2(x_1) - Y_1(x_1)|, \end{aligned}$$

wo $0 < x_1 < x$ ist. Wendet man diese Formel wiederholt an, so kommt, wenn $x_1, x_2, x_3, \cdots$ eine geeignet zu wählende Serie von abnehmenden positiven Zahlen bedeutet,

$$\begin{aligned} |Y_2(x) - Y_1(x)| &\leqq x|\Phi(x)| + \vartheta x_1|\Phi(x_1)| + \cdots + \vartheta^\nu x_\nu|\Phi(x_\nu)| \\ &\qquad + \vartheta^{\nu+1}|Y_2(x_{\nu+1}) - Y_1(x_{\nu+1})| \\ &\leqq x\{|\Phi(x)| + \vartheta|\Phi(x_1)| + \cdots + \vartheta^\nu|\Phi(x_\nu)|\} \\ &\qquad + \vartheta^{\nu+1}|Y_2(x_{\nu+1}) - Y_1(x_{\nu+1})|. \end{aligned}$$

Da aber offenbar

$$\lim_{\nu=\infty} \vartheta^{\nu+1}|Y_2(x_{\nu+1}) - Y_1(x_{\nu+1})| = 0,$$

so folgt hieraus

$$\left|\frac{Y_2(x) - Y_1(x)}{x}\right| \leqq |\Phi(x)| + \vartheta|\Phi(x_1)| + \vartheta^2|\Phi(x_2)| + \cdots, \tag{31}$$

vorausgesetzt daß diese Reihe konvergiert. Nun ist aber nach (30) und (28)

$$\Phi(x) + \frac{Y_1}{x} = \frac{\int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \alpha Y_1\, dx}{x e^{-\alpha\psi(x)}}.$$

Auf der rechten Seite haben Zähler und Nenner für $\lim x = +0$ den Grenzwert 0. Man findet nach den Regeln der Differentialrechnung den Grenzwert des Quotienten, indem man Zähler und Nenner differenziert. Es kommt so mit Rücksicht auf (29) und (27):

$$\lim_{x=+0} \Phi(x) + \lambda = \lim_{x=+0} \frac{\frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \alpha Y_1}{e^{-\alpha\psi(x)}\left(1 + \frac{\alpha x}{\varphi(x)}\right)} = \lim_{x=+0} \frac{\frac{Y_1}{x}}{\frac{\varphi(x)}{\alpha x} + 1} = \lambda.$$

Daher

$$\lim_{x=+0} \Phi(x) = 0. \tag{32}$$

Infolgedessen konvergiert die fragliche Reihe für genügend kleine x, und die Ungleichung (31) ist also richtig. Aus ihr folgt dann aber im Verein mit (32) sogleich:

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_2(x) - Y_1(x)}{x} = 0,$$

also auch:

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_2}{x} = \lim_{x=+0} \frac{Y_1}{x} = \lambda. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Wir wenden uns jetzt dem Fall des § 5 zu. Dann sei Y_3 das für $x = 0$ verschwindende und für $x = x_0$ den Wert y_0 annehmende Integral der Differentialgleichung (1). Dabei denken wir uns, was keine Beschränkung bedeutet, x_0 so klein, daß die Funktion Y_1 jedenfalls für $0 \leqq x \leqq x_0$ existiert und absolut $\leqq b$ ist. Nach Formel (19) ist dann

$$Y_3 = e^{-\alpha\psi(x)} \left\{ y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_3) - \alpha Y_3]\, dx \right\}.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

$$(33) \quad e^{-\alpha\psi(x)} \left\{ y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_1) - \alpha Y_1]\, dx \right\} - Y_1 = x\Psi(x),$$

so ist auch

$$Y_3 - Y_1 = x\Psi(x) - e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_3) - f(x, Y_1) - \alpha(Y_3 - Y_1)]\, dx.$$

Daher mit Rücksicht auf (12) und unter Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned} |Y_3(x) - Y_1(x)| &\leqq x|\Psi(x)| + e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\, |Y_3 - Y_1|\, dx \\ &\leqq x|\Psi(x)| + \vartheta\, |Y_3(x_1) - Y_1(x_1)|, \end{aligned}$$

wobei wieder $0 < x_1 < x$ ist. Hieraus folgt analog wie oben:

$$(34) \qquad \left| \frac{Y_3(x) - Y_1(x)}{x} \right| \leqq |\Psi(x)| + \vartheta\, |\Psi(x_1)| + \vartheta^2 |\Psi(x_2)| + \cdots,$$

vorausgesetzt, daß diese Reihe konvergiert. Nun ist aber nach (33) und (28)

$$\Psi(x) + \frac{Y_1}{x} = \frac{y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} + \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \alpha Y_1\, dx}{x e^{\alpha\psi(x)}}.$$

Hier hat der Nenner der rechten Seite für $\lim x = +0$ den Grenzwert ∞,

wie man auf Grund der Voraussetzung (27) leicht erkennt. Man findet den Grenzwert des Quotienten, indem man Zähler und Nenner differenziert.*) Es kommt dann:

$$\lim_{x=+0} \Psi(x) + \lambda = \lim_{x=+0} \frac{-\frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\alpha Y_1}{e^{\alpha\psi(x)}\left(1 - \frac{\alpha x}{\varphi(x)}\right)} = \lim_{x=+0} \frac{\frac{Y_1}{x}}{1 - \frac{\varphi(x)}{\alpha x}} = \lambda.$$

Daher ist

(35) $$\lim_{x=+0} \Psi(x) = 0.$$

Infolgedessen konvergiert die fragliche Reihe für genügend kleine x und die Ungleichung (34) ist also richtig. Aus ihr folgt dann im Verein mit (35) sogleich

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_2(x) - Y_1(x)}{x} = 0,$$

also auch

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_2}{x} = \lim_{x=+0} \frac{Y_1}{x} = \lambda. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Somit haben wir bewiesen:

Theorem II. *Zu den Voraussetzungen des Theorems* I *mögen noch die folgenden beiden hinzukommen:*

1. *Die durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definierte und sicher existierende Kurve habe im Nullpunkt eine bestimmte Tangente, die nicht in die Y-Achse fallen soll.*

2. $$\lim_{x=+0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0.$$

Alsdann berühren die Integralkurven des Theorems I *die Kurve $f(x, y) = 0$ im Nullpunkt.*

---

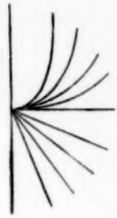
*) Hierbei wird der folgende Satz benutzt: „Wenn die Funktionen $f(x)$, $F(x)$ an jeder Stelle im Innern des Intervalles (a, b) eine bestimmte endliche Ableitung haben, wenn dabei $F'(x) \neq 0$ und $\lim_{x=a} F(x) = \infty$, so ist

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

vorausgesetzt, daß der rechts stehende Grenzwert existiert." Der Satz findet sich in den Lehrbüchern meist nur für den Fall, daß auch $\lim_{x=a} f(x) = \infty$ ist. In der angegebenen und für uns notwendigen Form steht er bei O. Stolz: Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1893, S. 77, wo indessen noch die Voraussetzung gemacht wird, daß $F'(x)$ konstantes Vorzeichen hat. Diese Voraussetzung ist aber unnötig; denn erstens kann sie bei dem Stolzschen Beweis leicht entbehrt werden, zweitens ist sie aber wegen $F'(x) \neq 0$ schon von selbst erfüllt, weil nach einem von Herrn Darboux bewiesenen Satz (Annales de l'École Normale, (2) 4 (1875), Seite 109 f.) eine derivierte Funktion keinen Zwischenwert ausläßt.

Wir bemerken, daß die Voraussetzung $\lim \frac{\varphi(x)}{x} = 0$ durchaus notwendig ist. Ohne sie können die Integralkurven sehr verschiedenes Verhalten zeigen. Zum Beispiel sind bei der Differentialgleichung

$$xy' = 2y + |y|$$



alle anderen Voraussetzungen unseres Theorems erfüllt. Die Kurve $f(x, y) = 0$ ist hier die X-Achse; also $Y_1 = 0$. Integralkurven gibt es dreierlei:

1. $y = Cx^3 \qquad C > 0,$
2. $y = 0,$
3. $y = -Cx, \qquad C > 0.$

Die der ersten und zweiten Art berühren die X-Achse, die der dritten Art berühren sie nicht.

A method of extending to multiple integrals properties of simple integrals.*)

By

BURTON H. CAMP of Middletown (Conn.) U. S. A.

The fundamental theorem of this paper is given in its most general form in Theorem 3, and in its simplest form in Theorem 2. It states that, subject to very general conditions, if f and g are defined in the multiple field A, there exist two functions of one variable, $F(x)$ and $G(x)$, of which the first is monotone increasing, such that

$$\int_0^x F dx = \int_{B_k} f dA, \quad \int_0^x G dx = \int_{B_k} g dA, \quad \int_0^x FG dx = \int_{B_k} fg dA,$$

where x is the measure of the set B_k where $f < k$. This theorem enables one, with very little additional labor, to extend to the domain of several variables many theorems relative to integrals of functions of one variable. Among these are certain theorems, due to Lebesgue, relative to the convergence to zero, and to $F(x)$, of the integral of $F(t)\, G(t, n)$. New conditions for the convergence of Fourier's and of Legendre's series result from one of these extensions. Other theorems which may be treated in the same manner are the second theorem of the mean, the theorem on integration by parts, and those which exhibit the relations between an integral and its derivatives. These generalizations are also generalizations in one dimension as well as to more than one dimension. The central idea of the paper, namely, that all functions may be considered as, in a sense, monotone increasing, is the important element in Lebesgue's definition of integration. In a foot-note to b°, preceding Theorem 5, it is pointed out that from some points of view his definition is more natural than Riemann's, even when so simplified as to make the two definitions equivalent.

*) Read before the American Mathematical Society, New York, February 22, 1913.

Lemma 1: *Let q be a measurable function of m variables, defined in the limited field A, and lying in the interval $(\alpha \overline{\gtrless} q \overline{\gtrless} \beta)$, α, β finite or infinite. Let B_k be that set of points in A for which $q < k$, and E_k the set where $q = k$. B_k has the following properties*):* 1°) *For each k of the interval $(\alpha \overline{\gtrless} k \overline{\gtrless} \beta)$ there exists at most one set B_k;* 2°) *if $k < k'$, $B_k \overline{\gtrless} B_{k'}$;* 3°) *$B_k$ is measurable;* 4°) *$U(B_k) = B_\beta = A - E_\beta$, $D(B_k) = B_\alpha = 0$;* 5°) *if $k' < k$, $B_k = U(B_{k'})$.*

Conversely, if a family of point sets (B_k) has these properties, there exists a function q of the nature just described.

Such a family will be called a *'monotone increasing family'* of point sets.

The proof of the first part of this lemma is immediate. The second part is proved under Lemma 2.

Lemma 2: *If the function q of the first part of Lemma 1 also has the property that the set of points E_k is null, then the set B_k also has the property that* 6°) *if $k \overline{\gtrless} k'$, $\widehat{B}_k = \widehat{D}(B_{k'})$.*

Conversely, such a function q exists for every family of sets enjoying these six properties.

A family of this nature will be called a *'continuous'*, monotone increasing family.

Proof. Consider first the converse. Let Δ_1 be a division**) of (α, β) of norm $\frac{\delta}{2}$, made by the points, $\cdots, k_{-1}, k_0, k_1, \cdots$. For each i let $q_1 = k_i$ in the set $B_{k_{i+1}} - B_{k_i}$, and let $q_1 = \beta$ in E_β. This defines q_1 at every point of A, and defines it there uniquely, for by 4°) every point of $A - E_\beta$ is in some $B_{k_{i+1}}$ and absent***) from some B_{k_i}. Now, if q_2 be defined similarly by means of the division Δ_2, made by the points of Δ_1 and others interpolated half way between them, and the process be continued, it will be seen that there exists a sequence of functions $q_1 \overline{\gtrless} q_2 \overline{\gtrless} \cdots$, such that, uniformly in A and for all values of

$$r > 0, \quad 0 \overline{\gtrless} q_{j+r} - q_j \overline{\gtrless} \frac{\delta}{2^j}.$$

---

*) The word 'measure' is used in the sense of Lebesgue, and 'measure of u' will be denoted by $\widehat{u}$. By 'union' of (B_k), denoted by U, is meant the totality of points of which each belongs to some B_k. By 'divisor' of (B_k), denoted by D, is meant the totality of points belonging to all B_k's. A set containing no points will be said to be equal to zero. By B_α, when $\alpha = -\infty$, is meant the set where q is negatively infinite. This includes no points, since q is defined at all points of A. Similar remarks apply to B_β.

**) The points of Δ_1 are to include the points α, β if these are finite. Since there is a uniform correspondence between any two intervals, finite or infinite, it is obvious that α, β might be chosen at pleasure.

***) Except when $B_{k_i} = B_\alpha$, which contains no points.

Therefore, as j becomes infinite, q_j approaches uniformly a function q. This is the desired function.

For it clearly lies within the prescribed limits, and moreover, being the limit of a sequence of measurable functions, is itself measurable. To show that the set where $q < k$ is B_k, consider first the function q', obtained in the same manner but by means of another initial division $\Delta' = (\cdots, k'_{-1}, k'_0, k'_1, \cdots)$ of the same norm. We may show that $q = q'$ thus. Let P be a point of $B_{k_{i+1}} - B_{k_i}$ in Δ_1 and of $B_{k'_{j+1}} - B_{k'_j}$ in Δ'_1. Since P is in $B_{k'_{j+1}}$ and not in B_{k_i}, and also since it is in $B_{k_{i+1}}$ and not in $B_{k'_j}$, $B_{k_i} < B_{k'_{j+1}}$, $B_{k'_j} < B_{k_{i+1}}$, $k_i < k'_{j+1}$, $k'_j < k_{i+1}$. Hence $|k_i - k'_j| < \frac{\delta}{2}$, i. e., $|q_1(P) - q_1'(P)| < \frac{\delta}{2}$. Similarly $|q_j - q_j'| < \frac{\delta}{2^j}$, and so $q = q'$. Without loss of generality, therefore, we may suppose that k is a point of Δ_1. Now $f_j \leqq k$ in B_k and $f_j \geqq k$ in $A - B_k$. So, if P belongs to B_k, $f(P) \leqq k$, for otherwise if j is large enough $f_j(P) > k$. Similarly, if P belongs to $A - B_k$, $f(P) \geqq k$.

So far we have not made use of 5°) or of 6°). Before doing so we shall prove that, if two monotone sequences, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots$, and $\mu_1 < \mu_2 < \cdots$, have k for a common limit, then $D(B_{\lambda_i}) - U(B_{\mu_i}) = E_k$, and this is true whether q is as here defined or as in the first part of Lemma 1. For suppose P is in D. Then $q(P) \leqq k$, for if $q(P) > k$, $q(P) >$ some λ_i, but since P is in every B_{λ_i}, $q(P) \leqq \lambda_i$. Similarly it may be shown that if P is in U, $q(P) < k$; that if P is not in D, $q(P) > k$; and that if P is not in U, $q(P) \geqq k$. Hence in U and in U only is $q < k$, and in D and in D only is $q \leqq k$, and so in $D - U$ and there only is $q = k$. Thus the set where $q < k$ is U, and the set where $q = k$ is $D - U$. By 5°), U is B_k, and the converse of Lemma 1 is thereby established. By 6°), $\widehat{D} - \widehat{U} = \widehat{B}_k - \widehat{B}_k = 0$, and the converse of Lemma 2 is also established. Moreover, if q is as in the first part of Lemma 2, $\widehat{D} - \widehat{U} = 0$, and then by 5°) $\widehat{D} = \widehat{B}_k$; which proves the direct proposition.

Corollary: *If (B_k) is monotone increasing $\widehat{B}_k$ is a monotone increasing function of k, and by* 5°) *is continuous on the left. If also (B_k) is continuous, so is $\widehat{B}_k$.*

Theorem 1: *Let q be as in Lemma* 2 *and also absolutely L-integrable, and let, for each k, $\widehat{B}_k = x_k$. Then, in the interval $(0, a = \widehat{A})$, there exists a single valued function $Q(x)$, lying between the same limits as q, such that* (a°) *if $x < x'$, $Q(x) < Q(x')$;* (b°) *for each x in $(0, a)$ $\widehat{B}_{Q(x)} = x$, and for each k in $(-\infty, \infty)$ $\widehat{B}_{Q(x_k)} = B_k = x_k$; and*

(c°)
$$\int_0^a Q(x)\,dx = \int_A q\,dA.$$

Proof. Let Δ_1 be a division of (α, β), including these points when they are finite, of norm $\frac{\delta}{2}$, made by the points, $\cdots, k_{-1}, k_0, k_1, \cdots$. Let $Q_1(x) = k_{i+1}$ at those points where $\widehat{B}_{k_i} < x \overline{\overline{<}} \widehat{B}_{k_{i+1}}$. It may happen that there are no such points for certain i's, but every point x of $(0, a)$, except 0, is thus included, for $\widehat{B}_k$ ranges from 0 to a. Therefore we let*) $Q_1(0) = \min Q_1(x)$, and Q_1 is thus defined and single valued at each point of $(0, a)$, and besides $\alpha \overline{\overline{<}} Q_1(x) \overline{\overline{<}} \beta$. Proceeding now to Δ_2, etc., as in the proof of Lemma 2, we have a sequence of functions, $Q_1(x) \overline{\overline{>}} Q_2(x) \overline{\overline{>}} \cdots$, such that, uniformly in $(0, a)$ and for all r's > 0,

(1) $$0 \overline{\overline{<}} Q_j - Q_{j+r} \overline{\overline{<}} \frac{\delta}{2^j},$$

and therefore this sequence defines a function $Q(x)$, which is its uniform limit. Q is single valued and defined in $(0, a)$, and $\alpha \overline{\overline{<}} Q \overline{\overline{<}} \beta$. Moreover, if

(2) $$x < x', \quad Q_j(x) \overline{\overline{<}} Q_j(x').$$

By Lebesgue's definition of an integral

(3) $$\int_A q\, dA = \lim_{j=\infty} \sum k_{i+1}(\widehat{B}_{k_{i+1}} - \widehat{B}_{k_i}),$$

the sum being taken over all i's in Δ_j. This is an infinite number of i's if q is unlimited. In this case, by Lebesgue's theory, the infinite sum exists. It is now obvious that this sum equals

$$\int_0^a Q_j(x)\, dx,$$

and that, since Q_j approaches Q uniformly,

$$\lim_{j=\infty} \int_0^a Q_j(x)\, dx = \int_0^a Q(x)\, dx.$$

Therefore this equation and (3) prove (c°). We shall next prove (b°).

By definition, to each k in $(-\infty, \infty)$ there corresponds one and only one x_k. Moreover, since by the preceding corollary x is a continuous function of k, to each x there corresponds at least one k_x (except that, when α, β are infinite, perhaps k_0 and k_a are also), and we may see that, except at most for an enumerable number of x's, there corresponds but one k_x. For, if, to a special x, k' and k'' correspond, i. e., if $x = \widehat{B}_{k'} = \widehat{B}_{k''}$, then also would $x = \widehat{B}_{k'''}$ where k''' is a rational number between k' and k''. There are but an enumerable number of different rational numbers,

*) By 'min Q' is meant the lower limit of Q, not necessarily the least value.

and by definition to another x would correspond a k not included in the interval (k', k'').

Now let us first suppose that x is not 0 or a, and is a point for which k_x is not multiple valued. As in the proof of Lemma 2 we may show that, without loss of generality we may suppose k_x a point of the division Δ_1. Since $x = \widehat{B}_{k_x}$, by definition $Q_1(x) = k_x$. The same is true of Q_j and hence of Q. Thus (b°) is proved, except perhaps for an enumerable number of x's. But*) $\widehat{B}_\alpha = 0$, and $\widehat{B}_\beta = a$, and therefore $\widehat{B}_{Q(x)}$ is a function of x which is equal to or greater than x at 0, and equal to or less than x at a, and equal to x elsewhere, except perhaps at an enumerable set. We may readily show that $Q(x)$, and therefore that $\widehat{B}_{Q(x)}$ is monotone increasing, and then it will follow that $\widehat{B}_{Q(x)} = x$ everywhere. For by a simple proof it can be established that the uniform limit of any sequence of monotone increasing functions is monotone increasing, and so $Q(x)$ is of this nature by virtue of (2).

Now (a°) follows also, for by (b°), if $x < x'$, $\widehat{B}_{Q(x)} < \widehat{B}_{Q(x')}$, and therefore by the definition of B_k, $Q(x) < Q(x')$.

Remark. — It has been shown in this proof that, for each x, $k_x = Q(x)$, except at those points where k is multiple valued. But, by (b°), at any such point $Q(x)$ is one of the values of k corresponding to x, and therefore in the future we shall at all points reserve for the designation 'k_x' only those particular values of k which equal $Q(x)$.

Fundamental Theorem 2: *Let q, Q, and (B_k) be as in Theorem* 1, *and let g be absolutely L-integrable in A. Then there exists a function $G(x)$, defined in* (0, a), *and depending on (B_k) but not otherwise on q, such that, for each x in* (0, a) *and each k in* $(-\infty, \infty)$,

$$(a^\circ)\quad \int_0^x G\,dx = \int_{B_k} g\,dA, \qquad\qquad (b^\circ)\quad \int_0^x QG\,dx = \int_{B_k} qg\,dA,$$

where, as before, for each x, $k = k_x = Q(x)$, and for each k, $x = x_k = \widehat{B}_k$; provided also, in (b°), *that qg be absolutely L-integrable.*

Proof. — Consider the function

$$J(x) = \int_{B_{Q(x)}} g\,dA.$$

By Theorem 1 this is single valued and defined for each x in (0, a). By a theorem of Lebesgue's**), for each $\varepsilon > 0$ there exists a $\mu > 0$ so that

---

*) Cf. the first foot-note to Lemma 1.

**) Lebesgue, Annales de l'École Normale, (3) 27 (1910), p. 374.

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\Bigl|\int\limits_{\Delta_i B_x} g\,dA\Bigr| < \varepsilon, \quad\text{if}\quad \sum_{i=1}^{\infty}\widehat{\Delta}_i B_x < \mu, \quad\text{and}\quad \Delta_i x > 0,$$

where $\Delta_i B_x$ is an abbreviation for $B_{Q(x_i+\Delta_i x)} - B_{Q(x_i)}$ and $(x_i, x_i + \Delta_i x)$ are any set of non-overlapping intervals*); for, by (a°) of Theorem 1,

$$Q(x_{i-1} + \Delta_{i-1}x) \leqq Q(x_i) < Q(x_i + \Delta_i x),$$

and therefore the set $\Delta_i B_x$ contains no points of $\Delta_{i-1}B_x$ or of $\Delta_{i+1}B_x$. Moreover, by (b°) of Theorem 1, $\widehat{\Delta}_i B_x = \Delta_i x$ and hence

$$\sum_{i=1}^{\infty}|J(x_i + \Delta_i x) - J(x_i)| < \varepsilon, \quad\text{if}\quad \sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i x < \mu, \quad\text{and}\quad \Delta_i x > 0;$$

and J is absolutely continuous**) and therefore an integral of some absolutely L-integrable function $G(x)$. This proves (a°) for each x, and by (b°) of Theorem 1 the same follows for each k.

Now, by another known theorem***), except perhaps for a null set of x's,

$$(2)\qquad \frac{dJ}{dx} = G(x) = \lim_{\Delta x = 0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{\Delta B_x} g\,dA,$$

and so G depends only on $B_{Q(x)}$ and not on q directly, i. e., G would be the same for any other q defining the same B_k family.

The function qg satisfies the condition on g. Therefore $H(x)$ exists in $(0, a)$ such that

$$\int_0^x H(x)\,dx = \int\limits_{B_{Q(x)}} qg\,dA,$$

and, except perhaps at a null set, by (2),

$$(3)\qquad H(x) = \lim_{\Delta x = 0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{\Delta B_x} qg\,dA = \lim_{\Delta x = 0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{\Delta B_x}[Q(x) + \sigma]g\,dA,$$

where $|\sigma| < \eta$ and $\lim\limits_{\Delta x = 0}\eta = 0$. For, if, for example, $\Delta x > 0$, in ΔB_x

$$Q(x) \leqq q < Q(x + \Delta x),$$

and so

$$0 \leqq q - Q(x) < Q(x + \Delta x) - Q(x);$$

then

$$\lim_{\Delta x = 0}[Q(x + \Delta x) - Q(x)] = 0,$$

---

*) Except perhaps in their end points.

**) Vitali, Rend. Circ. Mat. Palermo, 23 (1907), p. 138. There is a misprint on this page; instead of $\sigma < 0$ in line 20 he should have $\sigma > 0$.

***) de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse, 2[d] ed., vol. 1. p. 267, Theorem and Corollary. In (2) we do not assert, as in (1), that $\Delta x > 0$.

except perhaps at an enumerable set; for a monotone increasing function, whether limited or not*), can have at most an enumerable number of discontinuities. Hence

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{\Delta B_x} \sigma g\,dA\right| < \frac{\eta}{\Delta x}\int\limits_{\Delta B_x} |g|\,dA,$$

and this has the limit zero, because $|g|$ satisfies the conditions on g, and therefore by (1), except perhaps at the points stated,

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{\Delta B_x} |g|\,dA$$

exists. Therefore, except perhaps at a null set,

$$H(x) = Q(x)\lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{\Delta B_x} g\,dA = G(x)\,Q(x) \tag{4}$$

which proves (b°).

Remark. — In (2) and (3) we have seen that certain limits exist except perhaps at a null set in $(0, a)$. We shall call these limits the '*derivatives*' of the integrals with respect to the family (B_k).

Generalization.

In Theorem 1 it was necessary to make the restriction that $q = k$ in at most a null set, in order to secure for each x a number $Q(x)$ and a set $B_{Q(x)}$, satisfying the relations (a°) and (b°). We shall now proceed to show how this may be accomplished without that restriction.

Lemma 1: *Let q and g be as in Theorem 2, except that g is to have the additional property that the set where $g < \lambda$ is one of the family (B_k). Let $\Gamma(x)$ denote the***) max g in $B_{Q(x)}$. *This function has the following properties:* (a°) *It is defined and single valued in* $(0, a)$, *except perhaps at* a *(where it may be infinite) and at* 0; (b°) *it is not greater than any value of g in $A - B_{Q(x)}$*; (c°) $\Gamma(x) = G(x)$, *except perhaps at a null set****); (d°) *it is monotone increasing where it is defined.*

Proof. — By the preceding theorem, except perhaps at a null set,

$$G(x) = \lim_{\Delta x=0}\int\limits_{\Delta B_x} g\,dA = \lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{\Delta B_x}[\Gamma(x)+\sigma]\,dA, \qquad (\Delta x > 0),$$

where $|\sigma| < \eta$ and $\lim\limits_{\Delta x=0}\eta = 0$. For in ΔB_x, by (b°), which is readily

---

*) This statement is usually made only for limited functions, but it is easily extended to the more general case.

**) See the first foot-note to Theorem 1.

***) See Remark below.

established, $\Gamma(x) \gtreqless g \gtreqless \Gamma(x+\Delta x)$. Moreover $\Gamma(x)$ is monotone increasing, for if $x < x'$, $Q(x) < Q(x')$, and therefore $B_{Q(x)} < B_{Q(x')}$, by Theorem 1. Hence, except perhaps for an enumerable set, it is continuous, and

$$\lim_{\Delta x = 0} [\Gamma(x+\Delta x) - \Gamma(x)] = 0,$$

and finally

$$G(x) = \Gamma(x) + \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta B_x} \sigma \, dA = \Gamma(x),$$

except perhaps at a null set.

Remark. — $G(x)$ is not defined in a null set by its preceding properties. We shall hereafter require that $G(x) = \Gamma(x)$ at all points where the latter is defined.

Lemma 2: *If f is defined and measurable in A, there exists a continuous, monotone increasing family of sets (B_k) such that the set where $f < \lambda$ belongs to (B_k). As shown in Lemma 2 to Theorem 1, this set may be considered as defined by a limited*) function q for which Theorems 1 and 2 hold.*

Definition. — Under these circumstances we shall say that (B_k), q, and Q are '*associated with f*', and that f is '*monotone increasing**) with respect to (B_k)*'.

The proof of this lemma is omitted because it is long and the lemma itself is fairly obvious. The idea involved will be evident if one considers how the theorem would read if f were a monotone increasing function of one variable, but constant in an enumerable number of intervals.

Fundamental Theorem 3: *If f and g are defined and absolutely L-integrable in A, and (B_k), q, and Q are associated with f, there exist two functions, $F(x)$ and $G(x)$, defined in $(0, a)$, such that F is monotone increasing and, for each x in $(0,a)$ and for each k in $(-\infty, \infty)$, $F = \max f$***) in $B_{Q(x)}$, and*

$$(\mathrm{a}^0)\ \int_0^x F\,dx = \int_{B_k} f\,dA, \quad (\mathrm{b}^0)\ \int_0^x G\,dx = \int_{B_k} g\,dA, \quad (\mathrm{c}^0)\ \int_0^x F G\,dx = \int_{B_k} fg\,dA,$$

where, as before, for each x, $k = Q(x)$, and, for each k, $x = \widehat{B}_k$; provided also that, in (c⁰), *fg be absolutely L-integrable.*

*) Cf. the first foot-note to that lemma.

**) The lemma states, therefore, that every measurable function is monotone increasing with respect to some *continuous* family of sets, and it follows that the succeeding theorem applies to all absolutely L-integrable functions. The lemma itself, in a somewhat different form, is also stated by Lebesgue, loc. cit., p. 443.

***) Except at $x = 0$.

Proof. — Since f satisfies the conditions of Lemma 2 and the conditions on g in Lemma 1, by Theorem 2, (a°) is true, and by Lemma 1, (c°) and (d°), so is the preceding statement about F. Since g satisfies the conditions on g in Theorem 2, (b°) is true. Also, since fg satisfies these conditions, there exists a function $H(x)$ such that, for each x,

$$\int_0^x H\,dx = \int_{B_{Q(x)}} fg\,dA,$$

and, except perhaps for a null set of x's,

$$H(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta B_x} fg\,dA = \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta B_x} [F(x) + \sigma] g\,dA,$$

where $|\sigma| < \eta$ and $\lim\limits_{\Delta x = 0} \eta = 0$. (Cf. the proof of Lemma 1.) Hence, except perhaps at a null set,

$$H(x) = F(x) \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta B_x} g\,dA = F(x)\,G(x).$$

This establishes the theorem for each x. It follows for each k as in Theorem 2.

Corollary 1: *Under the conditions of the theorem, except at most at a null set, the derivatives with respect to the family* (B_k) *of the integrals of* f, g, *and* fg *exist, and equal* F, G, *and* FG, *respectively.*

Corollary 2: *Under the same conditions, and with the same notation, if* $P(u)$ *signifies a polynomial in* u,

$$(a°) \quad \int_0^x |F|\,dx = \int_{B_k} |f|\,dA, \qquad (b°) \quad \int_0^x P(F)\,dx = \int_{B_k} P(f)\,dA,$$

$$(c°) \quad \int_0^x P(F)\,G\,dx = \int_{B_k} P(f)\,g\,dA,$$

provided that, in (b°) *and* (c°), $f \gtrless 0$.

To prove (a°) we let $g = -1$ in $B_{Q(x_0)}$ if x_0 is the measure of the set where $f < 0$, $g = 1$ elsewhere. To prove (b°) we let $g = cf^{p-1}$, c being constant, and note that this is monotone increasing with respect to (B_k). Then cf^p is itself also monotone increasing, and, since G depends only on (B_k), we can establish (c°).

It has thus been shown how it is possible, under certain circumstances, to replace a multiple integral by a simple one containing a monotone increasing function in the integrand. It will be found useful later

to have an answer to the converse problem: to replace a simple integral by a multiple one.

Theorem 4: *If $F(x)$ is defined in* $(0, a)$, *except perhaps at* 0 *and at* a, *is absolutely L-integrable, and monotone increasing, and* $\alpha \lesseqgtr F \lesseqgtr \beta, \alpha, \beta$ *finite or infinite, and if* (B_k) *is a continuous, monotone increasing family defined in* A, *let us say by the function* q *of the Theorems* 1 *and* 2, *then there exists in* A *a function* $f(t, u, \cdots)$, *with which* (B_k), q, *and* Q *are associated, such that* $\alpha \lesseqgtr f \lesseqgtr \beta$, *and equation* (a°) *of Theorem* 3 *is true. If we also suppose the* g *of Theorem* 3 *given, the equations* (b°) *and* (c°) *also are true**).

Proof. — Let $f_1 \lesseqgtr f_2 \lesseqgtr \cdots, f$ be defined as $q_1 \lesseqgtr q_2 \lesseqgtr \cdots, q$ were defined in the proof of Lemma 2 to Theorem 1, except that by the set B_{k_i} we now mean the set $B_{Q(x_i)}$, where $(x_{i+1} - x_i)$ is the interval where $\lambda_i \lesseqgtr F(x) < \lambda_{i+1}$, and let $f = \lambda_i$ in $B_{Q(x_{i+1})} - B_{Q(x_i)}$, etc. Then, as in the proof of Theorem 1, it is easily shown that

$$\int_0^a F\,dx = \lim_{j=\infty} \sum_\alpha^\beta \lambda_i (x_{i+1} - x_i) = \lim_{j=\infty} \sum_\alpha^\beta \lambda_i \left(\widehat{B}_{Q(x_{i+1})} - \widehat{B}_{Q(x_i)}\right) = \int_A f\,dA,$$

for the second sum exists (in case α or β is infinite) because the first does. Furthermore, if $(0, x)$ is a partial interval of $(0, a)$, the values of f obtained as above are not changed when the same process is repeated for $(0, x)$. Therefore

$$\int_0^x F\,dx = \int_{B_{Q(x)}} f\,dA.$$

But from Theorem 3 we know that if f is thus, there exists a monotone increasing function $\overline{F}(x)$ for which an equation like this holds. Hence $\overline{F} = F$ except perhaps at a null set, and then the rest of the theorem follows from Theorem 3.

Applications.

Definition of Limited Variation. — If $f_1(t, u, \cdots)$ and $f_2(t, u, \cdots)$ are limited and monotone increasing with respect to the same continuous family (B_k), then the function, $f = f_1 - f_2$, shall be said to have '*limited variation with respect to* (B_k)'.

Corollary: *If* f *in the hypothesis of Theorem* 3, *and* F *in its conclusion are stated to have limited variation, instead of to be monotone increasing, the same results hold, except that now* $F = \max f_1 - \max f_2$.

---

*) Strictly, the converse should suppose G, not g, given, and I think that such a statement would be true, but the statement I have just made is the only one I wish to use and the only one I have proved.

This is evident from Corollary 2 (b°) of that theorem.

This definition is a generalization of the corresponding definition for functions of one variable, since it becomes equivalent to that definition when A and (B_k) are defined by the function x. Moreover, every limited, measurable function has in this sense limited variation with respect to some family of point sets, and thus certain theorems which follow are generalizations, even in space of one dimension, of the previously known theorems. A well known characteristic of functions of one variable which have limited variation in the ordinary sense is that they are integrable according to Riemann's definition. The following statements, which are readily established, show the relation of this property to functions which have limited variation in our sense.

(a°) *If a function has limited variation with respect to a family of metric*) sets, it is integrable according to Riemann.*

(b°) *If the word 'metric' be substituted for the word 'measurable' in Lebesgue's definition of integration of limited functions, the result is equivalent to Riemann's definition**).*

Theorem 5, The Integral: *If g is absolutely L-integrable in A, and (B_k) is any continuous, monotone increasing family, the integral of g over B_k has limited variation***) with respect to (B_k).*

For, let $g_1 = g$ where $g \gtreqless 0$, and $= 0$ where $g < 0$; let $g_2 = -g$ where $g < 0$, and $= 0$ where $g \gtreqless 0$. Then

$$\int_{B_k} g\,dA = \int_{B_k} g_1\,dA - \int_{B_k} g_2\,dA,$$

and each of these last two integrals is monotone increasing with respect to (B_k).

*) A set is metric if it has content in the sense of Cantor. Cf. Pierpont, Theory of Functions of Real Variables, vol. 2, p. 1.

**) These statements suggest that in certain respects Lebesgue's idea of integration is the more natural one. The difficulty in extending certain theorems concerning functions of one variable to the domain of several variables is that in one dimension the function is thought of as beginning at one end of an interval and proceeding to the other, so that in general it has a direction at every point. Since this concept does not permit of simple generalization, such notions as limited variation and derivative, natural in one dimension, are usually generalized so as to be dependent on artificially chosen axes, in space of more than one dimension. The central idea of Lebesgue's theory, however, and hence of the present paper, is that a function may always be thought of as beginning at its minimum and proceeding to its maximum.

***) At first sight it may not appear that this integral is a function of $(t, u, \cdots)$, but if we suppose, as we may from Theorem 4, that (B_k) is defined by $q(t, u, \cdots)$, there is a unique value of B_k and hence of the integral for each set of values of $(t, u, \cdots)$.

Theorem 6, The Derivative: *With the same provisions as in Theorem 5, the derivative of the integral exists and equals $G(x)$, except perhaps at a null set of x's, and, if it be defined in any manner where it does not exist, its integral over B_k equals the original integral*).*

This follows immediately from the corresponding, known theorem for functions of one variable, and from Theorem 3. The same is true of the next two theorems.

Theorem 7, Second Theorem of the Mean: *If f is limited and L-integrable in A, and if g is absolutely L-integrable, there exists a k so that, (B_k), q, and Q being associated with f,*

$$\int_A fg\,dA = l\int_{B_k} g\,dA + L\int_{A-B_k} g\,dA,$$

where $L = \lim\limits_{x=0}\,(\max f \text{ in } B_{Q(x)}) + C$, *and* $l = \lim\limits_{x=a}\,(\max f \text{ in } B_{Q(x)}) - D$, *$C$ and D being arbitrary positive constants; — in particular**), when $L = \max f$ in A, and $l = \min f$ in A.*

For then $L = F(a-0) + C$, and $l = F(0+0) - D$. It may be shown that the second theorem of the mean permits the addition of these constants by means of a consideration of the proof of the theorem by Lebesgue***).

Theorem 8, Integration by Parts: *With the same hypotheses as in Theorem 7, and if also* $\max f$ *in* $B_{Q(x)}$, *i. e.*, $F(x)$, *is an integral when properly defined at* $x = 0$,

$$\int_A fg\,dA = F(a)\int_A g\,dA - \int_0^a\Big[F'(x)\int_{B_{Q(x)}} g\,dA\Big]dx.$$

Corollary 1: *If f has limited variation with respect to (B_k), and its components, f_1 and f_2, both satisfy the conditions just imposed on f, the same formula holds.*

Corollary 2: *In particular, when* $g = 1$,

$$\int_A f\,dA = \widehat{A}\cdot F(a) - \int_0^a x\,F'(x)\,dx.$$

---

*) An analogous theorem is stated by Lebesgue and reproduced by de la Vallée Poussin (loc. cit., vol. 2, p. 116), but that one differs from this in that his indefinite integral is not a function of a point, and so his theorem does not contain the customary theorem in one dimension as a special case. *E. g.*, according to Lebesgue, if u and v are the integrals of t and t^2, respectively, over the interval $(x - \Delta x,\ x + \Delta x)$, the derivative of uv at x equals zero.

**) Lebesgue, loc. cit., p. 444, has proved this theorem for this important case.

***) Annales de la Faculté de Toulouse, (3) 1 (1909), pp. 35, 36.

Example. — If f is a monotone increasing function of one variable t, and g is a limited function of two variables, t, u; the formula of the theorem becomes that obtained by the ordinary method of integration by parts.

In fact, in this case $F(x) = f(x)$, and our formula is, supposing $A = (0, 1)$,

$$\int_A fg\,dA = f(1)\int_0^1 dt\int_0^1 g\,dv - \int_0^1\Big[f'(x)\int_0^x dt\int_0^1 g\,dv\Big]dx,$$

and the usual formula is

$$\int_0^1 dv\int_0^1 f(t)\,g(t, u)\,dt = \int_0^1 dv\,\Big\{f(1)\int_0^1 g\,dt - \int_0^1\Big[f'(x)\int_0^x g\,dt\Big]dx\Big\},$$

which may be put in the same form as the first one.

Convergence Theorem*) 9: *The following are the necessary and sufficient conditions that the absolutely convergent L-integral*

$$\int_A f(t, u, \cdots)\,g(t, u, \cdots; n, m, \cdots)\,dA,$$

*where f and g are defined in A, and $n, m, \cdots$ are j parameters that grow infinite simultaneously but independently***), *may exist for sufficiently large values of the parameters, and approach zero, for all functions f which have limited variation with respect to the continuous family (B_k):*

The integral of g over B_k (1°) shall exist as an absolutely convergent integral if $n, m, \cdots > n_0$; (2°) shall be limited uniformly with respect to k, if $n, m, \cdots > n_0$; (3°) shall approach zero for each k.

Sufficiency. — By a previous corollary, there exists a function $F(x)$, having limited variation in $(0, a = \widehat{A})$, and for each set of the parameters an absolutely L-integrable function $G(x; n, m, \cdots)$, depending only on (B_k), not on f, such that, for each k in $(-\infty, \infty)$ and for each x in $(0, a)$,

$$\text{(1)} \qquad \int_{B_k} fg\,dA = \int_0^x FG\,dx, \quad \int_{B_k} g\,dA = \int_0^x G\,dx.$$

Therefore, for all k's, and so for all x's, uniformly, if $n, m, \cdots > n_0$,

$$\text{(2)} \qquad \Big|\int_0^x G(n, m, \cdots)\,dx\Big| < M;$$

*) Cf. a much longer and more difficult proof of the necessary part of this theorem in an earlier paper of mine on 'Singular Multiple Integrals', Trans. Am. Math. Soc., 14 (1913), pp. 54—59. I could not at that time prove that these conditions were sufficient.

**) *I. e.*, $n, m, \cdots$ belong to sequences which diverge to plus infinity independently, but at the same rate.

and for each x

$$\lim_{n=\infty} \int_0^x G(n, m, \cdots)\, dx = 0 \tag{3}$$

Hence, by a theorem of Lebesgue's*), and by (1),

$$\lim_{n=\infty} \int_0^a F G\, dx = \lim_{n=\infty} \int_A f g\, dA = 0.$$

Necessity. — If (1°) is not satiesfied, the function $f = 1$ contradicts the conclusion of the theorem. If (2°) is not satisfied, there exists a sequence approaching infinity, $n_1, m_1, \cdots < n_2, m_2, \cdots < \cdots$, and a corresponding set of k's, $k_1, k_2, \cdots$, and therefore of x's, not necessarily all distinct, such that the following diverges to infinity as i does,

$$\left| \int_0^{x_i} G(n_i, m_i, \cdots)\, dx \right| .$$

If (3°) is not satisfied for some k, there exists an x_k for which (3) is not satisfied. In either case, by Lebesgue's theorem, there exists a monotone increasing function, limited in $(0, a)$ say $H(x)$, such that

$$\lim_{n=\infty} \int_0^a H G(n, m, \cdots)\, dx \neq 0 .$$

By Theorem 4, then, there exists a function $h(t, u, \cdots)$, limited in A, and monotone increasing with respect to the family (B_k), such that, since the $g(n_i, m_i, \cdots)$'s are presupposed, and the corresponding G's do not depend on f or on h,

$$\lim_{n=\infty} \int_A h g(n, m, \cdots) dA = \lim_{n=\infty} \int_0^a H G(n, m, \cdots)\, dx \neq 0.$$

Corollary**): *The same conditions are sufficient to cause the integral to approach zero for all limited L-integrable functions in A, provided (B_k) be replaced by an arbitrary point set in A. (By condition (2°) we mean, then, that the integral is limited uniformly for all measurable sub-sets of A.)*

For it has been shown in Lemma 2 to Theorem 3 that every function is monotone increasing with respect to some continuous family.

---

*) Annales de la Faculté de Toulouse, loc. cit., vol. 1 (1909), p. 65.

**) Cf. Theorem 3 of my previous paper, loc. cit., p. 44. With similar ease the first theorem of that paper may now be derived from Lebesgue's corresponding theorem. For it is readily shown by use of Theorem 6 that, if $g(t, u, \cdots)$ is limited, except perhaps at a null set, so is $G(x)$.

Definition. — Let $f = c$ at the point $(\xi, \eta, \cdots)$. We shall say that this point is '*regular*' if for every $\delta > 0$ there exists (if $f < c$ in a non-null set) a non-null set where $c - \delta < f < c$, and also (if $f > c$ in a non-null set) a non-null set where $c < f < c + \delta$.

Convergence Theorem 10: *In order that the integral of Theorem 9 may approach $f(\xi, \eta, \cdots)$, when $(\xi, \eta, \cdots)$ is a regular point, and f has limited variation, the following conditions are sufficient:*

The integral of g over B_k (1°) shall exist as an absolutely convergent L-integral if $n, m, \cdots > n_0$; (2°) shall be limited uniformly with respect to k, if $n, m, \cdots > n_0$; (3°) shall approach unity when $\widehat{B}_k = \widehat{A}$; and (4°) its integral over $B_{Q(x')} - B_{Q(x'')}$ shall approach zero, if both x' and x'' are in one of the intervals $(0, x_0 - \varepsilon)$, $(x_0 + \varepsilon, a)$, x_0 being the measure of the set where $f < f(\xi, \eta, \cdots)$.

For the proof of this theorem the following lemmas, which the reader will not find difficult to prove, are needed. The first one is deduced with very little additional reasoning from the proof of a theorem of Lebesgue's*), in fact is really little more than another way of stating that theorem.

Lemma 1: *Let x_0 be a point of continuity of the limited, monotone increasing function $F(x)$, defined in the interval $(0, a)$, and let $G(x; n, m, \cdots)$ be defined in the same interval. In order that the integral*

$$\int_0^a F(x)\, G(x; n, m, \cdots)\, dx$$

may approach $F(x)$ for all such functions F, it is necessary and sufficient that the following conditions be satisfied:

The integral of G over $(0, x)$ (1°) shall exist as an absolutely convergent L-integral if $n, m, \cdots > n_0$; (2°) shall be limited uniformly with respect to x, if $n, m, \cdots > n_0$; (3°) shall approach unity when $x = a$; and (4°) its integral over the interval (x', x'') shall approach zero, if both x' and x'' are in one of the intervals $(0, x_0 - \varepsilon)$, $(x_0 + \varepsilon, a)$.

Lemma 2: *Let f and F be as in Theorem 3. If $(\xi, \eta, \cdots)$ is a regular point of f, and x_0 is the measure of the set where $f < f(\xi, \eta, \cdots) = c$, then $F(x_0) = c$, and x_0 is a point of continuity of F.*

Proof of Theorem. — It is sufficient to prove the theorem in case f is monotone increasing and limited. By Lemma 2 there exists in $(0, a = \widehat{A})$ a monotone increasing function $F(x)$, continuous at x_0, and by Theorem 3 an absolutely L-integrable function $G(x; n, m, \cdots)$ such that, x being equal to $\widehat{B}_k$,

*) Annales de la Faculté de Toulouse, loc. cit., p. 70.

$$\int_0^x F G\,dx = \int_{B_k} f g\,dA, \quad \int_0^x G\,dx = \int_{B_k} g\,dA.$$

Hence the conditions of Lemma 1 are satisfied by G and F. Therefore, by (1) and Lemma 1,

$$\lim_{n=\infty} \int_A f g\,dA = F(x_0) = f(\xi, \eta, \cdots).$$

Example 1. — Fourier's series, for any limited, measurable function f, converges at every regular point of continuity ξ, interior to $(-\pi, \pi)$, for which the following integral is limited uniformly with respect to k, (B_k) being associated with f,

$$\int_{B_k} \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(t-\xi)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-\xi)}\,dt.$$

Example 2. — If ξ is interior to $(-1, 1)$ and f and ξ are subject to the same conditions otherwise as in Example 1, Legendre's series converges, provided

$$\int_{B_k} \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(\xi) P_n(t) - P_n(\xi) P_n(t)}{\xi - t}\,dt$$

is uniformly limited.

To see that the conditions of the theorem are satisfied by these examples we need only the following statement in addition to already well known facts about these integrals:

If f is continuous at $(\xi, \eta, \cdots)$, there exists for each $\delta > 0$ a $\mu > 0$ such that the set where $f < c - \delta$ and the set where $f \geqq c + \delta$ contain no points of the sphere of center $(\xi, \eta, \cdots)$ and radius μ. In the particular cases before us, this sphere is of course an interval.

Middletown, Conn., Wesleyan University.

Über die Abbildung doppelt überdeckter Regelflächen auf einfach überdeckte.

Von

Richard Baldus in Erlangen.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Jede algebraische mehrdeutige Korrespondenz zwischen zwei Punktmannigfaltigkeiten läßt sich, wie in § 1 der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, als Folge zweier rationaler Korrespondenzen darstellen. Durch die folgende Untersuchung (§ 2 bis § 6) über [1, 2]-Korrespondenzen zwischen zwei Regelflächen soll der Anwendung dieses Gedankenganges vorgearbeitet werden. Es sind zwei wesentlich verschiedene Typen dieser Verwandtschaften zu unterscheiden (§ 2), je nachdem einer Erzeugenden der doppelt überdeckten Regelfläche die Punkte einer oder zweier Erzeugenden der (als nicht rational vorausgesetzten) einfach überdeckten Fläche zugeordnet sind. Die Transformationen der 1. Art zerfallen wieder in zwei Unterabteilungen, die durch irreduktible (§ 3) oder reduktible (§ 4) Doppel- und Übergangskurve charakterisiert sind. Für beide Fälle werden unter einigen einschränkenden Voraussetzungen die Doppel- und Übergangskurve und vor allem die Fundamentalpunkte untersucht, von denen sich im ersten Falle 8, im zweiten Falle 5 verschiedene Typen unterscheiden lassen. Aus dem Verhalten der den ebenen Schnitten entsprechenden Kurven in den Fundamentalpunkten,

sowie durch Betrachtung der auf der einfach überdeckten Regelfläche bestimmten Involution, werden durch Anwendung bekannter Korrespondenzprinzipien lineare numerische Relationen für verschiedene in der Transformation auftretende Größen abgeleitet. Im § 5 wird gezeigt, daß nur soviele dieser Größen, als durch diese Gleichungen bestimmt sind, voneinander numerisch abhängen. Analoge Betrachtungen wie für die [1, 2]-Transformationen 1. Art werden im § 6 für diejenigen 2. Art durchgeführt. Man findet 5 Typen von Fundamentalpunkten, und es ergibt sich auch hier wieder, daß die auf ähnlichem Wege gefundenen Gleichungen im oben erwähnten Sinne die ganze numerische Abhängigkeit liefern. Die beiden folgenden Paragraphen enthalten Anwendungen, der § 7 Betrachtungen über die Strahlensysteme mit einem einfach unendlichen System von Regelflächen 3. Grades, im Anschluß an die [1, 2]-Korrespondenzen 1. Art, während § 8, anschließend an die [1, 2]-Transformationen 2. Art, von den Kongruenzen mit einem einfach unendlichen System von Flächen 2. Grades handelt. In beiden Fällen werden bei gegebener Klasse des Strahlensystems Grenzen für die Ordnung angegeben.

Da sich die Punktgruppen jeder Involution auf einer Regelfläche den Punkten einer anderen Regelfläche birational zuordnen lassen, führt auch das Studium der Involutionen von Punktpaaren auf Regelflächen zu den hier behandelten Transformationen.

§ 1.

Allgemeine Verwandtschaften zwischen zwei Punktmannigfaltigkeiten.

1. Zusammensetzung aus rationalen Transformationen. Ist eine $[m_1, m_2]$-Korrespondenz zwischen den Punkten zweier Flächen $[F_1]$ und $[F_2]$ unseres Raumes gegeben und verbindet man die entsprechenden Punkte der beiden Flächen durch Gerade, so entsteht ein Strahlensystem. Es mögen jedem Punkt von $[F_1]$ die m_2 Strahlen zugeordnet werden, die ihn mit den ihm entsprechenden Punkten von $[F_2]$ verbinden, in gleicher Weise sollen jedem Punkt von $[F_2]$ m_1 Strahlen entsprechen. Nun kann man (auf verschiedenen Wegen) zu einem gegebenen Strahlensystem eine Fläche $[\Phi]$ unseres Raumes finden, deren Punkte den Strahlen der Kongruenz umkehrbar eindeutig zugeordnet sind. Daraus ergibt sich, daß man die $[m_1, m_2]$-Korrespondenz zwischen $[F_1]$ und $[F_2]$ aus zwei rationalen Verwandtschaften zusammensetzen kann, einer $[1, m_2]$-Korrespondenz zwischen $[F_1]$ und $[\Phi]$ und einer $[1, m_1]$-Korrespondenz zwischen $[F_2]$ und $[\Phi]$.

Jede mehrdeutige algebraische Korrespondenz zwischen zwei algebraischen Flächen läßt sich unter Einschaltung einer Hilfsfläche als Folge zweier rationaler Transformationen darstellen.

Mehrdeutige Verwandtschaften zwischen zwei Ebenen lassen sich nicht allgemein in eine Folge rationaler Korrespondenzen zwischen zwei Ebenen zerlegen*).

2. Es seien zwei Punktgebilde ${}_mV_k$ und ${}_nW_k$ von k Dimensionen gegeben, zwischen deren Punkten eine $[m_1, m_2]$-Korrespondenz besteht, wobei ${}_mV_k$ einem linearen Raum S_m von m Dimensionen, ${}_nW_k$ einem S_n angehört. Man findet, wenn $m > k+1$ ist, leicht ein ${}_{k+1}V_k$, das dem ${}_mV_k$ umkehrbar eindeutig entspricht, indem man die Punkte von ${}_mV_k$ mit einem festen S_{m-k-2}**) des S_m durch lineare Räume von $m-k-1$ Dimensionen verbindet, die aus einem festen S_{k+1} die Punkte von ${}_{k+1}V_k$ ausschneiden. Analog findet man ${}_{k+1}W_k$. Zwischen ${}_{k+1}V_k$ und ${}_{k+1}W_k$ besteht vermöge der gegebenen Korrespondenz wieder eine $[m_1, m_2]$-deutige Verwandtschaft. Legt man diese beiden Punktgebilde in einen S_{k+3}, verbindet man ihre entsprechenden Punkte durch Gerade und projiziert die Geraden aus einem festen Punkt des S_{k+3} durch Ebenen, dann schneiden die Ebenen aus einem festen S_{k+1} des S_{k+3} ein Punktgebilde ${}_{k+1}\Phi_k$ aus, mit dessen Hilfe sich wie oben die $[m_1, m_2]$-Transformation in zwei rationale Korrespondenzen auflösen läßt.

Der obige Satz gilt folglich nicht nur für Flächen unseres Raumes, sondern für irgendwelche Punktmannigfaltigkeiten***).

§ 2.

Einteilung der [1, 2]-Korrespondenzen zwischen zwei Regelflächen.

3. Ein Beitrag zur Theorie der rationalen Transformationen soll hier für die Flächen unseres Raumes dadurch geleistet werden, daß die [1, 2]-Korrespondenzen zwischen zwei Regelflächen untersucht werden. Da sich jede Fläche, die ein Büschel rationaler Kurven enthält, ein-eindeutig in eine Regelfläche transformieren läßt, zur Klasse der Regelflächen gehört, lassen sich die folgenden Betrachtungen ohne weiteres auf die Flächen mit einem Büschel rationaler Kurven übertragen.

---

*) Hinreichende Bedingungen für die Zerlegbarkeit einer Ebenentransformation wurden vom Verfasser früher angegeben. Vgl. Zur Theorie der gegenseitig mehrdeutigen algebraischen Ebenentransformationen. Math. Ann. 72 (1912), § 9.

**) S_0 ist ein Punkt.

***) Legt man ${}_{k+1}V_k$ und ${}_{k+1}W_k$ in denselben S_{k+1} und verbindet man die entsprechenden Punkte der beiden Gebilde durch Strahlen, so bilden die Punkte, deren Verbindungsstrahlen einen S_{k-1} treffen, zwei Mannigfaltigkeiten V'_{k-1} und W'_{k-1}. Ein lineares Büschel von Räumen S_{k-1} bestimmt so auf ${}_{k+1}V_k$ eine rationale Schar von Mannigfaltigkeiten V'_{k-1} vom Index m_2, auf ${}_{k+1}W_k$ eine rationale Schar W'_{k-1} vom Index m_1. Den Punkten eines V'_{k-1} entsprechen birational die Punkte eines W'_{k-1}. In dieser Weise läßt sich die $[m_1, m_2]$-Korrespondenz in die birationalen Korrespondenzen zwischen den Punkten der V'_{k-1} und ihrer entsprechenden W'_{k-1} auflösen.

Zwischen einer Fläche $[F_1]$ und einer Regelfläche $[R_2]$ bestehe eine $[1, 2]$-Korrespondenz. Auf $[R_2]$ ist durch die Transformation eine Involution $[2]$ von Punktpaaren bestimmt. Die Punktpaare der Involution entsprechen ein-eindeutig den Punkten von $[F_1]$. Ist $[R_2]$ rational, so ist es nach dem Satz von Castelnuovo über Involutionen auf rationalen Flächen auch $[F_1]$. Ist $[R_2]$ nicht rational, so sind die Erzeugenden die einzigen rationalen Kurven der Fläche und einer Erzeugenden e_2 der Fläche entspricht deshalb auf $[F_1]$ eine rationale Kurve (C_1). Denn entweder überdecken die den Punkten von e_2 entsprechenden Punkte die Kurve (C_1) doppelt, dann tritt auf e_2 eine Involution $[2]$ auf, deren Punktpaare ein-eindeutig den Punkten von (C_1) entsprechen, und nach dem Satz von Lüroth muß (C_1) rational sein, oder (C_1) ist einfach überdeckt, dann besteht zwischen e_2 und (C_1) eine birationale Korrespondenz. In diesem Fall entspricht der Kurve (C_1) außer e_2 auf $[R_2]$ noch eine Restkurve, die, ihrerseits ein-eindeutig auf (C_1) bezogen, rational ist, also eine weitere Erzeugende e_2' sein muß. In beiden Fällen bilden die rationalen Kurven (C_1) auf $[F_1]$ eine einfach unendliche Schar vom Index 1, $[F_1]$ gehört zur Klasse der Regelflächen*). Es bedeutet demnach keine wesentliche Spezialisierung, wenn im folgenden wegen der bequemeren Ausdrucksweise die Fläche $[F_1]$ als Regelfläche $[R_1]$ angenommen wird.

Es gibt nach dem Vorhergehenden zwei Arten der $[1, 2]$-Korrespondenzen zwischen zwei Regelflächen $[R_1]$ und $[R_2]$, *wenn* $[R_2]$ *nicht rational ist:*

1. Jeder Erzeugenden e_1 von $[R_1]$ ist eine Erzeugende e_2 von $[R_2]$ zugeordnet, und einem Punkt von e_1 entsprechen zwei Punkte auf e_2,

2. jeder Erzeugenden e_1 von $[R_1]$ entsprechen zwei Erzeugende e_2, e_2' von $[R_2]$ und einem Punkt von e_1 ist ein Punkt auf e_2 und einer auf e_2' zugeordnet.

§ 3.

Die [1, 2]-Korrespondenzen der 1. Art mit irreduktibler Doppelkurve.

4. In den drei folgenden Paragraphen sollen die $[1, 2]$-deutigen Verwandtschaften von der 1. Art zweier nicht zerfallender Regelflächen $[R_1]$ und $[R_2]$, *die keine Kegel sind*, behandelt werden, wobei $[R_2]$ das Geschlecht (der ebenen Schnitte) $p > 0$ hat. Zunächst sieht man sofort, daß auch $[R_1]$ das Geschlecht p hat, da jeder Erzeugenden e_2 von $[R_2]$ umkehrbar eindeutig eine Erzeugende e_1 von $[R_1]$ entspricht.

---

*) Dies ist ein spezieller Fall des Satzes, daß sich die Gruppen jeder Involution auf einer Regelfläche den Punkten einer Ebene oder einer Regelfläche ein-eindeutig zuordnen lassen. Vgl. Castelnuovo ed Enriques, Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche. Nr. 17. Annali di Matematica (3) 6 (1901).

5. Die Doppelkurve (D_2). Je zwei Punkte von $[R_2]$ entsprechen demselben Punkt von $[R_1]$; dadurch entsteht eine Involution von Punktpaaren auf $[R_2]$, durch die jede Erzeugende in sich übergeführt wird. Jede Erzeugende ist Trägerin einer Involution von Punktpaaren. Der Ort der Doppelpunkte dieser Involutionen ist die Doppelkurve (D_2) in der Beziehung zwischen $[R_1]$ und $[R_2]$, sie schneidet die Erzeugenden von $[R_2]$ in zwei Punkten. *Es sei zunächst vorausgesetzt, daß (D_2) irreduktibel ist.*

p ist das Geschlecht einer ebenen Schnittkurve von $[R_2]$; ist π das Geschlecht von (D_2), dann folgt durch Anwendung der Zeuthenschen Formel auf die durch die Erzeugenden vermittelte $[1, 2]$-Korrespondenz zwischen diesen beiden Kurven, daß die Doppelkurve (D_2) mit

$$\varepsilon = 2(\pi + 1) - 4p$$

Erzeugenden zwei konsekutive Punkte gemeinsam hat. Diese Erzeugenden tragen parabolische Involutionen. Außerdem möge es δ-mal vorkommen, daß sich die zwei Punkte von (D_2) auf einer Erzeugenden zu einem Doppelpunkt von (D_2) vereinigen. Auch auf diesen δ Erzeugenden liegen parabolische Involutionen; weitere parabolische Involutionen treten nicht auf.

Diese $\delta + \varepsilon$ Punkte von (D_2) sind die Fundamentalpunkte in der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich.

Daß es die einzigen sind, ist ohne weiteres klar, da in Nr. 4 vorausgesetzt wurde, daß $[R_2]$ kein Kegel ist. Sonst läge noch ein Fundamentalpunkt in der Spitze.

Einschränkende Voraussetzung. Im folgenden wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß sich die zwei Punkte von (D_2) auf einer Erzeugenden nie zu einer Spitze vereinigen.

6. Es sei d_2 die Ordnung von (D_2), n_2 die Ordnung von $[R_2]$. Durch die Erzeugenden e_2 ist (D_2) involutorisch auf sich bezogen. Diese Involution bestimmt in einem nicht speziellen Ebenenbüschel eine $[d_2, d_2]$-Korrespondenz, deren $2d_2$ Koinzidenzen in folgender Weise entstehen: zunächst liefert jede der ε Berührungen von (D_2) mit Erzeugenden e_2 eine Koinzidenz, dann jeder der δ Doppelpunkte von (D_2) zwei solche, endlich führt jede der n_2 Erzeugenden e_2, welche die Achse des Ebenenbüschels treffen, auf zwei Koinzidenzen. Daraus folgt

$$2d_2 = \varepsilon + 2\delta + 2n_2.$$

7. Die Kurven (S_2). In der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich entspricht einem nicht speziellen ebenen Schnitt (N_2) von $[R_2]$ eine Kurve (S_2). Wenn auf (N_2) zwei Punkte lägen, die einander entsprechen, würde durch diese beiden (S_2) hindurchgehen; da aber zwei solche Punkte immer derselben Erzeugenden von $[R_2]$ angehören und (N_2) nicht speziell

sein soll, tritt dies nicht ein. Die einzigen Schnittpunkte von (S_2) mit (N_2) sind folglich die Punkte, in denen (N_2) von der Doppelkurve (D_2) getroffen wird, d. h. (S_2) hat auch die Ordnung d_2.

Zwei ebene Schnittkurven (N_2) und (N_2') treffen sich in n_2 Punkten, die ihnen zugeordneten Kurven (S_2) und (S_2') in den diesen entsprechenden Punkten und in den $\delta + \varepsilon$ Fundamentalpunkten der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich (Nr. 5). (S_2) und (S_2') sind durch die Erzeugenden ein-eindeutig aufeinander bezogen; dadurch wird wieder in einem nicht speziellen Ebenenbüschel eine $[d_2, d_2]$-Korrespondenz definiert, deren Koinzidenzen von den Schnittpunkten der beiden Kurven herrühren und von den n_2 Erzeugenden von $[R_2]$, welche die Achse des Ebenenbüschels schneidet. Dies würde für $2d_2$ die Summe $\varepsilon + \delta + 2n_2$ liefern. Aus der Gleichung in Nr. 6 ist aber ersichtlich, daß die δ Fundamentalpunkte doppelt zählende Koinzidenzen liefern, in ihnen berühren sich die Kurven (S_2) und (S_2'). Dies ist im Reellen auch anschaulich klar, wenn man berücksichtigt, daß sich die Schnittpunktpaare (N_2), (S_2) und (N_2'), (S_2') auf den Erzeugenden, die zu der Fundamentalerzeugenden beiderseits unendlich benachbart sind, entweder zugleich trennen oder nicht trennen. Dies gibt zusammengefaßt:

Die Kurven (S_2) haben die Ordnung d_2 und gehen durch die ε Fundamentalpunkte mit veränderlicher Richtung, durch die δ Fundamentalpunkte mit fester Richtung hindurch.

(S_2) und (D_2) sind durch die Erzeugenden von $[R_2]$ $[1, 2]$-deutig aufeinander bezogen. Die in einem Ebenenbüschel dadurch hervorgerufene $[d_2, 2d_2]$-Korrespondenz führt wieder auf die Gleichung von Nr. 6.

Jeder Richtung durch einen Doppelpunkt P von (D_2) entspricht in der Beziehung von $[R_2]$ auf sich involutorisch eine ebensolche. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind die beiden eigentlichen Tangenten von (D_2) in P, der Richtung der Erzeugenden durch P entspricht die feste Richtung, in der die Kurven (S_2) durch P hindurchgehen. Diese feste Richtung ist also harmonisch zur Richtung der Erzeugenden in bezug auf die beiden Tangentenrichtungen von (D_2).

8. **Die Übergangskurve (U_1).** Auf jeder Erzeugenden von $[R_1]$ liegen zwei Punkte, denen die zwei Punkte der Doppelkurve auf der entsprechenden Erzeugenden zugeordnet sind. Es liegt demnach auf $[R_1]$ eine Übergangskurve (U_1), die jede Erzeugende in zwei Punkten trifft und umkehrbar eindeutig auf die Doppelkurve bezogen ist. Sie hat also ebenfalls das Geschlecht π, ist auch irreduktibel, von ε Erzeugenden wird sie in zwei konsekutiven Punkten getroffen.

9. **Die Fundamentalpunkte.** Ist ein Punkt der einen Fläche Fundamentalpunkt der Beziehung, so entspricht ihm eine ganze Kurve. Würde

diese Kurve von allen Erzeugenden ihrer Fläche getroffen werden, so müßte der Fundamentalpunkt auf allen korrespondierenden Erzeugenden liegen. Da keine der Flächen ein Kegel sein soll (Nr. 4), ist dies unmöglich. *Die Fundamentalkurven bestehen demnach aus Erzeugenden.*

Auf jeder Erzeugenden e_2 von $[R_2]$ liegt eine Involution, und die Punktpaare dieser Involution sind den Punkten der entsprechenden Erzeugenden e_1 von $[R_1]$ projektiv zugeordnet. Darin besteht die $[1, 2]$-Korrespondenz der 1. Art zwischen den zwei Flächen. Ist nun die Involution auf e_2 parabolisch, ohne daß die erwähnte Projektivität zwischen e_2 und e_1 ausartet, dann ist der Doppelpunkt auf e_2 Fundamentalpunkt in der Beziehung der beiden Flächen.

Die Projektivität zwischen den Punktpaaren auf e_2 und den Punkten von e_1 kann ausarten, und zwar kann dabei das singuläre Element auf e_2 aus einem Paar nicht zusammenfallender Punkte einer nicht parabolischen oder parabolischen Involution bestehen, oder dieses Punktpaar fällt in einem Doppelpunkt zusammen. Dabei liefern die parabolischen Involutionen in diesem und dem vorhergehenden Absatz verschiedene Fälle, je nachdem ihr Doppelpunkt zu den δ oder ε Punkten von (D_2) gehört (Nr. 5).

10. Daraus ergibt sich folgende Einteilung der Fundamentalpunkte, wenn e_1 und e_2 zwei einander entsprechende Erzeugende der beiden Flächen sind:

I. Auf e_2 liegt ein Fundamentalpunkt X_2, dem die Erzeugende e_1 entspricht, auf e_1 keiner. Die zwei Schnittpunkte von (D_2) mit e_2 liegen in X_2. Es sind zwei Fälle möglich:

1. in $X_2^{(1)}$ berührt (D_2) e_2, das sei $x^{(1)}$-mal der Fall;

2. in $X_2^{(2)}$ hat (D_2) einen Doppelpunkt, die Zahl dieser Doppelpunkte sei $x^{(2)}$.

II. Auf e_1 liegt ein Fundamentalpunkt Y_1, dem die Erzeugende e_2 entspricht, auf e_2 liegen zwei getrennte Fundamentalpunkte, Y_2, Y_2', jedem von ihnen entspricht e_1;

1. Die Involution auf e_2 ist nicht parabolisch, $Y_2^{(1)}$, $Y_2^{(1)\prime}$ eines ihrer Punktpaare, (D_2) trifft e_2 in zwei Punkten, die zu $Y_2^{(1)}$ und $Y_2^{(1)\prime}$ harmonisch liegen. Der Fundamentalpunkt auf e_1 heiße in diesem Fall $Y_1^{(1)}$, es gebe $y^{(1)}$ solcher Punkte $Y_1^{(1)}$;

2. Die Involution auf e_2 ist parabolisch, der eine Fundamentalpunkt, $Y_2^{(2)}$, liegt im Doppelpunkt, in ihm berührt (D_2) e_2; der andere Fundamentalpunkt heiße $Y_2^{(2)\prime}$, der Fundamentalpunkt auf e_1 $Y_1^{(2)}$; dieser Fall trete $y^{(2)}$-mal ein;

3. wie II_2, doch hat (D_2) im einen Fundamentalpunkt, $Y_2^{(3)}$, einen Doppelpunkt; $Y_2^{(3)\prime}$, $Y_1^{(3)}$, $y^{(3)}$ seien die den vorigen analogen Bezeichnungen.

III. Auf e_1 liegt ein Fundamentalpunkt Z_1, dem die Erzeugende e_2

entspricht, auf e_2 fallen zwei Fundamentalpunkte in Z_2 zusammen, jedem von ihnen entspricht e_1;

1. Die Involution auf e_2 ist nicht parabolisch, (D_2) schneidet im Fundamentalpunkt $Z_2^{(1)}$ die Erzeugende e_2 einfach; der Fundamentalpunkt auf e_1 werde mit $Z_1^{(1)}$ bezeichnet, die Zahl dieser Fundamentalpunkte mit $z^{(1)}$.

2. Die Involution auf e_2 ist parabolisch, der Fundamentalpunkt $Z_2^{(2)}$ ihr Doppelpunkt, in ihm berührt (D_2) e_2, auf e_1 liegt der Fundamentalpunkt $Z_1^{(2)}$, es trete dies $z^{(2)}$-mal ein;

3. wie III_2, nur hat (D_2) im Fundamentalpunkt $Z_2^{(3)}$ einen Doppelpunkt. $Z_1^{(3)}$ und $z^{(3)}$ seien die entsprechenden Bezeichnungen.*)

Einschränkende Voraussetzung. Im folgenden wird angenommen, daß nicht zwei unendlich benachbarte Erzeugende einer Fläche Fundamentalpunkte der eben aufgezählten Arten enthalten.

11. Aus Nr. 5, 9, 10 folgt:

$$\varepsilon = x^{(1)} + y^{(2)} + z^{(2)},$$
$$\delta = x^{(2)} + y^{(3)} + z^{(3)},$$
$$2(\pi - 2p + 1) = x^{(1)} + y^{(2)} + z^{(2)}. \tag{1}$$

Dann ergibt sich aus Nr. 6

$$2d_2 = x^{(1)} + 2x^{(2)} + y^{(2)} + 2y^{(3)} + z^{(2)} + 2z^{(3)} + 2n_2 \tag{2}$$

Die Anzahl der Fundamentalpunkte auf $[R_1]$ ist

$$\varphi_1 = y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)} + z^{(1)} + z^{(2)} + z^{(3)},$$

$[R_2]$ enthält

$$\varphi_2 = x^{(1)} + x^{(2)} + 2y^{(1)} + 2y^{(2)} + 2y^{(3)} + 2z^{(1)} + 2z^{(2)} + 2z^{(3)}$$

Fundamentalpunkte, darunter $z^{(1)} + z^{(2)} + z^{(3)}$ Paare zusammenfallender. Es ist

$$\varphi_2 - 2\varphi_1 = x^{(1)} + x^{(2)},$$
$$2\varphi_1 \leqq \varphi_2.$$

---

*) Schneidet man in einer Ebene einen Kegelschnitt (K) durch ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel S und das Strahlenbüschel mit einer Geraden g, so sind die Punktpaare auf dem Kegelschnitt der Punktreihe auf g projektiv zugeordnet. Liegt S auf (K) und ist g nicht speziell, so entspricht dies dem Falle I_1 und I_2; geht g durch S, ohne Tangente von (K) zu sein, und liegt S nicht auf (K), dann hat man das Analogon zu II_1, liegt S auf (K), das zu II_2 und II_3; geht die Gerade g durch S und ist sie Tangente von (K), dann liegen die Verhältnisse wie bei III_1, wenn S kein Punkt von (K) ist, dagegen wie bei III_2 und III_3, wenn S ein Punkt von (K) ist.

Bezeichnet man den Parameter auf e_1 mit x, den auf e_2 mit y, so besteht vermöge der $[1, 2]$-Korrespondenz eine in x lineare, in y quadratische Gleichung zwischen x und y. Wie diese in den Fällen I, II, III zerfällt ist ohne weiteres klar. Dabei nimmt die Involutionsgleichung für e_2 in den Fällen II und III die Form $0 = 0$ an, was auch ohne Rechnung einzusehen ist. Die Involutionen dieser beiden Fälle sind als Grenzfälle der unendlich benachbarten Involutionen bestimmt.

$[R_2]$ hat mindestens doppelt soviele Fundamentalpunkte wie $[R_1]$.

Dies gilt unabhängig von den einschränkenden Voraussetzungen in Nr. 5 und Nr. 10.

12. Die Fundamentalpunkte der Art I. Die nachfolgenden Resultate über die Fundamentalpunkte wurden einerseits unter Berücksichtigung der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich gewonnen, andererseits unter Heranziehung der am Schluß von Nr. 24 angegebenen Korrespondenzen.

Die $[1, 2]$-Beziehung zwischen einer Erzeugenden e_1 und einer Erzeugenden e_2, die einen Fundamentalpunkt X_2 trägt, zerfällt in der Weise, daß jedem Punkt von e_1 der Punkt X_2 entspricht und außerdem eine projektive Beziehung zwischen den Punkten von e_1 und e_2 besteht.

$X_1^{(1)}$ sei der Punkt, der dem Fundamentalpunkt $X_2^{(1)}$ vom Typus I_1 in dieser projektiven Beziehung entspricht. In $X_2^{(1)}$ berührt (D_2) e_2, und da $X_1^{(1)}$ der einzige Punkt auf e_1 ist, dem zusammenfallende Punkte entsprechen, liegen die beiden Schnittpunkte der Übergangskurve (U_1) mit e_1 in $X_1^{(1)}$, und zwar berührt in $X_1^{(1)}$ (U_1) e_1, da sonst $X_1^{(1)}$ vier in $X_2^{(1)}$ zusammenfallende Punkte entsprächen, $X_1^{(1)}$ Fundamentalpunkt wäre.

Den Richtungen durch $X_2^{(1)}$ entsprechen die Punkte von e_1 umkehrbar eindeutig und zwar so, daß der Richtung von e_2 der Punkt $X_1^{(1)}$ entspricht, da wegen der Projektivität zwischen den Punkten von e_1 und e_2 dem zu $X_1^{(1)}$ unendlich benachbarten Punkt der zu $X_2^{(1)}$ unendlich benachbarte Punkt zugeordnet ist.

13. In einem Fundamentalpunkt $X_2^{(2)}$ der Art I_2 hat (D_2) einen Doppelpunkt. $X_1^{(2)}$ sei der Punkt, der in der projektiven Beziehung zwischen e_1 und e_2 dem Punkt $X_2^{(2)}$ entspricht. (U_1) kann e_1 nur in $X_1^{(2)}$ treffen; es hat in $X_1^{(2)}$ einen Doppelpunkt, denn dem Punkt $X_1^{(2)}$ als Punkt von (U_1) entsprechen in der umkehrbar eindeutigen Beziehung zwischen (U_1) und (D_2) die beiden im Doppelpunkt $X_2^{(2)}$ zusammenfallenden Punkte.

Den beiden Richtungen, in denen (D_2) durch $X_2^{(2)}$ hindurchgeht, entspricht auf e_1 der Punkt $X_1^{(2)}$, da durch ihn (U_1) doppelt hindurchgeht, d. h. die projektive Beziehung zwischen den Richtungen durch $X_2^{(2)}$ und den Punkten von e_1 artet aus, einer festen Richung durch $X_2^{(2)}$ (vgl. Schluß von Nr. 7) entsprechen sämtliche Punkte von e_1, dem Punkt $X_1^{(2)}$ die sämtlichen Richtungen durch $X_2^{(2)}$. Die Richtungen durch $X_1^{(2)}$ sind den Richtungen durch $X_2^{(2)}$ projektiv zugeordnet.

14. Die Fundamentalpunkte der Art II. e_1 und e_2 seien zwei einander entsprechende Erzeugende, die Fundamentalpunkte vom Typus II_1 enthalten. Jeder Richtung durch $Y_1^{(1)}$ entsprechen zwei Punkte auf e_2, die ein Punktpaar der Involution mit den Doppelpunkten $Y_2^{(1)}$ und $Y_2^{(1)\prime}$ bilden. Den Doppelpunkten selbst entsprechen zwei voneinander verschiedene

Richtungen, in denen (U_1) durch $Y_1^{(1)}$ hindurchgeht. Jedem Punkt von e_1 entspricht eine Richtung durch $Y_2^{(1)}$ und eine solche durch $Y_2^{(1)\prime}$. Die Projektivität zwischen den Richtungen durch $Y_1^{(1)}$ und den Punktpaaren von e_2 artet nicht aus, da sonst gegen die Voraussetzung am Schluß von Nr. 10 auch die zu e_2 unendlich benachbarte Erzeugende Fundamentalpunkte vom Typus II_1 enthielte.

15. Ist e_2 eine Erzeugende, die zwei Fundamentalpunkte der Art II_2 enthält, dann entspricht einem Punkt von e_2 eine Richtung durch $Y_1^{(2)}$, einer Richtung durch $Y_1^{(2)}$ ein Punkt von e_2 und eine Richtung durch $Y_2^{(2)}$. Die Richtungen durch $Y_1^{(2)}$ und diejenigen durch $Y_2^{(2)}$ sind einander projektiv zugeordnet, dabei entspricht der Richtung von e_1 diejenige von e_2. In der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich ist dem Punkt $Y_2^{(2)\prime}$ eine Richtung durch $Y_2^{(2)}$ zugeordnet. Einem Punkt von e_1 entspricht diese feste Richtung durch $Y_2^{(2)}$, d. h. eine veränderliche Krümmung mit fester Tangente, und eine veränderliche Richtung durch $Y_2^{(2)\prime}$. Nur dem Punkt $Y_1^{(2)}$ sind sämtliche Richtungen durch $Y_2^{(2)}$ zugeordnet und die Richtung von e_2 durch $Y_2^{(2)\prime}$. (U_1) berührt e_1 in $Y_1^{(2)}$ nicht, denn dem zu $Y_1^{(2)}$ unendlich benachbarten Punkt von (U_1) entspräche die feste Richtung durch $Y_2^{(2)}$; (U_1) hat folglich in $Y_1^{(2)}$ eine Spitze.

16. Im Fall II_3 trifft (U_1) e_1 nur in $Y_1^{(3)}$, da wieder nur diesem Punkt zusammenfallende Punkte auf e_2 entsprechen. Jedem Punkte P_2 von e_2 ist eine bewegliche Richtung durch $Y_1^{(3)}$ zugeordnet und dieser außer P_2 noch eine veränderliche Krümmung in $Y_2^{(3)}$ mit der festen Tangente, die zu den beiden Richtungen von (D_2) und zu e_2 harmonisch liegt. Die Projektivität zwischen den Tangenten in $Y_1^{(3)}$ und $Y_2^{(3)}$ artet aus: allen Richtungen durch $Y_1^{(3)}$ entspricht die erwähnte feste Richtung in $Y_2^{(3)}$, allen Richtungen durch $Y_2^{(3)}$ eine feste Richtung durch $Y_1^{(3)}$. In dieser berührt sich (U_1) selbst, die Richtung muß folglich von e_1 verschieden sein.

17. Die Fundamentalpunkte der Art III. In der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich entspricht jeder Punkt von (D_2) sich selbst. P sei ein einfacher Punkt der Doppelkurve, in dem sie nicht eine Erzeugende berührt. Jeder Richtung durch P entspricht involutorisch eine solche, die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Tangentenrichtung in P an (D_2) und die Richtung der Erzeugenden durch P.

Ist $Z_1^{(1)}$ ein Fundamentalpunkt der Art III_1 auf der Erzeugenden e_1, $Z_1^{(2)}$ der ihm zugeordnete auf e_2, dann entspricht jeder Richtung durch $Z_1^{(1)}$ ein Punktpaar der Involution auf e_2. Jeder Punkt von e_1 bestimmt vier konsekutive Punkte, von denen zwei auf e_2 in $Z_1^{(2)}$ liegen. Dem Punkt der Doppelkurve auf e_2 außerhalb $Z_2^{(1)}$ ist eine Richtung durch $Z_1^{(1)}$ zugeordnet, in der die Übergangskurve durch den Fundamentalpunkt hindurchgeht, während der Richtung von (D_2) in $Z_2^{(1)}$ ein Punkt A auf e_1 außer-

halb des Fundamentalpunktes entspricht. Jede Richtung durch A bestimmt zwei Richtungen durch $Z_1^{(2)}$, die ein Paar der am Anfang dieser Nr. erwähnten Involution bilden.

18. Beim Typus III_2 sind die Verhältnisse die folgenden: Einer Richtung durch $Z_1^{(2)}$ entspricht eine bewegliche Richtung durch $Z_2^{(2)}$ und ein beweglicher Punkt auf e_2, dabei entspricht der Richtung von e_1 die von e_2; jedem Punkt von e_2 ist eine bewegliche Richtung durch $Z_1^{(2)}$ zugeordnet. (U_1) berührt e_1 in $Z_1^{(2)}$. Jeder Punkt von e_1 bestimmt vier unendlich benachbarte Punkte, von denen zwei auf e_2 liegen und noch ein dritter fest ist.

19. Im Fall III_3 entspricht in der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich einem Punkt P von e_2 eine Krümmung mit fester Tangente in $Z_2^{(3)}$. Jeder Richtung durch $Z_1^{(3)}$ ist demnach eine Krümmung mit dieser festen Tangente in $Z_2^{(3)}$ und ein beweglicher Punkt auf e_2 zugeordnet. Fällt die Richtung nach e_1, dann kommt der bewegliche Punkt nach $Z_2^{(3)}$. Jedem Punkt von e_1 entsprechen zwei Richtungen durch $Z_2^{(3)}$, die zu den Richtungen von (D_2) harmonisch liegen. Durch die zwei Punkte von e_1, denen die Richtungen der Doppelkurve zugeordnet sind, geht (U_1) hindurch. Dem Punkt $Z_1^{(3)}$ entspricht die Richtung von e_2 und die feste Richtung.

20. Zusammenfassung. Aus Nr. 10 und Nr. 12—19 ergibt sich das folgende Verhalten der Doppelkurve und der Übergangskurve in den Fundamentalpunkten:

Die Doppelkurve (D_2) berührt in den Fundamentalpunkten $X_2^{(1)}$, $Y_2^{(2)}$, $Z_2^{(2)}$ die zugehörigen Erzeugenden, geht durch die Fundamentalpunkte $Y_2^{(1)}$, $Y_2^{(1)\prime}$, $Y_2^{(2)\prime}$, $Y_2^{(3)\prime}$ gar nicht hindurch, durch die Fundamentalpunkte $Z_2^{(1)}$ einfach, durch die Fundamentalpunkte $X_2^{(2)}$, $Y_2^{(3)}$, $Z_2^{(3)}$ doppelt.

Die Übergangskurve (U_1) berührt in den Punkten $X_1^{(1)}$ und in den Fundamentalpunkten $Z_1^{(2)}$ die zugehörigen Erzeugenden, enthält die Fundamentalpunkte $Z_1^{(3)}$ gar nicht, geht durch die Fundamentalpunkte $Z_1^{(1)}$ einfach hindurch, durch die Punkte $X_1^{(2)}$ und die Fundamentalpunkte $Y_1^{(1)}$ doppelt, hat in jedem Fundamentalpunkt $Y_1^{(2)}$ eine Spitze und berührt sich selbst in den Fundamentalpunkten $Y_1^{(3)}$.

21. Die Involution auf (U_1). Durch die Erzeugenden von $[R_1]$ wird auf (U_1) eine Involution von Punktpaaren ausgeschnitten. Aus der dazu gehörigen Korrespondenz in einem Ebenenbüschel ergibt sich analog wie in Nr. 6, wenn n_1 die Ordnung von $[R_1]$, u_1 die von (U_1) bezeichnet,*) unter Berücksichtigung von Nr. 20 und der Bezeichnungen von Nr. 10:

$$2u_1 = x^{(1)} + 2x^{(2)} + 2y^{(1)} + 3y^{(2)} + 4y^{(3)} + z^{(2)} + 2n_1. \tag{3}$$

*) Daß die Doppelpunkte von (U_1) hier zweifache, die Spitzen dreifache Koinzidenzen liefern, zeigt das folgende Beispiel: Es sei eine ebene Kurve 3. Ordnung (C^3)

22. Die Kurven (G_1). Einem nicht speziellen ebenen Schnitt von $[R_2]$ entspricht auf $[R_1]$ umkehrbar eindeutig eine Kurve (G_1) vom Geschlecht p (Nr. 4), deren Ordnung m sei. Sie trifft jede Erzeugende von $[R_1]$ in einem Punkt. Aus den Betrachtungen über die Fundamentalpunkte folgt:

Die Kurven (G_1) *gehen durch die Fundamentalpunkte* $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, Y_1^{(3)}, Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, Z_1^{(3)}$ *in beweglicher Richtung einfach hindurch.*

Zwei solche Kurven (G_1) schneiden sich in den Fundamentalpunkten von $[R_1]$, außerdem in den n_2 Punkten, die den Schnittpunkten der ihnen entsprechenden ebenen Schnitte von $[R_2]$ zugeordnet sind, endlich dann, wenn einem Punkt von $[R_1]$ zwei Punkte in den beiden ebenen Schnitten von $[R_2]$ entsprechen. Die Anzahl dieser Punkte ist der Ordnung der Kurve gleich, welche in der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich einem ebenen Schnitt entspricht, also (nach Nr. 7) d_2. Durch die Erzeugenden von $[R_1]$ sind zwei solche Kurven (G_1) ein-eindeutig aufeinander bezogen, dann folgt wieder aus der dadurch hervorgerufenen Korrespondenz in einem Ebenenbüschel:

$$2m = y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)} + z^{(1)} + z^{(2)} + z^{(3)} + n_2 + d_2 + n_1,$$

und unter Berücksichtigung von Gl. (2):

$$(4)\quad 4m = x^{(1)} + 2x^{(2)} + 2y^{(1)} + 3y^{(2)} + 4y^{(3)} + 2z^{(1)} + 3z^{(2)} + 4z^{(3)} + 2n_1 + 4n_2.$$

23. Die Kurven (G_2). Einem nicht speziellen ebenen Schnitt von $[R_1]$ entspricht auf $[R_2]$ eine Kurve (G_2), wie (G_1) von der Ordnung m. (G_2) trifft jede Erzeugende in zwei Punkten. Das Geschlecht von (G_2) sei p'; da p das Geschlecht eines ebenen Schnittes von $[R_2]$ ist, hat (G_2) mit

$$\alpha = 2(p' - 2p + 1)$$

Erzeugenden zwei konsekutive Punkte gemeinsam.

Aus den Untersuchungen über die Fundamentalpunkte folgt:

Die Kurven (G_2) *treffen die Fundamentalpunkte* $X_2^{(1)}, Y_2^{(1)}, Y_2^{(1)\prime}, Y_2^{(2)\prime}, Y_2^{(3)\prime}$ *einfach mit beweglicher Tangente, durch die Fundamentalpunkte* $X_2^{(2)}, Y_2^{(2)}$ *gehen sie in fester Richtung hindurch, in den Fundamentalpunkten* $Z_2^{(1)}$ *berühren sie die zugehörigen Erzeugenden, ebenso in* $Z_2^{(2)}$, *doch hier*

gegeben und in derselben Ebene ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel S auf (C^3) liegt, ein anderes in der nämlichen Ebene, dessen Scheitel T nicht auf (C^3) liegt. Jeder Strahl durch S schneidet (C^3) in zwei beweglichen Punkten, die Strahlen durch T und diese zwei Kurvenpunkte sollen einander zugeordnet werden. Dann entsteht im Strahlenbüschel T eine involutorische [3, 3]-Korrespondenz. Die sechs Koinzidenzen rühren, wenn (C^3) elliptisch ist, von den vier Tangenten aus S an (C^3) und vom Strahl ST her, der doppelt zählt. Hat (C^3) einen Doppelpunkt, dann absorbiert er zwei von den vier Tangenten, eine Spitze drei. Analog findet man durch eine Kurve 4. Ordnung, daß eine Selbstberührung vierfach zählt.

mit fester Krümmung, in den Fundamentalpunkten $Z_2^{(3)}$ haben sie Doppelpunkte mit beweglichen Tangenten, in den Fundamentalpunkten $Y_2^{(3)}$ haben sie feste Krümmung.

In $z^{(1)}+z^{(2)}$ Fundamentalpunkten berühren die Kurven (G_2) die zugehörigen Erzeugenden, die übrigen Berührungen rühren von den Treffpunkten des entsprechenden ebenen Schnittes und der Übergangskurve her. Die Übergangskurve hat die Ordnung u_1, daraus folgt:

$$a = z^{(1)} + z^{(2)} + u_1,$$

und aus der vorigen Gleichung und aus (3):

$$(5)\quad 4(p'-2p+1) = x^{(1)} + 2x^{(2)} + 2y^{(1)} + 3y^{(2)} + 4y^{(3)} + 2z^{(1)} + 3z^{(2)} + 2n_1.$$

24. **Zusammenfassung.** Die bisher abgeleiteten Gleichungen seien der Übersicht halber hier zusammengestellt:

$$(1)\quad 2(\pi-2p+1) = x^{(1)} + y^{(2)} + z^{(2)},$$

$$(2)\quad 2d_2 = x^{(1)} + 2x^{(2)} + y^{(2)} + 2y^{(3)} + z^{(2)} + 2z^{(3)} + 2n_2,$$

$$(3)\quad 2u_1 = x^{(1)} + 2x^{(2)} + 2y^{(1)} + 3y^{(2)} + 4y^{(3)} + z^{(2)} + 2n_1,$$

$$(4)\quad 4m = x^{(1)} + 2x^{(2)} + 2y^{(1)} + 3y^{(2)} + 4y^{(3)} + 2z^{(1)} + 3z^{(2)} + 4z^{(3)} + 2n_1 + 4n_2,$$

$$(5)\quad 4(p'-2p+1) = x^{(1)} + 2x^{(2)} + 2y^{(1)} + 3y^{(2)} + 4y^{(3)} + 2z^{(1)} + 3z^{(2)} + 2n_1.$$

Dann folgt:

$$(3^*)\quad u_1 - d_2 = y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)} - z^{(3)} + n_1 - n_2, \qquad \text{aus (2) und (3)},$$

$$(4^*)\quad 2m - u_1 = z^{(1)} + z^{(2)} + 2z^{(3)} + 2n_2, \qquad \text{aus (3) und (4)},$$

$$(5^*)\quad p' - 2p + 1 = m - n_2 - z^{(3)}, \qquad \text{aus (4) und (5)},$$

$$(6^*)\quad 2(p'-2p+1) = z^{(1)} + z^{(2)} + u_1, \qquad \text{aus (3) und (5)}.$$

Durch die Erzeugenden von $[R_2]$ wird (G_2) involutorisch auf sich bezogen. Diese Involution liefert wieder eine Korrespondenz in einem Ebenenbüschel, aus der sich ergibt:

$$2m = 2n_2 + z^{(1)} + z^{(2)} + u_1 + 2z^{(3)},$$

das ist aber Gleichung (4*). Desgleichen liefert die durch die Erzeugenden von $[R_2]$ vermittelte Korrespondenz zwischen zwei Kurven (G_2) die Gleichung (4), ebenso die Beziehung zwischen (D_2) und einer Kurve (G_2).

§ 4.

Die [1, 2]-Korrespondenzen der 1. Art mit reduktibler Doppelkurve.

25. Doppel- und Übergangskurven. Auf $[R_2]$ liege wieder eine Doppelkurve (D_2) von der Ordnung d_2, *die aber in zwei Kurven zerfällt**), $(D_2^{(1)})$ und $(D_2^{(2)})$, deren jede die Erzeugenden in einem Punkt trifft. Die Ordnungen der Teile seien $d_2^{(1)}$ und $d_2^{(2)}$; sie haben dasselbe Geschlecht p wie $[R_2]$. Auch die Übergangskurve (U_1) von der Ordnung u_1 besteht dann aus zwei Teilen $(U_1^{(1)})$ und $(U_1^{(2)})$ vom Geschlecht p, ihre Ordnungen seien $u_1^{(1)}$ und $u_1^{(2)}$.

Aus der durch die Erzeugenden von $[R_2]$ vermittelten Korrespondenz zwischen $(D_2^{(1)})$ und $(D_2^{(2)})$ folgt, wenn γ die Zahl der Schnittpunkte, in denen entsprechende Punkte der beiden Teile liegen, bedeutet:

$$d_2^{(1)} + d_2^{(2)} = d_2 = \gamma + n_2.$$

Entsprechend findet man

$$u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = u_1 = \beta + n_1,$$

wobei sich die beiden Übergangskurven in β entsprechenden Punkten treffen.

26. Die Involution auf $[R_2]$. Die γ Schnittpunkte der beiden Doppelkurven sind die Fundamentalpunkte der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich. Analog wie in Nr. 7 ergibt sich wieder, daß einem ebenen Schnitt von $[R_2]$ in dieser Involution eine Kurve von der Ordnung d_2 entspricht, die durch jeden der γ Fundamentalpunkte mit fester Richtung hindurchgeht. Die feste Richtung liegt harmonisch zur Erzeugenden dieses Punktes in bezug auf die beiden Tangenten an die Doppelkurven.

27. Fundamentalpunkte. Aus Betrachtungen, die den Überlegungen des vorigen Kapitels über die Fundamentalpunkte ganz analog sind, folgt, daß hier nur Fundamentalpunkte vom Typus I_2, II_1, II_3, III_1, III_3 auftreten. Es ist also hier

$$x^{(1)} = y^{(2)} = z^{(2)} = 0. \tag{6}$$

In den Fundamentalpunkten verhalten sich die Kurven (G_1) und (G_2) so, wie es in Nr. 22 und Nr. 23 angegeben wurde. Auch die Resultate von Nr. 20 über die Doppel- und Übergangskurve sind ohne weiteres übertragbar, nur tritt statt eines Doppelpunktes dort hier ein Schnittpunkt der beiden Kurven auf, statt der Selbstberührung der Übergangskurve hat man es hier mit einer Berührung der beiden Übergangskurven zu tun. Die Gleichung (1) von Nr. 24 hat hier kein Analogon, dagegen findet man

*) Es gelten wieder die bisherigen einschränkenden Voraussetzungen und die bisherigen Bezeichnungen.

den übrigen ganz entsprechende Gleichungen unter Berücksichtigung der zwei Gleichungen von Nr. 25. Es ist

$$(2a)\qquad d_2 = x^{(2)} + y^{(3)} + z^{(3)} + n_2,$$
$$(3a)\qquad u_1 = x^{(2)} + y^{(1)} + 2y^{(3)} + n_1,$$
$$(4a)\qquad 2m = x^{(2)} + y^{(1)} + 2y^{(3)} + z^{(1)} + 2z^{(3)} + n_1 + 2n_2,$$
$$(5a)\qquad 2(p'-2p+1) = x^{(2)} + y^{(1)} + 2y^{(3)} + z^{(1)} + n_1,$$
$$(3a^*)\qquad u_1 - d_2 = y^{(1)} + y^{(3)} - z^{(3)} + n_1 - n_2,$$
$$(4a^*)\qquad 2m - u_1 = z^{(1)} + 2z^{(3)} + 2n_2,$$
$$(5a^*)\qquad p' - 2p + 1 = m - n_2 - z^{(3)},$$
$$(6a^*)\qquad 2(p'-2p+1) = z^{(1)} + u_1.$$

§ 5.

Schnitte von $[R_2]$ mit Flächen 2. Grades.

28. Es liege eine $[1, 2]$-Transformation 1. Art zweier Regelflächen mit irreduktibler oder reduktibler Doppelkurve vor. Ein Büschel von Flächen 2. Grades schneidet aus einer Geraden eine Involution aus. Nimmt man sieben Punkte im Raum fest an, dann kann man die Involution auf jeder Erzeugenden von $[R_2]$ durch ein Büschel von Flächen 2. Grades ausschneiden, das dem Flächenbündel durch die sieben Punkte angehört; denn die Involution ist durch zwei Punktpaare bestimmt und durch die zwei Flächen des Bündels durch diese Paare das Büschel. Dadurch wird jedem Punkt von $[R_1]$ die Fläche des Bündels zugeordnet, welche die zwei entsprechenden Punkte aus $[R_2]$ ausschneidet. Wird dabei jede Fläche des Bündels $\varkappa$-mal benützt, so besteht zwischen den Punkten von $[R_1]$ und den Flächen des Bündels eine $[\varkappa, 1]$-Korrespondenz. Diese Zahl $\varkappa$ soll jetzt bestimmt werden.

29. Eine Fläche $[F^2]$ 2. Ordnung, die mit $[R_2]$ μ Erzeugende gemeinsam hat, schneidet $[R_2]$ in einer Restschnittkurve (C) $(2n_2-\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist d_2 die Gesamtordnung der Doppelkurve, so entspricht einem ebenen Schnitt von $[R_2]$ eine Kurve d_2^{ter} Ordnung in der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich. Diese Kurve trifft $[F^2]$ in $2d_2$ Punkten, von denen $2d_2 - 2\mu$ auf (C) liegen. Daraus folgt, daß (C) in der involutorischen Beziehung von $[R_2]$ auf sich eine Kurve von der Ordnung $2d_2 - 2\mu$ entspricht. Diese Kurve trifft $[F^2]$ in $4d_2 - 4\mu$*) Punkten, von denen $2d_2 - 2\mu$ auf der Doppelkurve liegen, die übrigen $2d_2 - 2\mu$ Punkte liegen zu je zweien auf einer Erzeugenden. Es gibt also $d_2 - \mu$ Paare

*) Wenn sie nicht ganz auf der Fläche liegt, was nur in speziellen Fällen eintritt.

der Involution auf $[R_2]$, die von $[F^2]$ ausgeschnitten werden. Es ist $\varkappa = d_2 - \mu$.

Eine nicht spezielle Fläche 2. Grades, die mit $[R_2]$ μ *Erzeugende gemeinsam hat, schneidet* $d_2 - \mu$ *nicht auf den* μ *Erzeugenden liegende Punktpaare der Involution auf* $[R_2]$ *aus, wenn* d_2 *die Ordnung der Doppelkurve ist.*

30. Es soll in Nr. 30—32 gezeigt werden, *daß von den in den Gleichungen* (1)—(5) *vorkommenden Größen nur soviele voneinander numerisch abhängen, als durch diese Gleichungen bestimmt sind.* Es seien zwei Regelflächen $[R_1]$ und $[R_2]$ von den Ordnungen n_1 und n_2 gegeben, deren ebene Schnitte das Geschlecht p haben. Zwischen einem ebenen Schnitt von $[R_1]$ und einem solchen von $[R_2]$ bestehe eine birationale Beziehung. Dann hängen die Größen n_1, n_2, p voneinander nicht durch Gleichungen ab.

Auf $[R_2]$ sei außerdem eine Kurve (D_2) von der Ordnung d_2 und vom Geschlecht π gegeben, die jede Erzeugende in zwei Punkten trifft. Diese zwei Punkte sollen sich nur in gewöhnlichen Doppelpunkten der Kurve oder zu einfacher Berührung vereinigen. Die Größen p, n_1, n_2, d_2, π sind voneinander numerisch unabhängig.*) Dann berührt (D_2) (Nr. 5)

$$\varepsilon = 2(\pi + 1) - 4p$$

Erzeugende und die Zahl δ der eben erwähnten gewöhnlichen Doppelpunkte ist (Nr. 6)

$$\delta = d_2 - n_2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt, daß auch $p, n_1, n_2, \varepsilon, \delta$ voneinander nicht numerisch abhängen. Es seien nun auf $[R_1]$ drei Kurven (C_1), (C_2), (C_3) von der durch die bisherigen Größen noch nicht bestimmten Ordnung α gegeben, die jede Erzeugende in einem Punkt treffen. Irgend zwei dieser Kurven schneiden sich in

$$\beta = 2\alpha - n_1$$

Punkten. Auf $[R_1]$ liegen also 3β Schnittpunkte zweier solcher Kurven (C_i). Die Größen $p, n_1, n_2, \varepsilon, \delta, \beta$ sind voneinander numerisch unabhängig.

31. Es seien drei feste Punkte P_1, P_2, P_3 des Raumes gegeben. Man betrachtet nun das Bündel aller Flächen 2. Grades durch sieben feste Punkte $Q_1, Q_2, \cdots, Q_7$ des Raumes. Auf jeder Erzeugenden e_2 von $[R_2]$ liegen zwei Punkte der Kurve (D_2), in jedem dieser Punkte berührt eine Fläche des Bündels die Gerade e_2. Diese zwei Flächen bestimmen ein Büschel von Flächen 2. Grades, das aus e_2 eine Involution ausschneidet, deren Doppelpunkte auf (D_2) liegen. So wird durch das Flächenbündel und die Kurve (D_2) eine Involution von Punktpaaren auf $[R_2]$ bestimmt, deren

*) Daß Ungleichungen zwischen ihnen bestehen, spielt hier keine Rolle, es handelt sich um Abhängigkeit durch Gleichungen.

Doppelkurve (D_2) ist. Andererseits ist durch die oben erwähnte birationale Beziehung zwischen zwei ebenen Schnitten der Regelflächen eine ebensolche zwischen ihren Erzeugenden e_1 und e_2 festgelegt. Läßt man nun dem Schnittpunkt von (C_1) mit e_1 das Punktpaar der Involution auf e_2 entsprechen, das durch die Fläche 2. Ordnung des Büschels ausgeschnitten wird, die durch P_1 hindurchgeht, und macht man dasselbe für (C_2), P_2 und (C_3), P_3, dann ist dadurch zwischen $[R_1]$ und $[R_2]$ eine $[1, 2]$-Transformation 1. Art bestimmt. Ganz analog liegen die Verhältnisse bei reduktibler Doppelkurve.

Ist umgekehrt eine solche Transformation gegeben, so kann man sich (nach Nr. 28) die Punkte P_i und Q_j willkürlich vorgeben und bekommt dadurch die Kurven (C_i). D. h. *in dieser Weise läßt sich jede* $[1, 2]$-*Transformation 1. Art erzeugen.* Dabei wird nach Nr. 29 jede Fläche 2. Ordnung d_2-mal benutzt, wenn man zweimal drei Grundpunkte des Bündels auf einer Erzeugenden von $[R_2]$ annimmt (d_2-2)-mal. Da man die Flächen 2. Grades des Bündels birational den Punkten einer Ebene zuordnen kann, *sind damit die Punktpaare der Involution auf* $[R_2]$, *oder, was dasselbe ist, die Punkte von* $[R_1]$ *auf eine* (d_2-2)-*fach überdeckte Ebene abgebildet.* Dies gilt ohne einschränkende Voraussetzungen.

32. Es sind die Fundamentalpunkte der in dieser Weise erzeugten $[1, 2]$-Transformation zu bestimmen. Wenn sich zwei Kurven (C_i), z. B. (C_1) und (C_2), in einem Punkt einer Erzeugenden e_1 treffen, so artet die projektive Beziehung zwischen der Punktreihe e_1 und dem entsprechenden Büschel von Flächen 2. Grades aus. Die Fundamentalelemente sind der Schnittpunkt und die Fläche durch P_3. Je nachdem die zugeordnete Erzeugende e_2 von (D_2) in zwei getrennten Punkten getroffen oder berührt wird oder einen Doppelpunkt von (D_2) enthält, hat man einen der $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ oder $y^{(3)}$ Fundamentalpunkte, wenn die Fläche durch P_3 e_2 nicht berührt. Wenn aber die Fläche durch P_3 e_2 berührt, was nur in einem Punkt von (D_2) stattfinden kann, dann hat man einen der $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ oder $z^{(3)}$ Fundamentalpunkte, je nachdem e_2 von (D_2) in zwei getrennten Punkten getroffen, berührt wird, oder einen Doppelpunkt von (D_2) enthält. Die übrigen Berührungen von (D_2) mit Erzeugenden e_2 führen auf die $x^{(1)}$ Fundamentalpunkte, die übrigen Doppelpunkte auf die $x^{(2)}$ Fundamentalpunkte. Es lassen sich, wie man unschwer erkennt, die Kurven (C_i) so bestimmen, daß jede der Zahlen $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, $z^{(3)}$ verschiedene Werte annimmt, und zwar fünf davon unabhängig voneinander, die sechste bestimmt die Gleichung

$$y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)} + z^{(1)} + z^{(2)} + z^{(3)} = 3\beta.$$

Die Größen $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ sind dann bestimmt durch

$$x^{(1)} = \varepsilon - y^{(2)} - z^{(2)},$$
$$x^{(2)} = \delta - y^{(3)} - z^{(3)}.$$

Nun sind nach Nr. 30 die Größen $p, n_1, n_2, \varepsilon, \delta, \beta$ voneinander numerisch unabhängig, *folglich auch die Größen* $p, n_1, n_2, x^{(1)}, x^{(2)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}$. Diese Größen bestimmen nach Gleichung (1) π, nach (2) d_2, nach (3) u_1, nach (4) m, nach (5) p'.

Eine analoge Betrachtung läßt sich für die Gleichungen (2a)—(5a) durchführen. Die bei der Ableitung dieser zwei Gruppen von Gleichungen gemachten einschränkenden Voraussetzungen von Nr. 5 und Nr. 10 sind für die letzte Betrachtung nicht wesentlich; die den Gleichungen (1)—(5) und (2a)—(5a) entsprechenden Gleichungen, die man ohne diese Voraussetzungen erhält, leisten dasselbe wie hier diese Gleichungen.

§ 6.

Die [1, 2]-deutigen Verwandtschaften der 2. Art.

33. Es seien $[R_1]$ und $[R_2]$ wieder zwei irreduktible Regelflächen von den Ordnungen n_1 und n_2, die keine Kegel sind. Ihre ebenen Schnitte sollen das Geschlecht p_1 und p_2 haben; dabei sei $p_2 > 0$.

Zwischen den Flächen bestehe eine [1, 2]-Transformation der 2. Art (Nr. 3). Dann entsprechen den Punkten einer Erzeugenden e_2 von $[R_2]$ projektiv die Punkte einer Erzeugenden e_1 von $[R_1]$ und den Punkten dieser außerdem noch projektiv die Punkte einer zweiten Erzeugenden e_2' von $[R_2]$. Die Involution auf $[R_2]$ ist also so beschaffen, daß jeder Erzeugenden e_2 eine andere, e_2', projektiv entspricht. Da die ebenen Schnitte der beiden Flächen [1, 2]-deutig aufeinander bezogen sind, folgt aus der Zeuthenschen Koinzidenzformel, daß

$$\lambda = 2(p_2 + 1) - 4p_1 \tag{7}$$

Erzeugende e_2 mit den ihnen involutorisch entsprechenden e_2' zusammenfallen. *Sie bilden die Doppelkurve der Transformation. Ihnen entsprechen* λ *Erzeugende auf* $[R_1]$, *welche die Übergangskurve bilden.*

Aus (7) ergibt sich noch

$$p_2 + 1 - 2p_1 \geqq 0,$$
$$p_2 - p_1 \geqq p_1 - 1,$$
$$p_2 \geqq p_1,$$

dabei kann das Gleichheitszeichen nur im Fall $p_1 = 1$ eintreten.

34. Fundamentalpunkte der [1, 2]-Korrespondenz. Wie am Anfang von Nr. 9 sieht man wieder, daß die Fundamentalkurven der Beziehung zwischen $[R_1]$ und $[R_2]$ aus Erzeugenden bestehen. Aus dem Ausarten der Projektivitäten erkennt man, daß ein Fundamentalpunkt der

einen Fläche zu einem solchen auf der Fundamentalerzeugenden der anderen Fläche führt. Es ergibt sich folgende Einteilung der Fundamentalpunkte:

I. Einem Fundamentalpunkt Ξ_2 auf einer Erzeugenden e_2 von $[R_2]$ entspricht e_1. e_1 enthält einen Fundamentalpunkt Ξ_1, dem e_2 zugeordnet ist. Die Projektivität zwischen e_1 und e_2'*) artet nicht aus. ξ sei die Zahl dieser Fundamentalpunkte.**)

II$_1$. Einem Fundamentalpunkt $H_2^{(1)}$ auf e_2 entspricht e_1. Auf e_1 liegt ein Fundamentalpunkt $H_1^{(1)}$ mit der Fundamentalerzeugenden e_2, außerdem ein weiterer, $H_1^{(1)'}$, der von $H_1^{(1)}$ endlich entfernt ist und dem e_2' entspricht. Dabei enthält e_2' selbst einen Fundamentalpunkt $H_2^{(1)'}$. Dies sei $\eta^{(1)}$-mal der Fall.

II$_2$. Wie bei II$_1$, nur ist e_1 eine Erzeugende der Übergangskurve. Wegen der Stetigkeit sind $H_1^{(2)}$ und $H_1^{(2)'}$ auf e_1 unendlich benachbart. Die zwei unendlich benachbarten Fundamentalpunkte auf $[R_2]$ sollen mit $H_2^{(2)}$ und $H_2^{(2)'}$ bezeichnet werden. Es seien $\eta^{(2)}$ solcher Paare vorhanden.

III$_1$. Dem Fundamentalpunkt $Z_2^{(1)}$ auf e_2 ist e_1 zugeordnet. e_1 enthält einen Fundamentalpunkt $Z_1^{(1)}$, dem sowohl e_2 als auch e_2' entspricht. Auf e_2' liegt ein Fundamentalpunkt $Z_2^{(1)'}$. Dies trete $\zeta^{(1)}$-mal ein. Der Fundamentalpunkt $Z_1^{(1)}$ soll doppelt gezählt werden.

III$_2$ entspricht dem vorigen Fall, nur liegt $Z_1^{(2)}$ auf der Übergangskurve, $Z_2^{(2)}$ und $Z_2^{(2)'}$ auf der Doppelkurve. Die Zahl dieser Paare sei $\zeta^{(2)}$. Auch hier wird $Z_1^{(2)}$ doppelt gezählt.

Jede der beiden Flächen enthält $\xi+2\eta^{(1)}+2\eta^{(2)}+2\zeta^{(1)}+2\zeta^{(2)}$ *Fundamentalpunkte. Die* $2\eta^{(2)}$ *bilden* $\eta^{(2)}$ *Paare unendlich benachbarter Fundamentalpunkte auf beiden Flächen, die* $2\zeta^{(2)}$ *Fundamentalpunkte auf* $[R_2]$ *bilden* $\zeta^{(2)}$ *Paare unendlich benachbarter Fundamentalpunkte.*

Einschränkende Voraussetzung. Außer den eben erwähnten sollen keine unendlich benachbarten Fundamentalerzeugenden auftreten

35. Fundamentalpunkte der Involution auf $[R_2]$. Durch die $[1, 2]$-Transformation ist auf $[R_2]$ eine Involution von Punktpaaren bestimmt, in der den Punkten einer Erzeugenden e_2 die Punkte einer anderen, e_2', projektiv entsprechen. Man findet zu einem Punkt P_2 den involutorisch zugeordneten P_2' auf dem Weg $P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2'$. Daraus ergibt sich, daß Fundamentalpunkte der Involution nur zugleich mit Fundamentalpunkten der $[1, 2]$-Korrespondenz auftreten.

e_2 enthalte einen Fundamentalpunkt Ξ_2 von der Art I, dann entspricht dem Fundamentalpunkt Ξ_1 von e_1 ein Punkt Ξ_2' auf e_2'. In der Involution auf $[R_2]$ ist e_2' die Fundamentalerzeugende von Ξ_2 und e_2 die von Ξ_2'.

*) e_2, e_2' sind die beiden Erzeugenden, die einer Erzeugenden e_1 entsprechen.

**) Daß die beiden Erzeugenden dieses Falles nicht zusammenfallen können, wird in Nr. 38 gezeigt werden.

Sind $H_1^{(1)}$, $H_2^{(1)}$, $H_2^{(1)\prime}$ zusammengehörige Fundamentalpunkte vom Typus II_1, so sind $H_2^{(1)}$, $H_2^{(1)\prime}$ auch Fundamentalpunkte der Involution auf $[R_2]$, und zwar entspricht dem einen die Erzeugende durch den anderen. Den Punkten einer solchen Fundamentalerzeugenden sind Krümmungen mit fester Tangente im Fundamentalpunkt zugeordnet, zwischen den Richtungen durch die beiden Fundamentalpunkte besteht eine Projektivität, in welcher der festen Tangentenrichtung im einen Fundamenlalpunkt die Richtung der Erzeugenden im anderen Fundamentalpunkt entspricht.

II_2 ist ein Grenzfall von II_1.

Tragen die einander entsprechenden Erzeugenden e_1, e_2, e_2' Fundamentalpunkte $Z_1^{(1)}$, $Z_2^{(1)}$, $Z_2^{(1)\prime}$ vom Typus III_1, so besteht, wie man leicht sieht, eine nicht ausartende projektive Beziehung zwischen den Punkten von e_2 und e_2'. Hier treten keine Fundamentalpunkte in der Involution von $[R_2]$ auf*). Ebenso im Fall III_2.

In der Involution auf $[R_2]$ *treten* $\xi + \eta^{(1)}$ *Paare getrennter Fundamentalpunkte auf, außerdem* $\eta^{(2)}$ *Paare unendlich benachbarter.*

Einschränkende Voraussetzung. $[R_2]$ soll keine stationäre Erzeugende von der Eigenschaft enthalten, daß auf ihr in jedem Punkt zwei entsprechende Punkte der Involution in jeder Richtung zusammenfallen.

36. Die Kurven (S_2). Einem nicht speziellen ebenen Schnitt (N_2) von $[R_2]$ entspreche in der involutorischen Beziehung der Fläche auf sich eine Kurve (S_2) von der Ordnung s. Sie trifft jede Erzeugende in einem Punkt, ihr Geschlecht ist p_2. Aus Nr. 35 ergibt sich:

Die Kurven (S_2) *gehen durch jeden der* 2ξ *Fundamentalpunkte in beweglicher Richtung hindurch, durch jeden der* $2\eta^{(1)}$ *Fundamentalpunkte mit fester Tangente, durch jeden der* $\eta^{(2)}$ *Fundamentalpunkte mit vier festen konsekutiven Punkten.*

Zwei solche Kurven (S_2) schneiden sich in den n_2 Punkten, die den Schnittpunkten ihrer entsprechenden ebenen Schnitte zugeordnet sind, außerdem fallen $2\xi + 4\eta^{(1)} + 4\eta^{(2)}$ Schnittpunkte in die Fundamentalpunkte. Da n_2 die Ordnung von $[R_2]$ ist, folgt

$$s = \xi + 2\eta^{(1)} + 2\eta^{(2)} + n_2. \tag{8}$$

Der ebene Schnitt (N_2) wird von der entsprechenden Kurve (S_2) in den Schnittpunkten der λ Erzeugenden, welche die Doppelkurve bilden (Nr. 33), getroffen. Daß hierbei auch jede der $\eta^{(2)}$ von den λ Erzeugenden, welche zugleich Fundamentalkurven der Involution sind, einen Schnittpunkt von (S_2) und (N_2) liefert, erkennt man unschwer. So ergeben sich

*) Im Fall II träte dasselbe ein, wenn zwischen den Tangentenstrahlenbüscheln der beiden Fundamentalpunkte auf e_1 durch die $[1, 2]$-Transformation eine Projektivität festgelegt wäre.

λ Schnittpunkte von (N_2) und (S_2). Liegt außerdem ein Punktpaar der Involution auf (N_2), dann geht durch diese beiden Punkte (S_2) hindurch. Ist d die Anzahl dieser Paare, so folgt

$$s = \lambda + 2d$$

und unter Berücksichtigung von Gleichung (7) und (8)

$$(9) \qquad 2d = \xi + 2\eta^{(1)} + 2\eta^{(2)} + n_2 - 2(p_2 + 1) + 4p_1.$$

37. Die Kurven (G_2). Einem nicht speziellen ebenen Schnitt (N_1) von $[R_1]$ entspricht eine Kurve (G_2) auf $[R_2]$, die jede Erzeugende in einem Punkt trifft. Ihr Geschlecht ist p_2, ihre Ordnung sei m. Aus Nr. 34 ergibt sich:

Die Kurven (G_2) gehen durch die $\xi + 2\eta^{(1)} + 2\zeta^{(1)}$ Fundamentalpunkte auf $[R_2]$ mit veränderlicher Richtung hindurch, durch die $\eta^{(2)} + \zeta^{(2)}$ Punkte, in denen je zwei Fundamentalpunkte zusammenfallen, mit fester Richtung.

Zwei solche Kurven (G_2) treffen sich in den $2n_1$ Punkten, welche den n_1 Punkten entsprechen, die ihren zugeordneten ebenen Schnitten gemeinsam sind, außerdem in den eben erwähnten Fundamentalpunkten. Da n_2 die Ordnung von $[R_2]$ ist, folgt

$$(10) \qquad 2m = \xi + 2\eta^{(1)} + 2\eta^{(2)} + 2\zeta^{(1)} + 2\zeta^{(2)} + 2n_1 + n_2.$$

Auch die Kurven (S_2) und die Kurven (G_2) sind durch die Erzeugenden von $[R_2]$ eineindeutig aufeinander bezogen. Diese Beziehung führt wieder auf Gleichung (8).

38. Die Kurven (G_1). Einem nicht speziellen ebenen Schnitt (N_2) von $[R_2]$ entspricht eine Kurve (G_1) auf $[R_1]$, die das Geschlecht p_2, die Ordnung m hat und jede Erzeugende in zwei Punkten trifft. Aus Nr. 34 folgt:

Die Kurven (G_1) gehen durch die $\xi + 2\eta^{(1)}$ Fundamentalpunkte einfach, mit beweglicher Richtung, hindurch, in jedem der $\zeta^{(1)}$ Fundamentalpunkte haben sie einen Doppelpunkt, in den $\eta^{(2)}$ Punkten, in deren jedem zwei Fundamentalpunkte zusammenfallen, berühren sie die zugehörige Erzeugende, in jedem der $\zeta^{(2)}$ Fundamentalpunkte haben sie eine Spitze.

Aus der durch die Erzeugenden von $[R_1]$ bestimmten [1, 2]-Korrespondenz zwischen einem ebenen Schnitt (N_1) und einer Kurve (G_1) folgt, daß auf λ Erzeugenden zwei konsekutive Punkte von (G_1) liegen. $\eta^{(2)} + \zeta^{(2)}$ solcher Punkte fallen in die eben erwähnten Fundamentalpunkte, die übrigen Berührungen sind auf die Schnitte von (N_2) mit der Doppelkurve zurückzuführen, die auf keiner Fundamentalerzeugenden der [1, 2]-Transformation der beiden Flächen liegen. Würden die beiden Erzeugenden e_2, e_2' des Falles I zusammenrücken können, dann hätte (G_1) mit der entsprechenden e_1 zwei diskrete Punkte gemeinsam, die Zahl λ würde nicht erreicht werden.

Eine Kurve (G_1) hat dann einen Doppelpunkt außerhalb eines Fundamentalpunktes, wenn auf der entsprechenden (N_2) zwei getrennte entsprechende Punkte der Involution auf $[R_2]$ liegen. Dies ist nach Nr. 36 d-mal der Fall. Dann folgt aus der durch die Erzeugenden von $[R_1]$ vermittelten involutorischen Beziehung von (G_1) auf sich

$$2m = 2n_1 + \lambda - \eta^{(2)} - \zeta^{(2)} + \eta^{(2)} + 3\zeta^{(2)} + 2\zeta^{(1)} + 2d.^{*})$$

Das ist aber wieder die Gleichung (10). Ebenso führt die durch die Erzeugenden von $[R_1]$ bestimmte $[2, 2]$-Korrespondenz zwischen zwei Kurven (G_1) auf dieselbe Gleichung.

39. Zusammenfassung. In diesem Paragraphen wurden folgende numerische Relationen für die $[1, 2]$-Verwandtschaften 2. Art abgeleitet:

$$\lambda = 2(p_2 + 1) - 4p_1, \tag{7}$$

$$s = \xi + 2\eta^{(1)} + 2\eta^{(2)} + n_2, \tag{8}$$

$$2d = \xi + 2\eta^{(1)} + 2\eta^{(2)} + n_2 - 2(p_2 + 1) + 4p_1, \tag{9}$$

$$2m = \xi + 2\eta^{(1)} + 2\eta^{(2)} + 2\zeta^{(1)} + 2\zeta^{(2)} + 2n_1 + n_2. \tag{10}$$

Auch hier läßt sich, entsprechend den Überlegungen in Nr. 30—32, zeigen, *daß nur soviele der in diesen Gleichungen auftretenden Größen, als durch die Gleichungen bestimmt sind, voneinander numerisch abhängen.*

$[R_1]$, $[R_2]$ seien zwei Regelflächen von den Ordnungen n_1 und n_2, deren ebene Schnitte das Geschlecht p_1 und p_2 haben. Zwischen den Erzeugenden der beiden Flächen bestehe eine $[1, 2]$-Korrespondenz. Dann sind n_1, n_2, p_1, p_2 voneinander numerisch unabhängig. Durch die Gleichung (7) ist dann λ bestimmt. Auf $[R_1]$ seien drei Kurven $(A_1), (A_2), (A_3)$ von der Ordnung k_1 gegeben, die jede Erzeugende in einem Punkt treffen, auf $[R_2]$ drei Kurven $(B_1), (B_2), (B_3)$ von der Ordnung k_2, die ebenfalls jede Erzeugende in einem Punkt treffen. Zwei Kurven (A_i) treffen sich in $2k_1 - n_1$ Punkten, zwei Kurven (B_j) in $2k_2 - n_2$ Punkten. Läßt man den Punkten einer solchen Kurve (A_i) die Punkte von (B_i) entsprechen, so ist dadurch und durch die $[1, 2]$-deutige Verwandtschaft der Erzeugenden der beiden Regelflächen eine $[1, 2]$-Korrespondenz 2. Art zwischen den beiden Flächen bestimmt. Auch hier ergibt sich unschwer, daß man jede $[1, 2]$-Transformation 2. Art in dieser Weise erzeugen kann, indem man sich drei Kurven auf $[R_1]$ gibt, die jede Erzeugende in einem Punkt treffen. Man kann wieder wie in Nr. 30—32 die Anzahl der Fundamentalpunkte voneinander unabhängig bestimmen, woraus die obige Behauptung folgt.

40. Mehrdeutige Ebenentransformationen. Da numerische Relationen für mehrdeutige Verwandtschaften zwischen zwei Ebenen ε_1 und ε_2

---

*) Über die Zählung der Koinzidenzen vgl. die Anmerkung zu Nr. 21.

bekannt sind*), liegt der Gedanke nahe, Gleichungen für die bei Verwandtschaften zwischen zwei Flächen auftretenden Größen dadurch zu finden, daß man jede Fläche aus einem Punkt des Raumes in eine Ebene projiziert und die durch die Projektion und die Korrespondenz zwischen den Flächen bestimmte Ebenentransformation untersucht. Die erwähnten numerischen Relationen sind aber unter den folgenden einschränkenden Voraussetzungen abgeleitet:**)

1) Auf einer Kurve (G_1) in ε_1, die einer nicht speziellen Geraden g_2 von e_2 zugeordnet ist, entsprechen nicht einem Punkt P_2 zwei in einem Punkt P_1 mit zwei (oder mehr) zusammenfallenden Tangenten zusammenfallende Punkte so, daß jeder Geraden g_1 durch P_1 eine Kurve (G_2) entspricht, welche in P_2 einen vielfachen Punkt mit mindestens zwei zusammenfallenden Tangenten besitzt.

2) Es gibt keine Übergangskurve von der Eigenschaft, daß jedem ihrer Punkte drei oder mehr in einem Punkt oder gruppenweise in verschiedenen Punkten zusammenfallende Punkte entsprechen.

3) Es gibt keine Fundamentalpunkte mit Fundamentalrichtungen.

Die zweite Voraussetzung macht das erwähnte Verfahren bei nicht birationalen Beziehungen der beiden Flächen unmöglich. Denn der Tangentialkegel aus dem Projektionspunkt an die Fläche schneidet die Ebene, in die projiziert wird, in einer Kurve, die dieser Voraussetzung widerspricht.

§ 7.

Strahlensysteme mit einem einfach unendlichen System von Regelflächen 3. Grades.

41. Zusammenhang mit den [1, 2]-Transformationen 1. Art. Enthält ein Strahlensystem ein einfach unendliches System von Regelflächen 3. Grades***), so treten diese als Flächen 3. Ordnung oder 3. Klasse auf. Im ersten Fall kann man sich jede Fläche durch eine [1, 2]-Korrespondenz zwischen den Ebenenbüscheln mit den beiden Leitlinien als Achsen entstanden denken, als spezielle Flächen treten Kegel 3. Ordnung auf. Sind die Flächen als Flächen 3. Klasse aufzufassen, so lassen sie sich auf [1, 2]-Korrespondenzen zwischen den Punkten ihrer Leitlinien zurückführen, es treten als Ausartungen ebene Kurven 3. Klasse auf. Der zweite Fall, dem der erste dual ist, liege hier vor. Dann bilden die Doppelge-

*) Vgl. die Anmerkung zu Nr. 1.

**) Diese Form der Voraussetzungen ist kürzer und präziser als die bisherige.

***) Wenn alle diese Regelflächen zusammenfallende Leitlinien haben, gelten die Betrachtungen dieses Paragraphen nicht.

raden der Regelflächen 3. Grades eine Fläche $[R_1]$, die einfachen Leitgeraden eine Fläche $[R_2]$; zwischen den beiden Flächen, deren keine ein Kegel sei, besteht eine [1, 2]-deutige Verwandtschaft der ersten Art, und die Strahlen des Strahlensystems sind die Verbindungslinien der einander in der Transformation zugeordneten Punkte. Die Untersuchung dieser Strahlensysteme ist also gleichbedeutend mit dem Studium der [1, 2]-Transformationen erster Art.

Wenn alle einfachen oder alle doppelten Leitlinien in einer Ebene liegen, so treten von Erzeugenden mehrfach überdeckte Ebenen statt der Regelflächen $[R_1]$ und $[R_2]$ auf. Die Gleichungen (1)—(5) bzw. (2a)—(5a) gelten sinngemäß auch hier, da zu ihrer Ableitung nur Korrespondenzen benützt wurden. An Stelle des Geschlechtes eines ebenen Schnittes der Regelfläche tritt das Geschlecht der Gesamtheit der Erzeugenden in der betreffenden Ebene auf.

42. Gehen durch jeden Strahl der Kongruenz K $k > 1$ Flächen 3. Klasse hindurch, so kann man K birational in eine Fläche $[F]$ abbilden, die eine einfach unendliche Schar (Büschel) von rationalen Kurven enthält, von denen $k > 1$ durch jeden Punkt der Fläche hindurchgehen. Dann ist $[F]$ rational (vgl. Anm. zu Nr. 3) und damit auch K.

Es ist ohne weiteres klar, daß für eine Kongruenz K, in der durch jeden Strahl 1 Regelfläche 3. Klasse hindurchgeht — und nur solche sollen im folgenden betrachtet werden — wegen der umkehrbar eindeutigen Beziehung auf $[R_2]$ $p = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die Rationalität ist.

43. Ordnung und Klasse des Strahlensystems. Es soll nun bei vorgegebener [1, 2]-Transformation erster Art die dazugehörige Strahlenkongruenz K untersucht werden.*) Die Bezeichnungen sind die von § 3 und § 4. In speziellen Kongruenzen K können auch Regelflächen 3. Klasse mit zusammenfallenden Leitgeraden auftreten, dann fallen entsprechende Erzeugende von $[R_1]$ und $[R_2]$ zusammen; das sei τ-mal der Fall.

P sei ein nicht spezieller Punkt des Raumes. In dem Strahlenbündel mit P als Mittelpunkt wird durch die [1, 2]-Transformation der beiden Flächen eine $[n_2, 2n_1]$-Korrespondenz bestimmt, in der einem Strahlenbüschel ein Kegel m^{ter} Ordnung entspricht. Es treten τ Strahlenbüschel auf, die sich selbst zugeordnet sind, die entsprechenden Strahlen jedes

*) Da man von der Kongruenz weiß, daß sie ein einfach unendliches System von Regelflächen 3. Grades enthält, kann $[R_2]$ auch rational sein (vgl. dagegen Nr. 4); die wesentliche Eigenschaft der Transformation, aus der die Formeln abgeleitet wurden, daß den Punkten einer Erzeugenden von $[R_1]$ die Punkte einer solchen von $[R_2]$ entsprechen, bleibt erhalten. Nur gibt es dann natürlich noch andere [1, 2]-Transformationen als die hier behandelten zwei Arten.

dieser Büschel fallen auf einem Kegel 3. Klasse zusammen. Nach der bekannten Koinzidenzformel gibt es $2n_1+n_2+m-4\tau$ isolierte Koinzidenzen im Strahlenbündel. Dies sind die Strahlen von K durch P. Die Klasse der Kongruenz ist $m-\tau$;

K *hat die Ordnung* $2n_1+n_2+m-4\tau$ *und die Klasse* $m-\tau$.

Nach Gleichung (5) ist

$$2n_1 = 4(p'-2p+1) - (x^{(1)}+2x^{(2)}+2y^{(1)}+3y^{(2)}+4y^{(3)}+2z^{(1)}+3z^{(2)}),$$

nach Gleichung (5*)

$$n_2 = m-(p'-2p+1)-z^{(3)},$$

daraus folgt

$$2n_1+n_2=m+3(p'-2p+1)-(x^{(1)}+2x^{(2)}+2y^{(1)}+3y^{(2)}+4y^{(3)}+2z^{(1)}+3z^{(2)}+z^{(3)}),$$

$$2n_1+n_2\leqq m+3(p'-2p+1),$$

$$2n_1+n_2\leqq m+3p'+3.$$

Die Kurven (G_2), welche die Ordnung m und das Geschlecht p' haben und jede Erzeugende von $[R_2]$ in zwei Punkten treffen, sind, falls $[R_2]$ nicht in eine Ebene ausartet, Raumkurven, also ist

$$p'\leqq\frac{(m-2)(m-3)}{2},$$

$$2n_1+n_2\leqq\frac{m}{2}(3m-13)+12,$$

$$2n_1+n_2-3\tau\leqq\frac{m}{2}(3m-13)+12. \tag{11}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist die Differenz zwischen Ordnung und Klasse der Kongruenz, für $\tau=0$ ist m ihre Klasse. Das Gleichheitszeichen kommt nur in Betracht, wenn die Transformation keine Fundamentalpunkte hat.*) Man sieht unschwer, daß die einschränkenden Voraussetzungen über die Doppelkurve und die Fundamentalpunkte, welche bei den Betrachtungen der [1, 2]-Transformationen eingeführt wurden, für die Ungleichung (11) unwesentlich sind. Der duale Fall der Flächen 3. Ordnung ist klar.

---

*) Ein Fall, in dem das Gleichheitszeichen gilt, ist der folgende: Zwischen den Erzeugenden einer Regelschar 2. Grades und denen einer zweiten besteht eine [1, 2]-Korrespondenz. Die Erzeugenden der beiden Leitscharen sind aufeinander projektiv bezogen. Dann besteht zwischen den beiden Flächen 2. Ordnung eine [1, 2]-Korrespondenz erster Art, für welche $n_1=n_2=2$ und $m=3$ ist, und welche keine Fundamentalpunkte hat. Die dadurch entstehende Strahlenkongruenz enthält zugleich ein einfach unendliches System von Regelflächen 2. und von solchen 3. Klasse.

44. Singuläre Ebenen. Die Schnittkurven einer Ebene ε mit $[R_1]$ und $[R_2]$ sind durch die Erzeugenden der beiden Flächen ein-eindeutig aufeinander bezogen, die Verbindungsgeraden der sich so entsprechenden Punkte der beiden Schnittkurven umhüllen eine Kurve (C) von der Klasse $n_1 + n_2 - \tau$. Betrachtet man ebenso die Schnittkurven der beiden Regelflächen mit einer anderen Ebene ε', dann sind die beiden Klassenkurven (C) und (C') ein-eindeutig aufeinander bezogen, ihre entsprechenden Tangenten schneiden auf der Schnittlinie $\varepsilon \times \varepsilon'$ eine $[n_1+n_2-\tau, n_1+n_2-\tau]$-Korrespondenz aus. Die $2n_1 + 2n_2 - 2\tau$ Koinzidenzen rühren von den Schnittpunkten von $\varepsilon \times \varepsilon'$ mit $[R_1]$ und mit $[R_2]$ und von den entsprechenden Erzeugenden der beiden Regelflächen her, die sich schneiden. Solche Erzeugende gibt es also $n_1 + n_2 - 2\tau$, wenn sich nicht alle entsprechenden Erzeugenden schneiden.

$n_1 + n_2 - 2\tau$ *der Regelflächen 3. Klasse arten in Kurven 3. Klasse aus.*

Jeder Fundamentalpunkt vom Typus I führt auf eine Regelfläche 3. Klasse, die in ein Strahlenbüschel und eine Regelfläche 2. Klasse zerfällt, jeder Fundamentalpunkt II auf eine in drei Strahlenbüschel zerfallende Fläche, im Fall III fallen zwei davon zusammen. Die Scheitel der Strahlenbüschel sind zugleich singuläre Punkte der Kongruenz.

§ 8.

Strahlensysteme mit einem einfach unendlichen System von Regelflächen 2. Grades.

45. Zusammenhang mit den [1, 2]-deutigen Verwandtschaften 2. Art. **S** sei ein Strahlensystem, das ein einfach unendliches System von Regelflächen 2. Grades enthält*), von denen durch jeden Strahl 1 hindurchgeht.**) Gehört nur die eine Schar von Erzeugenden jeder Regelfläche zum Strahlensystem, so bilden die anderen Scharen von Erzeugenden ein Strahlensystem Σ von derselben Ordnung und Klasse. Schneidet man Σ mit einem linearen Komplex, so ist die Schnittregelfläche $[R_2]$ durch die Strahlen von **S** ein-eindeutig auf sich bezogen, es liegt eine Involution von Punktpaaren***) auf ihr. Diese Involution, durch welche man das

*) Solche Strahlensysteme wurden vom Verfasser behandelt: Über Strahlensysteme, welche unendlich viele Regelflächen 2. Grades enthalten. Erlangen 1910. Die dort durchgeführte Ausschließung der Strahlenkongruenzen mit einer Kurve singulärer Punkte und einem Torsus singulärer Ebenen ist unnötig. Deshalb wurde der Satz am Ende von Nr. 46 hier in erweiterter Fassung und kürzer im Anschluß an die [1, 2]-Transformationen abgeleitet.

**) Die Betrachtungen von Nr. 42 gelten auch hier.

***) Wieder eine Involution von Punktpaaren, wenn Flächen 2. Klasse vorliegen, sonst eine solche von Tangentialebenenpaaren.

Strahlensystem **S** erzeugen kann, läßt sich auf eine andere Regelfläche $[F]$ umkehrbar eindeutig abbilden; das Studium der Kongruenzen **S** läuft demnach auf die Betrachtung von $[1, 2]$-Transformationenen zweiter Art zwischen zwei Regelflächen hinaus. Enthält das Strahlensystem von jeder Regelfläche 2. Ordnung beide Scharen von Erzeugenden, so liefert jede Regelfläche 2. Ordnung vier Erzeugende zur Fläche $[R_2]$.

46. Ordnung und Klasse der Kongruenz. Die Kongruenz Σ (**S**, wenn beide Scharen von Erzeugenden der Kongruenz angehören) von der Ordnung m' und der Klasse n' wird von einem linearen Komplex in der Regelfläche $[R_2]$ geschnitten. Diese Fläche hat die Ordnung $n_2 = m' + n'$. Nach den Gleichungen (7)—(9) entspricht in der involutorischen Beziehung der Fläche auf sich einem ebenen Schnitt eine Kurve von der Ordnung

$$s = \xi + 2\eta^{(1)} + 2\eta^{(2)} + n_2. \tag{8}$$

Die Klasse der Kongruenz ist

$$n' = d = \frac{1}{2}(\xi + 2\eta^{(1)} + 2\eta^{(2)} + n_2 - \lambda) = \frac{1}{2}(s - \lambda), \tag{9}$$

ihre Ordnung

$$m' = n_2 - \frac{1}{2}(s - \lambda). \tag{12}$$

Durch die Involution auf $[R_2]$ wird in einem Strahlenbündel eine involutorische Korrespondenz $[n_2, n_2]$ bestimmt, in der einem Strahlenbüschel ein Kegel s^{ter} Ordnung entspricht. Die Anzahl ihrer (doppelt zählenden) Koinzidenzen liefert die Zeuthensche Formel, sie ist gleich der Ordnung von **S**. Berücksichtigt man dabei, daß jede der λ Erzeugenden eine Koinzidenzkurve 1. Ordnung liefert, deren Punkte auf den Tangenten eines Kegelschnittes zusammenfallen, so erhält man

$$m' = n_2 + \frac{1}{2}(s - 3\lambda).$$

Hieraus und aus (12) folgt

$$s = 2\lambda,$$

$$m' = n_2 - \frac{s}{4} = n_2 - \frac{\lambda}{2},$$

$$n' = \frac{s}{4} = \frac{\lambda}{2},$$

$$m' - n = n_2 - \frac{s}{2}. \tag{13}$$

Nach Gleichung (8) ist

$$s \geqq n_2. \tag{14}$$

Ähnlich wie in Nr. 44 findet man, daß $[R_2]$ $n_2 - \lambda$ Paare von sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden hat, folglich ist

$$\lambda \leqq n_2,\text{*)}$$

$$\frac{s}{2} \leqq n_2.$$

Aus (13) folgt dann

$$m' \geqq n',$$

ferner ist

$$m' - 3n' = n_2 - s$$

und wegen Gleichung (14)

$$m' - 3n' \leqq 0.$$

*In einem Strahlensystem, das ein einfach unendliches System von Regelflächen 2. Klasse enthält, ist die Ordnung mindestens gleich der Klasse und höchstens dreimal so groß wie die Klasse.***)

Die Einschränkungen, welche über die [1, 2]-Transformationen zweiter Art gemacht wurden, beeinflussen diesen Satz nicht. Die duale Betrachtung ist klar. Auf welche Ausartungen der Regelflächen 2. Klasse die Fundamentalpunkte der Involution und die sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden führen, ist ohne weiteres ersichtlich.

Die Ungleichung

$$2n_2 \geqq s \geqq n_2$$

gilt für jede Involution [2] auf einer Regelfläche, in der den Punkten einer Erzeugenden wieder die Punkte einer solchen entsprechen.

47. Kongruenzen mit höheren Regelflächen. Die hier durchgeführten Betrachtungen der Strahlensysteme mit einem einfach unendlichen System von Regelflächen 3. oder 2. Grades stützten sich auf die Eigenschaft dieser Regelflächen Leitgerade zu besitzen. Analoge Überlegungen wären bei den Strahlenkongruenzen durchführbar, welche ein einfach unendliches System von Regelflächen höheren Grades mit je zwei Leitgeraden enthalten. *Jedes Strahlensystem läßt sich birational in ein*

---

*) Da man immer eine Regelfläche, bei welcher sich alle entsprechenden Erzeugenden schneiden, wie sie im Fall des Torsus singulärer Ebenen 2. Klasse auftritt, unter Erhaltung der Ordnung auf eine solche birational abbilden kann, bei welcher sich zwei entsprechende Erzeugende nicht immer schneiden, gilt diese Ungleichung immer.

**) Beispiele, in welchen die angegebenen Grenzen erreicht werden, lassen sich unschwer angeben. Aus der in Nr. 45 angegebenen Arbeit folgt, daß auch die Kongruenzen, bei welchen durch jeden Strahl mehrere Regelflächen 2. Klasse hindurchgehen, diesem Satz entsprechen.

solches abbilden: Es seien zwei im Raume nicht speziell zueinander liegende Strahlenbüschel $S(s_1, s_2, \cdots)$ und $T(t_1, t_2, \cdots)$ gegeben, außerdem ein Punkt P im Raum. Ein Strahl a einer gegebenen Kongruenz trifft einen von den Strahlen s_i in einem Punkte A. Man ordnet ihm den Strahl durch A zu, der in der Ebene Pa liegt und den projektiv entsprechenden Strahl t_i schneidet. Die so entstehende Kongruenz enthält ein einfach unendliches System von Regelflächen mit den vielfachen Leitgeraden s_i und t_i.

Erlangen, Mai 1913.

Einladung zum Beitritt zu einer Leonhard Euler-Gesellschaft.

Im September 1909 hat die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft zu Lausanne den Beschluß gefaßt, die gesamten Werke Leonhard Eulers herauszugeben und hierdurch einen wiederholt und dringend geäußerten Wunsch der ganzen mathematischen Welt zu erfüllen. Eulers außerordentlich vielseitige Arbeiten haben das fast einzigartige Schicksal, nicht zu veralten; sie bilden auch heute noch, nachdem der 100jährige Todestag des gefeierten Mathematikers schon hinter uns liegt, eine bei weitem nicht erschöpfte Quelle für wissenschaftliche Forschung und Erkenntnis. Viele Arbeiten Eulers sind in heute sehr selten gewordenen Zeitschriften des 18. Jahrhunderts verborgen, und so war der Wunsch, alles, was von Eulers Hand stammt, leicht zugänglich und übersichtlich geordnet zu besitzen, ein in der Tat durchaus berechtigter.

Die vorläufige Berechnung des Umfangs einer Gesamtausgabe der Eulerschen Werke schätzte die Anzahl der hierfür nötigen Bände auf 40 bis 45, und auf dieser Basis erfolgte die Finanzierung des Unternehmens. Die Gesamtkosten wurden auf ungefähr eine halbe Million Franken berechnet, welche Summe durch Abonnemente und durch freiwillige Beiträge gedeckt erschien.

Bis jetzt sind neun Bände herausgegeben worden, welche in jeder Hinsicht, sowohl was die kritische Durcharbeitung, als auch, was die Schönheit des Druckes betrifft, überall ungeteilten Beifall gefunden haben. Der zehnte ist im Erscheinen begriffen. Allein es hat sich dabei leider herausgestellt, daß die Kosten höhere sind, als angenommen war, sodaß trotz unseren 362 Abonnenten diese neun Bände (Abonnementspreis per Band 25 Fr.) ein Defizit von ca. 57 000 Franken mit sich gebracht haben, welches aus dem Euler-Fonds gedeckt werden mußte. Dieser Fonds, gestiftet durch Beiträge von Behörden, wissenschaftlichen und industriellen Gesellschaften und Privatpersonen, ist heute schon auf 84 000 Fr. zusammengeschmolzen. Hierzu kommt, daß die angenommene Zahl der Bände nicht ausreichen wird, um sämtliche Werke des fast unerschöpflichen Gelehrten aufzunehmen, wenn man sie nicht will ungebührlich anschwellen lassen. Die Kaiserl. Akademie der Wissenschaften von St. Petersburg hat eine große Zahl bisher unbekannter Manuskripte der Euler-Kommission zur Verfügung gestellt, Briefe Eulers kommen überall zum Vorschein; aber auch die bereits im Druck erschienenen Arbeiten Eulers nehmen in der

neuen Ausgabe, namentlich infolge der nachträglich gewählten, dem monumentalen Charakter eines solchen Werkes besser entsprechenden größeren Schrift, sowie wegen der Vorreden und der unumgänglich notwendigen Anmerkungen der Herausgeber usw. einen bedeutend breiteren Raum ein, als anfänglich war angenommen worden.

So stehen wir heute vor der unerfreulichen Tatsache, daß die Gesamtkosten fast das Doppelte der ursprünglichen Schätzung betragen werden, nämlich ungefähr 900 000 Franken, und unser voraussichtliches Defizit wird vermutlich die Höhe von ca. 200 000 Fr. erreichen, da eine Erhöhung des Bandpreises wegen der gegenüber den Abonnenten eingegangenen Verpflichtungen ausgeschlossen ist.

Wenn die Euler-Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft trotzdem den Mut nicht verliert, die Riesenaufgabe zu einem glücklichen Ende zu führen, so entspringt diese Zuversicht der Überzeugung, daß damit etwas wahrhaft Großes und Nützliches geschaffen wird, und sie wurzelt in der festen Hoffnung, daß es an Freunden nicht fehlen werde, die dem Unternehmen tatkräftige Hilfe zu leisten gesonnen sind.

In dieser Überzeugung haben wir beschlossen, für die Dauer der Herausgabe der Eulerschen Werke (circa 15 Jahre) eine *Leonhard Euler-Gesellschaft* ins Leben zu rufen, deren Mitglieder sich zu einem Jahresbeitrag von **wenigstens 10 Fr.** verpflichten. Die Mitglieder werden jährlich einen kurzen Bericht über den Stand der Herausgabe erhalten; es sollen ihnen auch sukzessive die verschiedenen Porträts, die von Euler vorhanden sind, in guten Reproduktionen als Dank zugestellt werden.

So hoffen wir denn, daß nicht nur die Mathematiker, sondern auch zahlreiche Freunde der Wissenschaft überhaupt, in- und außerhalb der Schweiz, unserer Einladung zum Beitritt Folge leisten werden, und daß namentlich auch die mathematischen, physikalischen und astronomischen Gesellschaften, die Ingenieurvereine, die Versicherungsgesellschaften und die großen industriellen Unternehmungen, die sich auf den mathematischen Wissenschaften aufbauen, sich als Kollektivmitglieder anschließen werden, damit das gewaltige Denkmal, das einem der größten Gelehrten aller Zeiten errichtet werden soll, nicht ein Stückwerk bleibe, sondern fertig ausgebaut werden könne, zum dauernden Ruhme Eulers und zur Ehre und Förderung der mathematischen Wissenschaften.

Fritz Sarasin. **Ferdinand Rudio.**
Eduard His-Schlumberger.

Basel und Zürich, im November 1913.

Die Beitrittserklärung ist zu senden an den Schatzmeister der Euler-Kommission, Herrn Ed. His-Schlumberger, Aeschenvorstadt 15, Basel.

Über die Summierbarkeit der Reihen von Laplace und Legendre.

Von

T. H. Gronwall in Princeton, N. J. (U. S. A.).

Inhaltsverzeichnis.

§ 1.

Einleitung.

Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, die in dem zweiten Teil meiner Abhandlung „Über die Laplacesche Reihe" Math. Annalen 74 (1913), S. 213—270 durchgeführte Untersuchung der Cesàroschen Summierbarkeit von der Ordnung $k = 1$ auf den Fall eines beliebigen reellen $k > 0$ auszudehnen. Für die Bezeichnungen, soweit sie hier nicht erklärt sind, sowie für einige elementare Hilfssätze über die Kugelfunktionen möge auf die genannte, hier als I zitierte Abhandlung verwiesen werden.

Zunächst erinnern wir an die Definition*): Eine beliebige Reihe

(1) $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

ist summierbar k^{ter} Ordnung nach dem Verfahren von Cesàro, oder kürzer: summierbar $(C; k)$, mit der Summe s, wenn,

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

$$A_n^{(k)} = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}{n!} = \frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)},$$

(2) $$S_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k)} u_\nu,$$

$$s_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}}$$

gesetzt, $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(k)} = s$ ist.

Außer den in I gegebenen Hilfssätzen werden wir noch die folgenden gebrauchen:

Es ist, wie aus der Stirlingschen Formel sofort folgt,**)

(3) $$\frac{1}{c_1} n^\alpha < \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)} < c_2 n^\alpha, \qquad (n+\alpha > 0,\ n = 1, 2, \cdots).$$

Wenn eine Reihe (1) summierbar $(C; k)$ ist, so ist sie auch summierbar $(C; k')$ mit derselben Summe, wenn $k' > k > -1$. (Chapman, l. c. S. 377). Wenn $k' > k > -1$, so ist

(4) $$\left|s_n^{(k')}\right| \leqq \max\left(\left|s_0^{(k)}\right|, \left|s_1^{(k)}\right|, \cdots, \left|s_n^{(k)}\right|\right), \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Aus der Formel***)

$$s_n^{(k')} = \frac{1}{A_n^{(k')}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k'-k-1)} A_\nu^{(k)} s_\nu^{(k)}$$

folgt nämlich, weil alle A positiv sind,

---

*) Für ganzzahliges k vgl. T. J. I'A. Bromwich, An introduction to the theory of infinite series, London 1908, S. 310—318, sowie für ein beliebiges $k > -1$ S. Chapman, Non-integral orders of summability of series and integrals, Proc. London Math. Soc. II, 9 (1911), S. 369—409.

**) Nach dem Vorgange von Herrn Landau bezeichnen wir mit $c_1, c_2, c_3, \cdots$ lauter positive Konstanten, auf deren genauen numerischen Wert es nicht ankommt; sie werden in solcher Weise eingeführt, daß die Ungleichungen, in welchen sie vorkommen, bestehen bleiben, wenn irgend eine der Konstanten durch einen größeren Wert ersetzt wird.

***) Chapman, l. c.

$$\left|s_n^{(k')}\right| \leqq \max\left(\left|s_0^{(k)}\right|, \left|s_1^{(\nu)}\right|, \cdots, \left|s_n^{(k)}\right|\right) \cdot \frac{1}{A_n^{(k')}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k'-k-1)} A_\nu^{(k)},$$

und der rechts abgetrennte Faktor ist $= 1$.

Wenn für die Folge der u_n eine erzeugende Funktion $\Phi(z)$ sich angeben läßt:

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \tag{5}$$

so ist die erzeugende Funktion der $S_n^{(k)}$ offenbar

$$\frac{\Phi(z)}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} z^n. \tag{6}$$

In § 2 werden gewisse Konstanten $\varrho_n^{(k)}$ eingeführt, welche die *Lebesgueschen Konstanten k^{ter} Ordnung der Laplaceschen Reihe* genannt werden und für die Summierbarkeit von ausschlaggebender Bedeutung sind. Analog werden gewisse Funktionen $\varrho_n^{(k)}(x)$ als *Lebesguesche Majoranten k^{ter} Ordnung der Legendreschen Reihe* definiert. In § 3 wird gezeigt, daß die Konstanten $\varrho_n^{(k)}$ mit n ins Unendliche wachsen, wenn $0 \leqq k \leqq \frac{1}{2}$, dagegen für alle n beschränkt bleiben für $k > \frac{1}{2}$. Aus diesem fundamentalen Resultat wird in § 4 die Folgerung gezogen, daß es Funktionen $f(\theta, \varphi)$ gibt, welche auf der ganzen Kugelfläche stetig sind, und deren Laplacesche Reihen trotzdem an einzelnen Stellen nicht summierbar $(C; k)$ sind, wenn $k \leqq \frac{1}{2}$. Dagegen ist, wie in § 5 gezeigt wird, für $k > \frac{1}{2}$ die Laplacesche Reihe einer beliebigen, auf der ganzen Kugelfläche absolut integrablen Funktion $f(\theta, \varphi)$ summierbar $(C; k)$ mit der Summe $f(\theta, \varphi)$ in jedem Punkte (θ, φ), wo die Funktion stetig ist und außerdem einer gewissen, auf den Gegenpol $(\pi - \theta, \varphi + \pi)$ bezüglichen Bedingung genügt; für $k \geqq 1$ ist diese Gegenpolbedingung sogar überflüssig. In § 6 wird umgekehrt an einem Beispiel nachgewiesen, daß für $\frac{1}{2} < k < 1$ jene Gegenpolbedingung notwendig ist.

Nachdem in dieser Weise das Summationsproblem der Laplaceschen Reihe für absolut integrable Funktionen vollständig erledigt ist, wenden wir uns zum Spezialfalle der Legendreschen Reihe; in diesem Falle lassen sich nämlich, *wenn wir uns auf innere Punkte des Intervalles* $(-1 \cdots +1)$ *beschränken*, weitergehende Resultate erzielen.

Das grundlegende Ergebnis in dieser Richtung wird in § 7 abgeleitet; es wird nämlich gezeigt, daß die in § 2 definierten Lebesgueschen Majo-

ranten $\varrho_n^{(k)}(x)$ für alle n und alle x eines festen Intervalles $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$, gleichmäßig beschränkt bleiben, wenn nur $k > 0$. In § 8 wird hieraus gefolgert, daß wenn $k > 0$, und $f(x)$ sowie $(1-x^2)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} f(x)$ beide zwischen den Grenzen -1 und $+1$ absolut integrabel sind, die zu $f(x)$ gehörige Legendresche Reihe in jedem Punkte, wo $f(x)$ stetig ist und x dem Intervalle $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ angehört, summierbar $(C; k)$ mit der Summe $f(x)$ ist. Wenn $k > \frac{1}{2}$ und $f(x)$ in der Umgebung von $x = \pm 1$ beschränkt ist, so gilt dieses Resultat zufolge § 5 im ganzen Intervalle $(-1 \cdots +1)$, dagegen ist für $0 < k \leqq \frac{1}{2}$ die Ausdehnung des Satzes auf die Endpunkte ± 1 nicht mehr zulässig, wie aus dem Beispiel des § 6 hervorgeht*). In § 9 wird endlich an einem Beispiel gezeigt, daß der Satz des § 8 im allgemeinen nicht mehr gilt, wenn die auf die Punkte ± 1 bezügliche Bedingung für $f(x)$ aufgegeben wird; vielmehr können dann die Cesàroschen Mittel k^{ter} Ordnung $\left(0 < k \leqq \frac{1}{2}\right)$ in jedem Punkte des Intervalles $(-1 \cdots +1)$ divergieren**).

§ 2.

Die Lebesgueschen Konstanten k^{ter} Ordnung der Laplaceschen Reihe.

Wenn wir die Reihe (1) als die Laplacesche Reihe der Funktion $f(\theta, \varphi)$ annehmen, so wird offenbar das n^{te} Cesàrosche Mittel k^{ter} Ordnung gegeben sein durch

$$(7)\qquad s_n^{(k)}\{f(\theta,\varphi)\} = \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int_K f(\theta',\varphi')\, S_n^{(k)}(\cos\gamma)\, do',$$

wo

$$(8)\qquad S_n^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} s_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k)} \cdot (2\nu+1) P_\nu(x);$$

$s_n(x)$ ist durch (I:5) definiert.

*) Für $k=1$ und $f(x)$ stetig für $-1 \leqq x \leqq 1$ wurde die Summierbarkeit $(C; 1)$ für $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ von Herrn Haar bewiesen: Über die Legendresche Reihe, Rend. Circ. Mat. Palermo 32 (1911), S. 132—142. Die Frage nach der Summierbarkeit an den Endpunkten ± 1 läßt Herr Haar unentschieden.

**) Einige der in der vorliegenden Abhandlung entwickelten Resultate wurden unter der (wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, überflüssigen) Bedingung, daß f in der Umgebung des betrachteten Punktes (bzw. in einigen Fällen auch am Gegenpol) von *beschränkter Schwankung* sei, von Herrn Chapman abgeleitet: On the general theory of summability, with applications to Fourier's and other series, Quarterly journal of mathematics 43 (1911), S. 1—52, und On the summability of Legendre's series, Math. Ann. 72 (1912), S. 211—227.

Ist die absolut integrable Funktion $f(\theta, \varphi)$ auf der ganzen Kugelfläche endlich, so können wir durch Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten bewirken, daß $|f(\theta, \varphi)| \leqq 1$ in jedem Punkte von K; beschränken wir demgemäß $f(\theta, \varphi)$ auf die Klasse aller auf der Kugelfläche absolut integrablen Funktionen vom absoluten Betrage $\leqq 1$, so hat in einem gegebenen Punkte (θ, φ) der absolute Betrag des n^{ten} Cesàroschen Mittels k^{ter} Ordnung der Laplaceschen Reihe für eine gewisse Funktion der Klasse ein absolutes Maximum. Es ist klar, daß das Verhalten dieses Maximums für unbegrenzt wachsendes n in engster Beziehung zur Frage nach der Konvergenz der Cesàroschen Mittel k^{ter} Ordnung stehen muß.

Ist nun $|f(\theta, \varphi)| \leqq 1$ auf der ganzen Kugeloberfläche, so wird nach (7)

$$\left| s_n^{(k)}\{f(\theta,\varphi)\}\right| \leqq \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int\limits_K \left| S_n^{(k)}(\cos\gamma)\right| do',$$

und das absolute Maximum

$$\varrho_n^{(k)}(\theta, \varphi) = \max \left| s_n^{(k)}\{f(\theta, \varphi)\}\right| = \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int\limits_K \left| S_n^{(k)}(\cos\gamma)\right| do' \tag{9}$$

wird im Punkte (θ, φ) erreicht, wenn f so gewählt wird, daß

$$f(\theta', \varphi') = \operatorname{sgn} S_n^{(k)}(\cos\gamma)^{*)}. \tag{10}$$

Durch Verlegung des Nordpols nach dem Punkt (θ, φ) wird

$$\begin{aligned} \varrho_n^{(k)}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left| S_n^{(k)}(\cos\theta')\right| \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' \\ &= \frac{1}{2 A_n^{(k)}} \int_0^{\pi} \left| S_n^{(k)}(\cos\theta')\right| \sin\theta'\, d\theta', \end{aligned} \tag{11}$$

also von (θ, φ) unabhängig; schreiben wir demnach $\varrho_n^{(k)}(\theta, \varphi) = \varrho_n^{(k)}$ und setzen $\cos\theta' = x$, so wird

$$\varrho_n^{(k)} = \frac{1}{2 A_n^{(k)}} \int_{-1}^{1} \left| S_n^{(k)}(x)\right| dx. \tag{12}$$

---

*) In Kroneckers Bezeichnungsweise ist

$$\operatorname{sgn.} a = \begin{cases} +1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Diese Konstanten $\varrho_n^{(k)}$ nennen wir die *Lebesgueschen Konstanten k^{ter} Ordnung der Laplaceschen Reihe**).

Betrachten wir jetzt die Legendresche Reihe einer Funktion $f(x)$, so ist das n^{te} Cesàrosche Mittel k^{ter} Ordnung

$$(13)\qquad s_n^{(k)}\{f(x)\} = \frac{1}{2A_n^{(k)}}\int_{-1}^{1} f(y)\, S_n^{(k)}(x,y)\, dy,$$

wo

$$(14)\quad S_n^{(k)}(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} s_\nu(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k)}\cdot(2\nu+1)P_\nu(x)P_\nu(y).$$

Wird $f(x)$ auf die Klasse der zwischen -1 und $+1$ absolut integrablen Funktionen vom absoluten Betrage ≤ 1 beschränkt, so wird nach (13)

$$(15)\qquad \left|s_n^{(k)}\{f(x)\}\right| \leq \frac{1}{2A_n^{(k)}}\int_{-1}^{1}\left|S_n^{(k)}(x,y)\right| dy,$$

und das absolute Maximum

$$(16)\qquad \varrho_n^{(k)}(x) = \max\left|s_n^{(k)}\{f(x)\}\right| = \frac{1}{2A_n^{(k)}}\int_{-1}^{1}\left|S_n^{(k)}(x,y)\right| dy$$

wird im Punkte x erreicht, wenn f so gewählt wird, daß

$$(17)\qquad f(y) = \operatorname{sgn} S_n^{(k)}(x,y).$$

Die Ausdrücke $\varrho_n^{(k)}(x)$, welche von der Lage des Punktes x abhängig sind, nennen wir die *Lebesgueschen Majoranten k^{ter} Ordnung der Legendreschen Reihe.* Zwischen ihnen und den Lebesgueschen Konstanten $\varrho_n^{(k)}$ bestehen die Beziehungen

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\varrho_n^{(k)}(x) < \varrho_n^{(k)}, \quad -1 < x < 1;\\ &\varrho_n^{(k)}(1) = \varrho_n^{(k)}(-1) = \varrho_n^{(k)}. \end{aligned}$$

Setzen wir nämlich $x = \cos\theta$, $y = \cos\theta'$ und gehen auf die Kugel über, so wird offenbar $\varrho_n^{(k)}(x)$ gleich dem n^{ten} Cesàroschen Mittel k^{ter} Ordnung der Laplaceschen Reihe der Funktion $f(\theta',\varphi') = \operatorname{sgn} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\theta')$ und ist folglich, nach der Definition der Lebesgueschen Konstanten kleiner als $\varrho_n^{(k)}$, ausgenommen, wenn $f(\theta',\varphi')$ mit der zu $\varrho_n^{(k)}$ gehörigen Funktion $\operatorname{sgn} S_n^{(k)}(\cos\gamma)$ übereinstimmt, d. h. die Gleichung

$$(19)\qquad \operatorname{sgn} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\theta') = \operatorname{sgn} S_n^{(k)}(\cos\gamma)$$

---

*) Herr Lebesgue hat als erster auf die Bedeutung der entsprechenden Konstanten (im Falle $k=0$) der Fourierschen Reihe für deren Konvergenzproblem hingewiesen: Leçons sur les séries trigonométriques (Paris, Gauthier-Villars 1906), § 45 (S. 86).

in den Veränderlichen θ', φ' identisch besteht. In diesem Falle müssen insbesondere diejenigen Nullstellen von $S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\theta')$ und $S_n^{(k)}(\cos\gamma)$ zusammenfallen, an welchen Zeichenwechsel stattfindet; eine Nullstelle θ' jener ist aber eine Funktion von θ allein, während eine Nullstelle dieser*) durch $\cos\gamma = \text{const.}$, d. h.

$$(20) \qquad \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') = \text{const.}$$

gegeben ist. Soll nun die letzte Gleichung einen nur von θ, nicht aber von φ' abhängigen Wert von θ' liefern, so muß offenbar $\sin\theta = 0$ sein, d. h. $x = \pm 1$. Für $x = 1$ folgt aus $P_\nu(1) = 1$ und (8) und (14) sofort, daß

$$(21) \qquad S_n^{(k)}(y) = S_n^{(k)}(1, y),$$

und durch Vergleich von (12) und (16) ferner, daß

$$(22) \qquad \varrho_n^{(k)}(1) = \varrho_n^{(k)}.$$

Aus (14) erhalten wir $S_n^{(k)}(-x, -y) = S_n^{(k)}(x, y)$, und indem wir $y' = -y$ setzen, sehen wir, daß

$$(23) \quad \int_{-1}^{1} \left| S_n^{(k)}(-x, y) \right| dy = \int_{-1}^{1} \left| S_n^{(k)}(-x, -y') \right| dy' = \int_{-1}^{1} \left| S_n^{(k)}(x, y') \right| dy',$$

woraus zufolge (16)

$$(24) \qquad \varrho_n^{(k)}(-x) = \varrho_n^{(k)}(x),$$

was für $x = 1$ die letzte Gleichung in (29) ergibt.

Wir wollen jetzt nachweisen, daß *die Lebesgueschen Konstanten für* $0 < k \leqq \frac{1}{2}$ *mit* n *ins Unendliche wachsen, dagegen für* $k > \frac{1}{2}$ *für alle Werte von* n *beschränkt bleiben***).

Zunächst wollen wir den Ausdruck (12) umformen. Zu diesem Zwecke seien $x_1 > x_2 > \cdots > x_m$ diejenigen Nullstellen von $S_n^{(k)}(x)$ im Intervalle $(-1 \cdots +1)$, an welchen Zeichenwechsel stattfindet*), zufolge (8) ist $S_n^{(k)}(x)$ vom Grade n, also $m \leqq n$, und wegen $P_\nu(1) = 1$ ist $S_n^{(k)}(1)$ als Summe lauter positiver Größen selber positiv. Es ist demnach, wenn wir noch $x_0 = 1$ und $x_{m+1} = -1$ setzen,

$$\left| S_n^{(k)}(x) \right| = (-1)^\nu S_n^{(k)}(x) \text{ für } x_\nu > x > x_{\nu+1},$$

und (12) ergibt

$$(25) \qquad 2 A_n^{(k)} \varrho_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{m} \int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu} \left| S_n^{(k)}(x) \right| dx = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu} S_n^{(k)}(x)\, dx.$$

---

*) Die Existenz solcher Nullstellen von $S_n^{(k)}(x)$ im Intervalle $(-1 \cdots +1)$ wird weiter unten bewiesen.

**) Ein entsprechendes, aber weitergehendes Resultat wird für die Lebesgueschen Majoranten in § 7 abgeleitet.

Aus (8) und (I:6) folgt aber

$$(26)\qquad S_n^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} s_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \left(\frac{dP_\nu(x)}{dx} + \frac{dP_{\nu+1}(x)}{dx}\right),$$

oder, indem wir

$$(27)\qquad U_n^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} (P_\nu(x) + P_{\nu+1}(x))$$

setzen,

$$(28)\qquad S_n^{(k)}(x) = \frac{dU_n^{(k)}(x)}{dx}.$$

Es ergibt sich also

$$(29)\qquad 2A_n^{(k)}\varrho_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \left(U_n^{(k)}(x_\nu) - U_n^{(k)}(x_{\nu+1})\right)$$

$$= U_n^{(k)}(1) + (-1)^{m+1} U_n^{(k)}(-1) + 2\sum_{\nu=1}^{m} (-1)^\nu U_n^{(k)}(x_\nu).$$

Wir haben aber zufolge (I:1)

$$(30)\qquad U_n^{(k)}(1) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)}(1+1) = 2\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} = 2A_n^{(k)},$$

$$(31)\qquad U_n^{(k)}(-1) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)}((-1)^\nu + (-1)^{\nu+1}) = 0,$$

so daß endlich

$$(32)\qquad \varrho_n^{(k)} = 1 + \frac{1}{A_n^{(k)}} \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^\nu U_n^{(k)}(x_\nu).$$

Unser nächster Schritt wird darin bestehen, eine asymptotische Formel für $S_n^{(k)}(x)$, welche uns über die Lage der Nullstellen x_ν Auskunft geben wird, zu suchen. Die erzeugende Funktion von $(2n+1)P_n(x)$ ist bekanntlich

$$\frac{1-z^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(x) z^n,$$

und zufolge (5) und (6) erhalten wir

$$\frac{1+z}{(1-z)^k(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)}(x) z^n$$

oder, indem wir $\frac{1}{z}$ statt z schreiben,

$$\frac{z^{k+2}(z+1)}{(z-1)^k(z^2-2xz+1)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)}(x) z^{-n},$$

und folglich wird, wenn wir $x = \cos\theta$ einführen, nach dem Cauchyschen Satze:

(33) $$S_n^{(k)}(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^{n+k+1}(z+1)\,dz}{(z-1)^k(z-e^{\theta i})^{\frac{3}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{3}{2}}},$$

wo der Integrationsweg C alle drei singulären Punkte $z = 1$, $e^{\theta i}$ und $e^{-\theta i}$ umschließt. Die Integration geschieht im direkten Sinne, und die mehrdeutigen Ausdrücke im Integranden sind so festzulegen, daß die reellen Teile von z^k, $(z-1)^k$, $\sqrt{z-e^{\theta i}}$ und $\sqrt{z-e^{-\theta i}}$ für z reell und $= +\infty$ alle vier $= +\infty$ werden. Jetzt verstehen wir unter ε eine positive Größe $< \frac{1}{2}$ (welche wir später bis Null abnehmen lassen) und nehmen als C den Weg, welcher aus folgenden Stücken besteht:

1) der Geraden von $z = \varepsilon$ bis $z = 1 - \varepsilon$;
2) dem Kreise $z = 1 + \varepsilon e^{\varphi i}$, $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$;
3) der Geraden von $z = 1 - \varepsilon$ bis $z = \varepsilon$;
4) dem Kreisbogen $z = \varepsilon e^{\varphi i}$, $0 \leqq \varphi \leqq \theta$;
5) der Geraden von $z = \varepsilon e^{\theta i}$ bis $z = (1-\varepsilon)e^{\theta i}$;
6) dem Kreise $z = e^{\theta i} + \varepsilon e^{\varphi i}$, $\theta - \pi \leqq \varphi \leqq \theta + \pi$;
7) der Geraden von $z = (1-\varepsilon)e^{\theta i}$ bis $z = \varepsilon e^{\theta i}$;
8) dem Kreisbogen $z = \varepsilon e^{\varphi i}$, $\theta \leqq \varphi \leqq 2\pi - \theta$;
9) der Geraden von $z = \varepsilon e^{-\theta i}$ bis $z = (1-\varepsilon)e^{-\theta i}$;
10) dem Kreise $z = e^{-\theta i} + \varepsilon e^{\varphi i}$, $-\pi - \theta \leqq \varphi \leqq \pi - \theta$;
11) der Geraden von $z = (1-\varepsilon)e^{-\theta i}$ bis $z = \varepsilon e^{-\theta i}$, und
12) dem Kreisbogen $z = \varepsilon e^{\varphi i}$, $2\pi - \theta \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

Wir nehmen vorläufig, bis zum Ende von § 3, $0 < k < 1$ an; dann nähern sich die über 2), 4), 8) und 12) erstreckten Teilintegrale mit ε dem Grenzwert Null. Wegen der Festsetzung über das Vorzeichen von $(z-1)^k$ ist, im Punkte $z = 1 + \varepsilon$, $\Re(z-1)^k > 0$; um dies auf dem aus 1) und dem Halbkreise $z = 1 + \varepsilon e^{\varphi i}$, $-\pi \leqq \varphi \leqq 0$ bestehenden Wege zu erreichen, müssen wir

$$(z-1)^k = e^{-k\pi i}(1-z)^k$$

setzen, wo $(1-z)^k$ im Anfangspunkte $z = \varepsilon$ reell und positiv ist. Auf der reellen Achse ist, wegen der im Unendlichen getroffenen Festlegung von $\sqrt{z-e^{\theta i}}$ und $\sqrt{z-e^{-\theta i}}$,

$$\Re\sqrt{z-e^{\theta i}} > 0, \quad \Re\sqrt{z-e^{-\theta i}} > 0$$

und

$$(z-e^{\theta i})^{\frac{3}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{3}{2}} = (1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{3}{2}},$$

wo die rechte Seite für $z=\varepsilon$ positiv ist. Der Weg 1), 2), 3) liefert also, wenn wir ε bis Null abnehmen lassen, zu (33) den Beitrag

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{z^{n+k+1}(z+1)\,dz}{e^{-k\pi i}(1-z)^k(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_1^0 \frac{z^{n+k+1}(z+1)\,dz}{e^{-k\pi i}\cdot e^{2k\pi i}(1-z)^k(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{z^{n+k+1}(1+z)\,dz}{(1-z)^k(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{34}$$

Um das Teilintegral über den Weg 5), 6), 7) auszuwerten, wollen wir zunächst bewirken, daß der Integrand im Punkte $z=e^{\theta i}$ integrabel unendlich wird. Zu diesem Zwecke benutzen wir die Identität

$$\frac{z+1}{(z-e^{\theta i})^{\frac{3}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}+2z\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}\right],$$

woraus nach einer teilweisen Integration folgt

$$\int\frac{z^{n+k+1}(z+1)\,dz}{(z-1)^k(z-e^{\theta i})^{\frac{3}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{3}{2}}} = -\int\frac{z^{n+k+1}\,dz}{(z-1)^{k+1}(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}$$

$$-2\int\frac{z^{n+k+2}}{(z-1)^{k+1}}\cdot\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}\,dz$$

$$=-\int\frac{z^{n+k+1}\,dz}{(z-1)^{k+1}(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}-\frac{2z^{n+k+2}}{(z-1)^{k+1}}\frac{1}{(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}$$

$$+2\int\frac{1}{(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d}{dz}\frac{z^{n+k+2}}{(z-1)^{k+1}}\,dz$$

$$=-\frac{2z^{n+k+2}}{(z-1)^{k+1}}\cdot\frac{1}{(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}+\int\frac{(2n+2k+3)\,z^{n+k+1}\,dz}{(z-1)^{k+1}(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\int\frac{2(k+1)\,z^{n+k+2}\,dz}{(z-1)^{k+2}(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}}.$$

Lassen wir jetzt ε bis Null abnehmen, so verschwindet das erste Glied rechts am Anfangs- und Endpunkte $z = 0$ des Integrationsweges, die über den Kreis 6) erstreckten Integrale rechts verschwinden ebenfalls, diejenigen über 7) werden (weil $\sqrt{z - e^{\theta i}}$ bei der Umkreisung von $e^{\theta i}$ sein Vorzeichen wechselt) den entsprechenden über 5) gleich, und folglich liefert die Integration über 5), 6), 7) zu (33) den Beitrag

$$(35)\quad \frac{1}{\pi i}\int_0^{e^{\theta i}} \frac{(2n+2k+3)\, z^{n+k+1}\, dz}{(z-1)^{k+1}(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi i}\int_0^{e^{\theta i}} \frac{2(k+1)\, z^{n+k+2}\, dz}{(z-1)^{k+2}(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}},$$

wo der Integrationsweg geradlinig ist. Der Anfangswert von $(z-1)^k$ ist jetzt $e^{k\pi i}(1-z)^k$, wo $\Re(1-z)^k > 0$, und diejenigen von $\sqrt{z - e^{\theta i}}$ und $\sqrt{z - e^{-\theta i}}$ haben auch ihre reellen Teile positiv. In (35) führen wir nun

$$z = e^{\theta i}(1-u), \quad 0 \leqq u \leqq 1,$$

ein; wegen der Festlegungen über die Anfangswerte erhalten wir

$$z^k = e^{k\theta i}(1-u)^k, \quad \text{wo } (1-u)^k = 1 \text{ für } u = 0;$$

$$(z-1)^k = \left(2 \sin\frac{\theta}{2}\right)^k e^{k\cdot\frac{\theta+\pi}{2} i}\left(1 - \frac{u\, e^{\frac{\theta-\pi}{2} i}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^k,$$

$$\text{wo } \left(1 - \frac{u\, e^{\frac{\theta-\pi}{2} i}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^k = 1 \text{ für } u = 0;$$

$$\sqrt{z - e^{\theta i}} = e^{\frac{\theta-\pi}{2} i}\sqrt{u}, \quad \text{wo } \sqrt{u} > 0;$$

$$\sqrt{z - e^{-\theta i}} = \sqrt{2\sin\theta}\cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{1 - \frac{u\, e^{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) i}}{2\sin\theta}},$$

$$\text{wo } \sqrt{1 - \frac{u\, e^{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) i}}{2\sin\theta}} = 1 \text{ für } u = 0.$$

Dies alles in (35) eingetragen ergibt, wenn wir zur Abkürzung noch

$$(36)\quad \alpha = \frac{e^{\frac{\theta-\pi}{2} i}}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \beta = \frac{e^{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) i}}{2\sin\theta}$$

schreiben, den Ausdruck

$$\frac{2n+2k+3}{\pi}\cdot\frac{e^{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+1}\,du}{(1-\alpha u)^{k+1}(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{2(k+1)}{\pi}\cdot\frac{e^{\left(n+\frac{3}{2}+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+2}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+2}\,du}{(1-\alpha u)^{k+2}(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}.$$

In ganz ähnlicher Weise finden wir, daß die Integration über den Weg 9), 10), 11) nach Ausführung des Grenzüberganges $\lim \varepsilon = 0$ einen Beitrag liefert, welcher dem Ausdruck (35) konjugiert ist, sodaß wir endlich erhalten:

$$(37)\qquad S_n^{(k)}(\cos\theta)=\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^1\frac{z^{n+k+1}(1+z)\,dz}{(1-z)^k(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{2}{\pi}(2n+2k+3)\,\Re\,\frac{e^{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+1}\,du}{(1-\alpha u)^{k+1}(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{4}{\pi}(k+1)\,\Re\,\frac{e^{\left(n+\frac{3}{2}+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+2}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+2}\,du}{(1-\alpha u)^{k+2}(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}.$$

Um hieraus den gewünschten asymptotischen Ausdruck zu gewinnen, schreiten wir zur Abschätzung der rechts auftretenden Integrale. Wegen der für $0\leqq z\leqq 1$ geltenden Ungleichungen

$$1-2z\cos\theta+z^2\geqq\sin^2\theta\geqq\sin^2\frac{\theta}{2},\qquad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

$$1-2z\cos\theta+z^2\geqq 1\geqq\sin^2\frac{\theta}{2},\qquad\left(\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi\right),$$

ergibt das erste Integral

$$(38)\qquad\left|\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^1\frac{z^{n+k+1}(1+z)\,dz}{(1-z)^k(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right|<\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{z^{n+k+1}\cdot 2\,dz}{(1-z)^k\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}$$

$$=\frac{2}{\pi\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}\cdot\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma(n+k+2)}{\Gamma(n+3)}.$$

Zufolge (36) ist für $0 \leqq u \leqq 1$

$$|1-\alpha u|^2 = \left(1-\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{4}\cot^2\frac{\theta}{2} \geqq \left(1-\frac{u}{2}\right)^2 \geqq \frac{1}{4},$$

$$|1-\beta u|^2 = \left(1-\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{4}\cot^2\theta \geqq \left(1-\frac{u}{2}\right)^2 \geqq \frac{1}{4},$$

sodaß

(39) $$\frac{1}{|1-\alpha u|} \leqq 2, \qquad \frac{1}{|1-\beta u|} \leqq 2;$$

ferner zeigt die Identität

$$\frac{1}{(1-\alpha u)^{k+1}(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \int_0^u \left(\frac{(k+1)\alpha}{(1-\alpha v)^{k+2}(1-\beta v)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2}\beta}{(1-\alpha v)^{k+1}(1-\beta v)^{\frac{3}{2}}}\right) dv$$

unter Anwendung von (39), daß

$$\left|\frac{1}{(1-\alpha u)^{k+1}(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}} - 1\right| < \int_0^u \left(2^{k+2+\frac{1}{2}}(k+1)|\alpha| + 2^{k+1+\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}|\beta|\right) dv$$

$$= \left(\frac{2^{k+\frac{5}{2}}(k+1)}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{2^{k+\frac{3}{2}}}{2\sin\theta}\right) u.$$

Das zweite Integral in (37) ergibt demnach

$$\Bigg| \frac{2}{\pi}(2n+2k+3)\,\Re\,\frac{e^{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta i - \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+1}\,du}{(1-\alpha u)^{k+1}(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{2}{\pi}(2n+2k+3)\,\Re\,\frac{e^{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta i - \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+1}\,du \Bigg|$$

$$< \frac{2}{\pi}(2n+2k+3)\cdot\frac{1}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2^{k+\frac{5}{2}}(k+1)}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{2^{k+\frac{3}{2}}}{2\sin\theta}\right)$$

$$\cdot \int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+1}\,du,$$

oder nach Auswertung der auftretenden Eulerschen Integrale erster Gattung und Anwendung von $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$:

$$(40)\quad \left|\frac{2}{\pi}(2n+2k+3)\,\Re\,\frac{e^{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+1}\,du}{(1-\alpha u)^{k+1}(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left.-\frac{4}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+2)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{\cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right]}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\right|$$

$$<\frac{2}{\pi}(2n+2k+3)\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+k+2)}{\Gamma\left(n+k+\frac{7}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\cdot\left(\frac{2^{k+\frac{5}{2}}(k+1)}{2\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{2^{k+\frac{3}{2}}}{2\sin\theta}\right)$$

$$<\frac{2}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+2)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2^{k+\frac{5}{2}}(1+1)}{\sin\theta}+\frac{2^{k+\frac{3}{2}}}{2\sin\theta}\right)$$

$$<\frac{4}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+2)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)}\cdot\frac{2^{k+4}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir erhalten endlich aus (39) die Abschätzung des letzten Integrals in (37):

$$(41)\quad \left|\frac{4}{\pi}(k+1)\,\Re\,\frac{e^{\left(n+\frac{3}{2}+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+2}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+2}\,du}{(1-\alpha u)^{k+2}(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}\right|$$

$$<\frac{4}{\pi}(k+1)\,\frac{1}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+2}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^1 2^{k+2+\frac{1}{2}}\,u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k+2}\,du$$

$$=\frac{4}{\pi}(k+1)\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+3)}{\Gamma\left(n+k+\frac{7}{2}\right)}\cdot\frac{2^{k+\frac{5}{2}}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+2}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$<\frac{4}{\pi}\cdot 2\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+2)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)}\cdot\frac{2\cdot 2^{k+\frac{5}{2}}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnen wir mit η_1 und η_2 reelle Größen, deren absolute Beträge $\leqq 1$

sind für jedes positive ganzzahlige n und jedes θ im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 1$, so folgt aus (37), (38), (40) und (41) der asymptotische Ausdruck

$$(42)\qquad S_n^{(k)}(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+2)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{\cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right]}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{2}{\pi}\,\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma(n+k+2)}{\Gamma(n+3)}\cdot\frac{8\eta_1}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{3}}$$
$$+\frac{12}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+2)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)}\,\frac{2^{k+4}\eta_2}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um jetzt über die Lage der Nullstellen von $S_n^{(k)}(\cos\theta)$ Aufschluß zu gewinnen, schreiben wir (42) in der Form

$$(43)\qquad \frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+2)}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+\frac{3}{2}}\left(2\sin\theta\right)^{\frac{3}{2}}S_n^{(k)}(\cos\theta)$$
$$=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sin\theta\,\cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right]$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+3)}\cdot 8\eta_1\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$+\frac{3}{n+k+\frac{3}{2}}\cdot 2^{k+4}\eta_2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

und tragen für θ den Wert

$$(44)\qquad \theta_0=\frac{1}{2n+2+k}\left(4\lambda+1+2k+\frac{2\varkappa}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\pi}{2}$$

ein, wo $\varkappa=\pm 1$, und die ganze Zahl λ den Bedingungen

$$8\leqq\lambda\leqq\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

genügt (was $n\geqq 17$ erfordert). Dann ist zunächst

$$\frac{1}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{2}}}<\frac{1}{2},$$

ferner

$$\frac{2\lambda+k}{n+1+\frac{k}{2}}\,\frac{\pi}{2}<\theta_0<\frac{2\lambda+k+1}{n+1+\frac{k}{2}}\,\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2},$$

und folglich

$$\frac{2\lambda+k}{n+1+\frac{k}{2}} < \frac{2}{\pi}\,\theta_0 < 2\sin\frac{\theta_0}{2} < \theta_0 < \frac{2\lambda+k+1}{n+1+\frac{k}{2}}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{2\lambda+k}{n+1+\frac{k}{2}} < \frac{2}{\pi}\,\theta_0 < \sin\theta_0,$$

$$\sin\left(\frac{1}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{\pi}{2}\right) > \frac{1}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{4}}}.$$

Zufolge (44) ist

$$(45)\quad \cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta_0-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right]=(-1)^{\lambda}\varkappa\sin\left(\frac{1}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Ferner ergibt sich aus (16)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+3)} < c_9\cdot\frac{1}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{\frac{3}{2}-k}},$$

und alle diese Abschätzungen ergeben

$$\begin{aligned}
&\left|\left(2\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sin\theta_0\cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta_0-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right]\right|\\
&-\left|\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+3)}\cdot 8\eta_1\left(2\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^{k}\left(2\cos\frac{\theta_0}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{n+k+\frac{3}{2}}\cdot 2^{k+4}\eta_2\left(2\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right|\\
&>\left(\frac{2\lambda+k}{n+1+\frac{k}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot\frac{2\lambda+k}{n+1+\frac{k}{2}}\cdot\frac{1}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{4}}}\\
&-\frac{c_9}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{\frac{3}{2}-k}}\cdot 8\left(\frac{2\lambda+k+1}{n+1+\frac{k}{2}}\,\frac{\pi}{2}\right)^{k}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\\
&-\frac{3}{n+1+\frac{k}{2}}\cdot 2^{k+4}\left(\frac{2\lambda+k+1}{n+1+\frac{k}{2}}\,\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[2(2\lambda+k)^{\frac{5}{4}}-c_{10}(2\lambda+k+1)^{k}-c_{11}(2\lambda+k+1)^{\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Folglich existiert eine von n unabhängige ganze Zahl λ_1, derart, daß für $\lambda \geqq \lambda_1$ der letzte, eingeklammerte Ausdruck positiv wird, und wir dürfen offenbar $\lambda_1 \geqq 8$ annehmen. Für $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ hat dann, wie die vorhergehende Ungleichung zeigt, die rechte Seite von (43) für $\theta = \theta_0$ das Vorzeichen ihres ersten Gliedes, d. h. es ist wegen (45)

$$(46) \qquad \operatorname{sgn} S_n^{(k)}(\cos\theta_0) = (-1)^\lambda \cdot \varkappa, \quad \lambda_1 \leqq \lambda \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Wir tragen jetzt in (43) für θ den Wert

$$(47) \qquad \theta_0' = \frac{1}{2n+2+k}(4\lambda+1+2k+\varkappa)\frac{\pi}{2}$$

ein, wo $\varkappa = \pm 1$ und $\left[\frac{n+1}{2}\right] \leqq \lambda \leqq n$, ($\lambda$ ganzzahlig). Dann wird

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2\lambda+k}{n+1+\frac{k}{2}}\,\frac{\pi}{2} \leqq \theta_0' \leqq \frac{2\lambda+1+k}{n+1+\frac{k}{2}}\,\frac{\pi}{2} < \pi,$$

und folglich

$$\sin\theta_0' = \sin(\pi-\theta_0') \geqq \sin\frac{2(n-\lambda)+1}{n+1+\frac{k}{2}}\,\frac{\pi}{2} > \frac{2(n-\lambda)+1}{n+1+\frac{k}{2}},$$

$$\sin\frac{\theta_0'}{2} > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left(2\cos\frac{\theta_0'}{2}\right)^{\frac{3}{2}} < 2\cdot\left(2\cos\frac{\theta_0'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(2\sin\frac{\pi-\theta_0'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < 2\left(2\cdot\frac{n-\lambda+1}{n+1+\frac{k}{2}}\,\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aus (47) erhalten wir

$$(48) \qquad \cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta_0' - \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right] = \frac{(-1)^\lambda\cdot\varkappa}{\sqrt{2}},$$

und unsere verschiedenen Abschätzungen ergeben

$$\begin{aligned}
&\left|\left(2\sin\frac{\theta_0'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sin\theta_0'\cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta_0' - \left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right]\right| \\
&\quad - \left|\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+3)}\cdot 8\eta_1\left(2\sin\frac{\theta_0'}{2}\right)^k\left(2\cos\frac{\theta_0'}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{3}{n+k+\frac{3}{2}}\cdot 2^{k+4}\cdot\eta_2\left(2\sin\frac{\theta_0'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right| \\
&\quad > 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2\cdot\frac{2(n-\lambda)+1}{n+1+\frac{k}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{c_9}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{\frac{3}{2}-k}}\cdot 8\cdot 2^k\cdot 2\left(\frac{n-\lambda+1}{n+1+\frac{k}{2}}\,\pi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{3}{n+1+\frac{k}{2}}\cdot 2^{k+4}\cdot\sqrt{2} > \frac{2^{\frac{3}{4}}}{n+1+\frac{k}{2}}\left[2(n-\lambda)+1-c_{12}(n-\lambda+1)^{\frac{1}{2}}-c_{13}\right].
\end{aligned}$$

Demnach existiert eine von n unabhängige ganze Zahl λ_2 derart, daß für $n - \lambda \geqq \lambda_2$ der letzte, eingeklammerte Ausdruck positiv wird, und für $\left[\frac{n+1}{2}\right] \leqq \lambda \leqq n - \lambda_2$ hat dann, wie die vorhergehende Ungleichung zeigt, die rechte Seite von (43) für $\theta = \theta_0'$ das Vorzeichen ihres ersten Gliedes, d. h. es ist wegen (48)

$$\text{(49)} \qquad \operatorname{sgn} S_n^{(k)}(\cos\theta_0') = (-1)^\lambda \cdot \varkappa, \quad \left[\frac{n+1}{2}\right] \leqq \lambda \leqq n - \lambda_2.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß

$$n \geqq \max(2\lambda_1 + 1, 2\lambda_2),$$

damit es überhaupt Werte von λ gibt, welche den Bedingungen in (46) und (49) genügen; dann liegt wegen (46) in jedem Intervalle

$$\frac{1}{2n+2+k}\left(4\lambda + 1 + 2k - \frac{2}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$< \theta < \frac{1}{2n+2+k}\left(4\lambda + 1 + 2k + \frac{2}{(2\lambda+1)^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\pi}{2},$$

wo $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ ist, eine ungerade Anzahl von Wurzeln

$$\text{(50)} \qquad \theta_\lambda = \frac{1}{2n+2+k}\left(4\lambda + 1 + 2k + \frac{2h_\lambda}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\pi}{2}, \quad |h_\lambda| < 1,$$

ungerader Ordnung von $S_n^{(k)}(\cos\theta) = 0$; wenn es deren mehrere im fraglichen Intervalle gibt, sei θ_λ die kleinste unter ihnen. Für

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] \leqq \lambda \leqq n - \lambda_2$$

liegt wegen (49) in jedem Intervalle

$$\frac{2\lambda+k}{2n+2+k}\pi < \theta < \frac{2\lambda+1+k}{2n+2+k}\pi$$

auch eine ungerade Anzahl von Wurzeln

$$\text{(51)} \qquad \theta_\lambda = \frac{1}{2n+2+k}(4\lambda + 1 + 2k + h_\lambda)\frac{\pi}{2}, \quad |h_\lambda| < 1,$$

ungerader Ordnung; wenn es deren mehrere gibt, sei θ_λ wie vorhin die kleinste unter ihnen. Das Intervall zwischen den letzten zu (50) und den ersten zu (51) gehörigen Intervallen läßt sich, wenn wir $\left[\frac{n-1}{2}\right] = \lambda'$ und folglich $\left[\frac{n+1}{2}\right] = \lambda' + 1$ setzen, durch die Ungleichungen

$$\frac{1}{2n+2+k}\left(4\lambda' + 1 + 2k + \frac{2}{(2\lambda'+k)^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2\lambda'+2+k}{2n+2+k}\pi$$

darstellen; in demselben liegt, zufolge (46) und (49), eine gerade Anzahl von Wurzeln ungerader Ordnung.

Wir bezeichneten vorhin mit $x_1, x_2, \cdots, x_m$, wo

$$1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_m > -1,$$

diejenigen Wurzeln von $S_n^{(k)}(x) = 0$, an welchen Zeichenwechsel stattfindet; aus dem soeben Bewiesenen können wir nunmehr schließen, daß sich jedem λ, welches den Bedingungen $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq n - \lambda_2$ genügt, ein $\nu = \nu_\lambda$ zuordnen läßt derart, daß

$$\cos \theta_\lambda = x_{\nu_\lambda},$$

und es ist offenbar

$$\nu_{\lambda+1} > \nu_\lambda, \quad \nu_{\lambda+1} - \nu_\lambda \equiv 1 \pmod 2,$$

d. h.

$$\nu_{\lambda+1} - (\lambda + 1) \equiv \nu_\lambda - \lambda \pmod 2,$$

sodaß

$$\sum_{\nu=1}^{m} (-1)^\nu U_n^{(k)}(x_\nu) = (-1)^{\nu_{\lambda_1} - \lambda_1} \sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2} (-1)^\lambda U_n^{(k)}(\cos \theta_\lambda) + \sum_\nu{}' (-1)^\nu U_n^{(k)}(x_\nu),$$

wo Σ' sich auf die bei der obigen Zuordnung möglicherweise übrig gebliebenen x_ν bezieht. Die Anzahl dieser ist, wegen $m \leqq n$, höchstens gleich $\lambda_1 + \lambda_2 - 1$; ferner haben wir

$$|U_n^{(k)}(x)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} (|P_\nu(x)| + |P_{\nu+1}(x)|) \leqq 2 \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} = 2 A_n^{(k)},$$

sodaß

$$\left| 1 + \frac{1}{A_n^{(k)}} \sum_\nu{}' (-1)^\nu U_n^{(k)}(x_\nu) \right| \leqq 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 1,$$

und es folgt aus (32), daß

$$(52) \quad \varrho_n^{(k)} = (-1)^{\nu_{\lambda_1} - \lambda_1} \sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2} (-1)^\lambda U_n^{(k)}(\cos \theta_\lambda) + O(1),^{*)} \quad (n \geqq \max(2\lambda_1 + 1, 2\lambda_2)).$$

---

*) Die Bezeichnung $f(n) = O(g(n))$ bedeutet, daß sich eine Konstante A finden läßt derart, daß für jedes hinreichend große n

$$|f(n)| < A g(n).$$

Insbesondere ist also $O(1)$ eine Größe, welche für alle Werte von n beschränkt ist.

§ 3.

Fortsetzung von § 2.

Um zur gewünschten Abschätzung der rechten Seite von (52) zu gelangen, wird es vor allem nötig sein, einen asymptotischen Ausdruck für $U_n^{(k)}(\cos\theta)$ aufzustellen.

Die erzeugende Funktion von $P_n(x) + P_{n+1}(x)$ ist offenbar

$$\frac{1+z}{z\sqrt{1-2xz+z^2}} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (P_n(x) + P_{n+1}(x)) z^n;$$

durch Multiplikation mit $\frac{1}{(1-z)^k}$ ergibt sich unter Berücksichtigung von (31)

$$\frac{1}{(1-z)^k}\left(\frac{1+z}{z\sqrt{1-2xz+z^2}} - \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}(x) z^n,$$

oder indem wir $\frac{1}{z}$ statt z schreiben

$$\frac{z^{k+1}}{(z-1)^k}\left(\frac{1+z}{z\sqrt{z^2-2xz+1}} - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}(x) z^{-n}.$$

Unter Einführung von $x = \cos\theta$ ergibt dann der Cauchysche Satz

$$(53) \qquad U_n^{(k)}(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{n+k}}{(z-1)^k}\left(\frac{z+1}{(z-e^{\theta i})^{\frac{1}{2}}(z-e^{-\theta i})^{\frac{1}{2}}} - 1\right) dz,$$

wo C den in (33) verwendeten Integrationsweg bedeutet; die mehrdeutigen Ausdrücke im Integranden sind genau wie dort festzulegen. Wörtlich wie bei (33) finden wir, daß die über 2), 4), 8) und 12) erstreckten Teilintegrale sich mit ε dem Grenzwert Null nähern, sowie daß das über den Weg 1), 2), 3) genommene Teilintegral zu (53) den Beitrag liefert

$$\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{z^{n+k}}{(1-z)^k}\left(\frac{1+z}{(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}}} - 1\right) dz$$

$$= \frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{z^{n+k}(1+z)\,dz}{(1-z)^k(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin k\pi}{\pi}\,\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+2)}.$$

Das über den Weg 5), 6), 7) erstreckte Teilintegral wird genau wie bei (33) behandelt — mit der einzigen Ausnahme, daß die dort vorgenommene teilweise Integration hier wegfällt, da ja der Integrand für $z = e^{\theta i}$ integrabel unendlich wird — und es ergibt sich zu (53) der Beitrag

$$\frac{1}{2\pi}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k}(1+e^{\theta i}-ue^{\theta i})}{(1-\alpha u)^k(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Die Integration über den Weg 9), 10), 11) liefert endlich zu (53) einen Beitrag, welcher dem vorhergehenden Ausdruck konjugiert ist, und indem wir die gewonnenen Resultate zusammenfassen, erhalten wir

$$(54)\quad U_n^{(k)}(\cos\theta)=-\frac{\sin k\pi}{\pi}\,\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+2)}$$

$$+\frac{\sin k\pi}{\pi}\int\limits_0^1\frac{z^{n+k}(1+z)\,dz}{(1-z)^k(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\Re\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k}(1+e^{\theta i}-ue^{\theta i})}{(1-\alpha u)^k(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Jetzt schreiten wir zur Abschätzung der in dieser Formel vorkommenden Integrale. Aus der Identität

$$\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}-\frac{1+z}{(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\int\limits_z^1\frac{d}{dz}\,\frac{1+z}{(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}}}\,dz$$

$$=\int\limits_z^1\frac{(1+\cos\theta)(1-z)}{(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz$$

erhalten wir wegen $1-2z\cos\theta+z^2\geq\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$:

$$\left|\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}-\frac{1+z}{(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right|<\int\limits_z^1\frac{2(1-z)}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}\,dz=\frac{(1-z)^2}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}$$

und folglich

$$\left|\frac{\sin k\pi}{\pi}\int\limits_0^1\frac{z^{n+k}(1+z)\,dz}{(1-z)^k(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\sin k\pi}{\pi\sin\frac{\theta}{2}}\int\limits_0^1\frac{z^{n+k}\,dz}{(1-z)^k}\right|$$

$$<\frac{1}{\pi\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}\int\limits_0^1 z^{n+k}(1-z)^{2-k}\,dz.$$

Nach Auswertung der hier auftretenten Eulerschen Integrale erster Gattung finden wir

$$\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{z^{n+k}(1+z)\,dz}{(1-z)^k(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac12}} = \frac{\sin k\pi}{\pi\sin\frac{\theta}{2}}\,\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+2)}$$

$$+\frac{\eta_3}{\pi\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}\,\frac{\Gamma(3-k)\,\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+4)}, \quad |\eta_3|\leqq 1.$$

Aus der Identität

$$\frac{1+e^{\theta i}-ue^{\theta i}}{(1-\alpha u)^k(1-\beta u)^{\frac12}}-(1+e^{\theta i}) = \int_0^u \frac{d}{du}\,\frac{1+e^{\theta i}-ue^{\theta i}}{(1-\alpha u)^k(1-\beta u)^{\frac12}}\,du$$

$$=\int_0^u\left[-\frac{e^{\theta i}}{(1-\alpha u)^k(1-\beta u)^{\frac12}}+\frac{k\alpha\left(1+(1-u)e^{\theta i}\right)}{(1-\alpha u)^{k+1}(1-\beta u)^{\frac12}}\right.$$

$$\left.+\frac{\beta}{2}\,\frac{1+(1-u)e^{\theta i}}{(1-\alpha u)^k(1-\beta u)^{\frac32}}\right]du$$

folgt unter Berücksichtigung von (39)

$$\left|\frac{1+e^{\theta i}-ue^{\theta i}}{(1-\alpha u)^k(1-\beta u)^{\frac12}}-(1+e^{\theta i})\right|$$

$$<\int_0^u\left[2^{k+\frac12}+\frac{k}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot 2\cdot 2^{k+1+\frac12}+\frac12\cdot\frac{1}{2\sin\theta}\cdot 2\cdot 2^{k+\frac32}\right]du$$

$$<\int_0^u\frac{2^{k+4}}{\sin\theta}\,du=\frac{2^{k+4}}{\sin\theta}\,u,$$

und hieraus ergibt sich ferner

$$\left|\frac{1}{\pi}\,\Re\,\frac{e^{\left(n+\frac12+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac14+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k(2\sin\theta)^{\frac12}}\int_0^1\frac{u^{-\frac12}(1-u)^{n+k}\left(1+e^{\theta i}-ue^{\theta i}\right)}{(1-\alpha u)^k(1-\beta u)^{\frac12}}\,du\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\,\Re\,\frac{e^{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac14+\frac{k}{2}\right)\pi i}\,2\cos\frac{\theta}{2}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k(2\sin\theta)^{\frac12}}\int_0^1 u^{-\frac12}(1-u)^{n+k}\,du\right|$$

$$<\frac{1}{\pi}\,\frac{2^{k+4}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k(2\sin\theta)^{\frac32}}\int_0^1 u^{\frac12}(1-u)^{n+k}\,du,$$

oder endlich

$$\frac{1}{\pi}\,\Re\,\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)\theta i-\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+k}(1+e^{\theta i}-ue^{\theta i})}{(1-\alpha u)^k(1-\beta u)^{\frac{1}{2}}}\,du$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}}\cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta-\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+k+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)}\,\frac{2^{k+4}\eta_4}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}},\qquad |\eta_4|\leqq 1.$$

Diese Abschätzungen, in (54) eingetragen, ergeben das Resultat

$$U_n^{(k)}(\cos\theta)=-\frac{\Gamma(1-k)\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+2)}\,\frac{\sin k\pi}{\pi}+\frac{\Gamma(1-k)\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+2)}\,\frac{\sin k\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+k+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}}\cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta-\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\pi\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma(3-k)\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+4)}\cdot\frac{\eta_3}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+k+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)}\cdot\frac{2^{k+4}\eta_4}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

oder

(55) $$\frac{1}{A_n^{(k)}}\,U_n^{(k)}(\cos\theta)=-\Gamma(1+k)\Gamma(1-k)\frac{\sin k\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$+\Gamma(1+k)\Gamma(1-k)\frac{\sin k\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+k)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta-\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma(1+k)\Gamma(3-k)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+4)}\cdot\frac{\eta_3(\theta)}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1+k)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)}\cdot\frac{2^{k+4}\eta_4(\theta)}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es liefert nun das erste Glied rechts in (55) zu (52) den Beitrag

$$(-1)^{\nu_{\lambda_1}-\lambda_1+1}\Gamma(1+k)\Gamma(1-k)\frac{\sin k\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2}(-1)^{\lambda}=O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

weil die Summe links nur einen der drei Werte -1, 0, $+1$ annehmen kann; der betreffende Beitrag ist also für jeden Wert von n beschränkt. Das zweite Glied rechts in (55) trägt zu (52) den Ausdruck

$$(-1)^{\nu_{\lambda_1}-\lambda_1}\Gamma(1+k)\Gamma(1-k)\frac{\sin k\pi}{\pi}\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2}\frac{(-1)^{\lambda}}{(n+1)\sin\frac{\theta_\lambda}{2}}$$

bei; wegen $0<\theta_\lambda<\theta_{\lambda+1}<\pi$ nehmen die Glieder der hier auftretenden alternierenden Reihe dem absoluten Betrage nach ab, sodaß der absolute Betrag der Reihe denjenigen ihres ersten Gliedes nicht übertrifft, was zufolge (50)

$$\left|\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2}\frac{(-1)^{\lambda}}{(n+1)\sin\frac{\theta_\lambda}{2}}\right|\leqq\frac{1}{(n+1)\sin\frac{\theta_{\lambda_1}}{2}}<\frac{1}{(n+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\lambda_1+1}{n+1+\frac{k}{2}}}<\frac{4}{2\lambda_1+1}$$

ergibt; es ist also der betreffende Beitrag für alle n beschränkt.

Das vierte Glied rechts in (55) ergibt zu (52) den Beitrag

$$\frac{(-1)^{\nu_{\lambda_1}-\lambda_1}}{\pi}\cdot\Gamma(1+k)\Gamma(3-k)\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2}\frac{(-1)^{\lambda}\eta_3(\theta_\lambda)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\theta_\lambda}{2}\right)^3},$$

und der absolute Betrag der Reihe ist höchstens gleich

$$\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\theta_\lambda}{2}\right)^3}<\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2}\frac{1}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^3}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\theta_\lambda}{2}\right)^3}$$

$$<\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2}\frac{1}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\lambda+k}{2n+2+k}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^3}=\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2}\frac{1}{\left(\lambda+\frac{k}{2}\right)^3}<\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^3};$$

der betreffende Beitrag ist also wiederum für alle n beschränkt.

Das letzte Glied in (55) liefert ferner zu (52) den Beitrag

$$\frac{(-1)^{\nu_{\lambda_1}-\lambda_1}}{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1+k)\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)}\cdot\frac{(-1)^{\lambda}2^{k+4}\eta_4(\theta_\lambda)}{\left(2\sin\frac{\theta_\lambda}{2}\right)^k(2\sin\theta_\lambda)^{\frac{3}{2}}};$$

wir haben nun einerseits nach (16)

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)} < c_{14} \cdot \frac{1}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{k+\frac{3}{2}}},$$

andererseits aber zufolge der vorhin gefundenen Ungleichungen für θ_λ:

wenn $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$:

$$\frac{1}{2\sin\frac{\theta_\lambda}{2}} < \frac{n+1+\frac{k}{2}}{2\lambda+k} < \frac{n+1+\frac{k}{2}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2\sin\theta_\lambda} < \frac{n+1+\frac{k}{2}}{2(2\lambda+k)};$$

und wenn $\left[\frac{n-1}{2}\right] \leqq \lambda \leqq n-\lambda_2$:

$$\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} < \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4}} < \frac{n+1+\frac{k}{2}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2\sin\theta_\lambda} < \frac{n+1+\frac{k}{2}}{2(2(n-\lambda)+1)} < \frac{n+1+\frac{k}{2}}{2(2(n-\lambda)+k)}.$$

Hieraus folgt

$$\left|\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{5}{2}\right)} \cdot \frac{(-1)^\lambda 2^{k+4}\eta_4(\theta_\lambda)}{\left(2\sin\frac{\theta_\lambda}{2}\right)^k (2\sin\theta_\lambda)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

$$< \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{2^{k+4}c_{14}}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{k+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^k}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}(2\lambda+k)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \sum_{\lambda=\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{n-\lambda_2} \frac{2^{k+4}c_{14}}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{k+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^k}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}(2(n-\lambda)+k)^{\frac{3}{2}}}$$

$$< 2^{\frac{k+5}{2}} c_{14}\left(\sum_{\lambda=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{(2\lambda+k)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\lambda=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-1} \frac{1}{(2(n-\lambda)+k)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= 2^{\frac{k+7}{2}} c_{14} \sum_{\lambda=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{(2\lambda+k)^{\frac{3}{2}}} < 2^{\frac{k}{2}+2} c_{14} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}},$$

und wegen der Konvergenz der letzten Reihe ist also der Beitrag des letzten Gliedes in (55) zu (52) für alle n beschränkt. Es bleibt uns demnach, als möglicherweise einen mit n ins Unendliche wachsenden Beitrag

zu (52) liefernd, nur das dritte Glied in (55), und wir können folglich schreiben

(56) $$\varrho_n^{(k)} = (-1)^{\nu_{\lambda_1}-\lambda_1} \sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+k)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)} \frac{\left(2\cos\frac{\theta_\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2\sin\frac{\theta_\lambda}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}}$$
$$\cdot (-1)^\lambda \cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta_\lambda - \left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right] + O(1).$$

Um die hier auftretende Summe abzuschätzen, zerlegen wir

$$\sum_{\lambda=\lambda_1}^{n-\lambda_2} = \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} + \sum_{\lambda=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-\lambda_2} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

In Σ_1 haben wir zufolge (50):

$$(-1)^\lambda \cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta_\lambda - \left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right] = \cos\frac{h_\lambda}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{2}}}\frac{\pi}{2}, \quad |h| < 1,$$

und wegen $\lambda \geqq \lambda_1 \geqq 8$, $0 < k < 1$ wird

$$1 > \cos\frac{1}{(2\lambda+k)^{\frac{1}{2}}}\frac{\pi}{2} > \cos\frac{1}{16^{\frac{1}{2}}}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

aus den vorhin für θ_λ gefundenen Ungleichungen erhalten wir

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1+\frac{k}{2}}{\lambda} > \frac{n+1+\frac{k}{2}}{2\lambda+k} > \frac{1}{2\sin\frac{\theta_\lambda}{2}} > \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n+1+\frac{k}{2}}{2\lambda+k+1} > \frac{1}{\pi}\cdot\frac{n+1+\frac{k}{2}}{\lambda+1},$$

sowie, weil $0 < \theta_\lambda \leqq \frac{\pi}{2}$ ist,

$$1 > \cos\frac{\theta_\lambda}{2} \geqq \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Endlich ergibt (16)

$$\frac{c_{16}}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}} > \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+k)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)} > \frac{1}{c_{16}}\frac{16}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}};$$

aus allen diesen Abschätzungen schließen wir, daß

(57) $$c_{17}\sum_{\lambda=\lambda_1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{1}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}} > \Sigma_1 > \frac{1}{c_{18}}\sum_{\lambda=\lambda_1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{1}{(\lambda+1)^{k+\frac{1}{2}}}.$$

In Σ_2 haben wir zufolge (51)

$$(-1)^\lambda \cos\left[\left(n+1+\frac{k}{2}\right)\theta_\lambda - \left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi\right] = \cos h_\lambda \frac{\pi}{2}, \quad |h_\lambda| < 1,$$

$$1 > \cos h_\lambda \frac{\pi}{2} > 0,$$

sowie wegen $\frac{\pi}{2} < \theta_\lambda < \pi$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4}} > \frac{1}{2\sin\frac{\theta_\lambda}{2}} > \frac{1}{2}, \quad 1 > \cos\frac{\theta_\lambda}{2} > 0,$$

sodaß

$$(58) \qquad \frac{c_{19}}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}}\left(n-\lambda_2-\left[\frac{n+1}{2}\right]+1\right)$$

$$= \frac{c_{19}}{\left(n+1+\frac{k}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{\lambda=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-\lambda_2} 1 > \Sigma_2 > 0.$$

Weil nun $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}}$ für $k > \frac{1}{2}$ konvergiert, für $k \leqq \frac{1}{2}$ aber divergent ist, so folgt endlich aus (56), (57) und (58), daß $\varrho_n^{(k)}$ für alle n beschränkt bleibt, wenn $1 > k > \frac{1}{2}$, dagegen mit n ins Unendliche wächst, wenn $\frac{1}{2} \geqq k > 0$. Aus der Formel (20) und der Definition der Lebesgueschen Konstanten folgt aber sofort, daß für $k' > k$

$$\varrho_n^{(k')} \leqq \max\left(\varrho_0^{(k)}, \varrho_1^{(k)}, \cdots, \varrho_n^{(k)}\right);$$

setzen wir z. B. $k = \frac{3}{4}$, $k' \geqq 1$, so schließen wir aus dem soeben bewiesenen, daß $\varrho_n^{(k')}$ für alle n beschränkt bleibt, und der in § 2 aufgestellte Satz ist somit im vollen Umfange bewiesen.

Werden die in den äußeren Gliedern von (57) auftretenden Summen in bekannter elementarer Weise abgeschätzt, so ergibt sich, wenn wir außerdem bedenken, daß $\varrho_n^{(k)}$ der Definition nach eine positive Größe ist:

$$(59) \qquad \left.\begin{array}{ll} c_{20} n^{\frac{1}{2}-k} > \varrho_n^{(k)} > \frac{1}{c_{21}} n^{\frac{1}{2}-k}, & 0 < k < \frac{1}{2}, \\ c_{22} \log n > \varrho_n^{(k)} > \frac{1}{c_{23}} \log n, & k = \frac{1}{2}, \\ c_{24} > \varrho_n^{(k)} > 0 \qquad , & k > \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots).$$

Für $k = 0$ läßt sich die Untersuchung durch geeignete Abänderung des hier angewandten Verfahrens durchführen; in § 2 meiner früheren Arbeit wurde gezeigt, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varrho_n^{(0)}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.^{*)}$$

§ 4.

Beispiel einer stetigen Funktion, bei welcher für $k \leqq \frac{1}{2}$ die Cesàroschen Mittel k^{ter} Ordnung in einem Punkte divergieren.

Beispiele der verlangten Art lassen sich, von der soeben bewiesenen Beziehung $\lim_{n=\infty} \varrho_n^{(k)} = \infty \left(0 < k \leqq \frac{1}{2}\right)$ ausgehend, durch einfache Abänderung eines von Herrn Lebesgue für $k = 0$ angegebenen, und von Herrn Haar weiter ausgebildeten Verfahrens**) leicht aufstellen. Statt dessen schlagen wir hier einen direkten Weg ein, welcher zu einem einfacheren Ausdruck für die verlangte Funktion führt.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine für $-1 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion zu bilden, deren Legendresche Reihe die Eigenschaft hat, daß ihre Cesàroschen Mittel k^{ter} Ordnung für $x = 1$ divergent sind. Es genügt $k = \frac{1}{2}$ anzunehmen; denn aus der Divergenz der Cesàroschen Mittel der Ordnung $\frac{1}{2}$ folgt a fortiori, nach § 1, die Divergenz derjenigen der Ordnung k, wenn $-1 < k < \frac{1}{2}$.

Aus (26) und der ebenfalls in § 2 gegebenen Formel

$$S_n^{(k)}(1, y) = S_n^{(k)}(y)$$

folgt für $k = \frac{1}{2}$

$$s_n^{(\frac{1}{2})}\{f(1)\} = \frac{1}{2A_n^{(\frac{1}{2})}} \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, S_n^{(\frac{1}{2})}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta.$$

Wir setzen ferner für ganzzahlige positive m

$$f_m(\cos\theta) = \cos\left(m + \frac{3}{2}\right)\theta$$

*) Ein etwas vereinfachter Beweis findet sich in meiner demnächst in den Transactions of the American Mathematical Society erscheinenden Abhandlung 'On the degree of convergence of Laplace's series'.

**) A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (erste Mitteilung) Math. Ann. 69 (1910), S. 331—371, Kap. I, § 1.

und zerlegen für $n > 3$

$$s_n^{(\frac{1}{2})}\{f_m(1)\} = \frac{1}{2A_n^{(\frac{1}{2})}}\int\limits_0^{\frac{3\pi}{n}} + \frac{1}{2A_n^{(\frac{1}{2})}}\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi}.$$

In dem ersten Integral haben wir

$$\left|\frac{1}{2A_n^{(\frac{1}{2})}}S_n^{(\frac{1}{2})}(\cos\theta)\right| \leqq \frac{1}{2A_n^{(\frac{1}{2})}}S_n^{(\frac{1}{2})}(1) = \frac{1}{2A_n^{(\frac{1}{2})}}\left(A_n^{(\frac{1}{2}+1)} + A_{n-1}^{(\frac{1}{2}+1)}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+n+1\right)\left(\frac{1}{2}+2n+2\right)}{2\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)} = O(n^2),$$

wie aus der Betrachtung der erzeugenden Funktion von $S_n^{(k)}(x)$ unschwer gefolgert werden kann, und es wird demnach

$$\left|\frac{1}{2A_n^{(\frac{1}{2})}}\int\limits_0^{\frac{3\pi}{n}}\right| = O(n^2)\int\limits_0^{\frac{3\pi}{n}}\sin\theta\,d\theta = O(n^2)\cdot 2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2 = O(1).$$

In dem zweiten Integral wird, wenn in (42) $k = \frac{1}{2}$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{2A_n^{(\frac{1}{2})}}S_n^{(\frac{1}{2})}(\cos\theta) = -\frac{2n+3}{2n+2}\,\frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4}\,\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\,\frac{8\eta_1}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}$$

$$+ \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\,\frac{2^{\frac{1}{2}+4}\eta_2}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{n\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Betrachten wir zuerst den von dem Restglied gelieferten Beitrag, so wird

$$\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi} O\left(\frac{1}{n\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\right)\cos\left(m+\frac{3}{2}\right)\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi}\frac{d\theta}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\right) = O(1),$$

denn es ist

$$\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi}\frac{d\theta}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}<\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\theta}{(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}\left(\frac{n}{3\pi}-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\theta}{(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Fassen wir die vorangehenden Abschätzungen zusammen, so ergibt sich

$$(60)\qquad s_n^{(\frac{1}{2})}\{f_m(1)\}=-\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi}\frac{\cos\left(m+\frac{3}{2}\right)\theta\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\sin\theta\, d\theta+O(1)$$

$$=-\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi}\cos(m+n+3)\theta\,\frac{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi}\cos(m-n)\theta\,\frac{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta+O(1).$$

Die in (60) auftretenden Integrale sind von der Form

$$\int\limits_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi}\cos l\theta\,\frac{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta,$$

wo l eine ganze Zahl ist, welche unbeschadet der Allgemeinheit $\geqq 0$ angenommen werden kann. Betrachten wir zuerst den Fall $2l\geqq n$; dann läßt sich eine positive ganze Zahl λ angeben derart, daß

$$\frac{2\lambda-1}{2l}\pi<\frac{3\pi}{n}\leqq\frac{2\lambda+1}{2l}\pi,$$

und es wird

$$\int_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi} = \int_{\frac{3\pi}{n}}^{\frac{2\lambda+1}{2l}\pi} + \int_{\frac{2\lambda+1}{2l}\pi}^{\frac{2\lambda+3}{2l}\pi} + \int_{\frac{2\lambda+3}{2l}\pi}^{\frac{2\lambda+5}{2l}\pi} + \cdots + \int_{\frac{2l-3}{2l}\pi}^{\frac{2l-1}{2l}\pi} + \int_{\frac{2l-1}{2l}\pi}^{\pi}.$$

Vom ersten und letzten Gliede abgesehen, bilden die Integrale rechts eine alternierende Reihe, deren Glieder dem absoluten Betrage nach abnehmen, weil $\dfrac{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ eine monoton abnehmende Funktion ist. Die Reihensumme ist also, absolut genommen, kleiner als ihr erstes Glied, und es folgt

$$\left|\int_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi}\right| < \left|\int_{\frac{3\pi}{n}}^{\frac{2\lambda+1}{2l}\pi}\right| + \left|\int_{\frac{2\lambda+1}{2l}\pi}^{\frac{2\lambda+3}{2l}\pi}\right| + \left|\int_{\frac{2l-1}{2l}\pi}^{\pi}\right|$$

$$< \int_{\frac{2\lambda-1}{2l}\pi}^{\frac{2\lambda+3}{2l}\pi} \frac{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta + \int_{\frac{2l-1}{2l}\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta < \int_{\frac{2\lambda-1}{2l}\pi}^{\frac{2\lambda+3}{2l}\pi} \frac{\sqrt{2}\,d\theta}{\frac{2}{\pi}\theta} + \int_{\frac{2l-1}{2l}\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{2}\,d\theta}{2\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\log\frac{2\lambda+3}{2\lambda-1} + \frac{\pi}{2l} \leqq \frac{\pi}{\sqrt{2}}\log 5 + \frac{\pi}{2},$$

oder

$$\int_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi} \cos l\theta \frac{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta = O(1) \quad \text{für} \quad 2l \geqq n.$$

Zweitens betrachten wir den Fall $l = 0$; dann wird

$$\int_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi} \frac{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta > \int_{\frac{3\pi}{n}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta > \int_{\frac{3\pi}{n}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}}\,d\theta}{\frac{2}{\pi}\theta} = \frac{\pi}{2}(\log n - \log 9),$$

und wir erhalten demnach aus (60)

$$(61)\qquad \left|s_n^{(\frac{1}{2})}\{f(1)\}\right| > \frac{\pi}{8}\log n - O(1) \quad \text{für} \quad m = n$$

$$= O(1) \quad \text{für} \quad |m-n| \geqq \frac{n}{2}.$$

Die Funktion

$$(62)\qquad f(\cos\theta) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2}\cos\left(2^{\mu^3}+\frac{3}{2}\right)\theta$$

hat jetzt die verlangte Eigenschaft; denn erstens ist $f(\cos\theta)$, als gleichmäßig konvergente Reihe von für $0 \leqq \theta \leqq \pi$ stetigen Gliedern, im betrachteten Intervalle selber stetig, und zweitens divergieren für $\theta = 0$ die Cesàroschen Mittel der Ordnung $\frac{1}{2}$ der zugehörigen Legendreschen Reihe. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist nämlich, wenn wir $m = 2^{\mu^3}$, $n = 2^{\nu^3}$ setzen,

$$s_n^{(\frac{1}{2})}\{f(1)\} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}s_n^{(\frac{1}{2})}\{f_m(1)\} = \frac{1}{\nu^2}s_n^{(\frac{1}{2})}\{f_n(1)\} + \sum_{\mu \neq \nu}\frac{1}{\mu^2}s_n^{(\frac{1}{2})}\{f_m(1)\},$$

und weil offenbar $|m-n| > \frac{n}{2}$ für $\mu \neq \nu$, so ist zufolge (62)

$$\left|s_n^{(\frac{1}{2})}\{f(1)\}\right| \geqq \frac{1}{\nu^2}\left|s_n^{(\frac{1}{2})}\{f_n(1)\}\right| - \sum_{\mu\neq\nu}\frac{1}{\mu^2}\left|s_n^{(\frac{1}{2})}\{f_m(1)\}\right|$$

$$> \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{\pi}{8}\cdot\nu^3\log 2 - O(1)\right) - \sum_{\mu\neq\nu}\frac{1}{\mu^2}\,O(1)$$

$$= \frac{\pi\log 2}{8}\cdot\nu - O(1),$$

was mit ν ins Unendliche wächst.

§ 5.

Die Konvergenz der Cesàroschen Mittel der Ordnung $k > \frac{1}{2}$ für absolut integrable Funktionen.

Zunächst wollen wir zwei Hilfsformeln ableiten, welche lauten

$$(63)\qquad \left|S_n^{(k)}(\cos\theta)\right| < \frac{c_{35}\sqrt{n+1}}{(1-\cos\theta)\sqrt{\sin\theta}}, \quad 0<\theta<\pi, \quad 0<k\leqq 1,$$

$$(64)\qquad \left|S_n^{(1)}(\cos\theta)\right| < \frac{2n+2}{1-\cos\theta}, \quad 0<\theta<\pi, \quad k=1.$$

Zufolge (8) und (I:5) ist nämlich

$$(65)\qquad S_n^{(k)}(\cos\theta)=\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}s_\nu(\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{1-\cos\theta}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}\cdot(\nu+1)\left(P_\nu(\cos\theta)-P_{\nu+1}(\cos\theta)\right)$$

$$=\frac{1}{1-\cos\theta}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\left[(\nu+1)A_{n-\nu}^{(k-1)}-\nu A_{n-\nu+1}^{(k-1)}\right]P_\nu(\cos\theta)-(n+1)P_{n+1}(\cos\theta)\right\}$$

$$=\frac{1}{1-\cos\theta}\left\{A_n^{(k-1)}+\sum_{\nu=1}^{n}\left[1+\frac{\nu(1-k)}{1+n-\nu}\right]A_{n-\nu}^{(k-1)}P_\nu(\cos\theta)-(n+1)P_{n+1}(\cos\theta)\right\}.$$

Nun ergibt die Formel (I: 7) mit $p=1$, daß für $0<\theta<\pi$ und $n\geqq 1$

$$|P_n(\cos\theta)|<\frac{c_{26}}{\sqrt{n\sin\theta}};$$

wenden wir außerdem (3) an, so erhalten wir aus (65)

$$|S_n^{(k)}(\cos\theta)|<\frac{1}{1-\cos\theta}\left\{\frac{c_6}{(n+1)^{1-k}}+\sum_{\nu=1}^{n}\left[1+\frac{\nu(1-k)}{1+n-\nu}\right]\frac{c_6}{(1+n-\nu)^{1-k}}\frac{c_{26}}{\sqrt{\nu\sin\theta}}\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)\,c_{26}}{\sqrt{(n+1)\sin\theta}}\right\}$$

$$<\frac{1}{(1-\cos\theta)\sqrt{\sin\theta}}\left\{c_6+c_6c_{26}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\nu}(1+n-\nu)^{1-k}}\right.$$
$$\left.+c_6c_{26}(1-k)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sqrt{\nu}}{(1+n-\nu)^{2-k}}+c_{26}\sqrt{n+1}\right\}.$$

Es sei aber für $0<k\leqq 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\nu}(1+n-\nu)^{1-k}}\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\nu}}<\int_0^n\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{n},$$

sowie für $0<k<1$, nach einer teilweisen Integration

$$(1-k)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sqrt{\nu}}{(1+n-\nu)^{2-k}}=(1-k)\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\sqrt{\nu}}{(1+n-\nu)^{2-k}}+(1-k)\sqrt{n}$$

$$<(1-k)\int_1^n\frac{\sqrt{u}\,du}{(1+n-u)^{2-k}}+(1-k)\sqrt{n}$$

$$=\sqrt{n}-\frac{1}{n^{1-k}}-\frac{1}{2}\int_1^n\frac{du}{\sqrt{u}(1+n-u)^{1-k}}+(1-k)\sqrt{n}$$

$$<\sqrt{n}+(1-k)\sqrt{n}<2\sqrt{n+1}.$$

Die letzte Ungleichung gilt auch für $k=1$, weil dann der Ausdruck links gleich Null ist, und wir erhalten, diese Abschätzungen in die vorhergehende Formel eintragend,

$$|S_n^{(k)}(\cos\theta)| < \frac{1}{(1-\cos\theta)\sqrt{\sin\theta}}\{c_6+2c_6c_{26}\sqrt{n}+2c_6c_{26}\sqrt{n+1}+c_{26}\sqrt{n+1}\},$$

woraus (63) sofort folgt.

Für $k=1$ erhalten wir aus (65)

$$S_n^{(1)}(\cos\theta) = \frac{1}{1-\cos\theta}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu(\cos\theta)-(n+1)P_{n+1}(\cos\theta)\right\},$$

woraus

$$|S_n^{(1)}(\cos\theta)| < \frac{1}{1-\cos\theta}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{n} 1+n+1\right\},$$

was die Formel (64) ist.

Wir betrachten jetzt eine auf der ganzen Einheitskugel absolut integrable Funktion $f(\theta,\varphi)$, welche in dem besonderen Punkte (θ,φ) stetig sei. Wir wollen zeigen, daß in diesem Punkte, unter einer gewissen, auf den Punkt $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ bezüglichen Bedingung, die Cesàroschen Mittel der Ordnung $k>\frac{1}{2}$ gegen $f(\theta,\varphi)$ konvergieren. Zum Beweise ziehen wir auf der Einheitskugel um den Punkt $(\theta,\ \varphi)$ und seinen Gegenpol $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ je einen Kreis vom sphärischen Radius $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ und teilen dadurch K in drei Teile. Der Teil, welcher $(\theta,\ \varphi)$ enthält, heiße K_1, derjenige welcher $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ enthält K_2, und der übrig bleibende Teil K_3. Dann ist

$$S_n^{(k)}\{f(\theta,\varphi)\} = \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_K f(\theta',\varphi')S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do' = \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\left(\int\limits_{K_1}+\int\limits_{K_2}+\int\limits_{K_3}\right). \tag{66}$$

Es sei δ eine beliebig kleine, positive Größe. Wir können dann, weil $f(\theta',\varphi')$ im Punkte $(\theta,\ \varphi)$ stetig ist, ε so klein wählen, daß in jedem Punkte von K_1

$$|f(\theta',\varphi')-f(\theta,\varphi)| < \frac{\delta}{3c_{24}}, \tag{67}$$

und es folgt dann aus (59), daß

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_1} f(\theta',\varphi')\,S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do' - \frac{f(\theta,\varphi)}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_1} S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do'\right| \\
&\quad< \frac{\delta}{3c_{24}}\cdot\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_1}|S_n^{(k)}(\cos\gamma)|\,do' \\
&\quad< \frac{\delta}{3c_{24}}\cdot\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K}|S_n^{(k)}(\cos\gamma)|\,do' = \frac{\delta}{3c_{24}}\cdot\varrho_n^{(k)} < \frac{\delta}{3}\cdot
\end{aligned}$$

Es ist ferner

$$\left|\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_1} S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do' - \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K} S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do'\right| < \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_2+K_3} |S_n^{(k)}(\cos\gamma)|\,do',$$

und weil in K_2 und K_3 $\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi$ ist, so wird zufolge (3) und (63)

$$\frac{1}{A_n^{(k)}}\left|S_n^{(k)}(\cos\gamma)\right| < \frac{c_5}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c_{25}}{1-\cos\varepsilon}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin\gamma}},$$

sodaß

$$\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_2+K_3} \left|S_n^{(k)}(\cos\gamma)\right|do' < \frac{c_5}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c_{25}}{1-\cos\varepsilon}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K}\frac{do'}{\sqrt{\sin\gamma}}$$

$$< \frac{c_{27}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(1-\cos\varepsilon)},$$

denn wenn wir den Nordpol nach (θ, φ) verlegen, so wird

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K}\frac{do'}{\sqrt{\sin\gamma}} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K}\sqrt{\sin\theta'}\,d\theta'\,d\varphi' < \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\theta'\,d\varphi' = \frac{\pi}{2},$$

bleibt also endlich. Außerdem haben wir

$$\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K} S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do' = 1,$$

denn nach der Definition von $S_n^{(k)}(\cos\gamma)$ ist

$$\frac{1}{A_n^{(k)}}S_n^{(k)}(\cos\gamma) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_{n-\nu}^{(k)}}{A_n^{(k)}}P_\nu(\cos\gamma),$$

und zufolge der Grundeigenschaft der Kugelfunktionen haben wir

$$\int\limits_{K} P_n(\cos\gamma)\,do' = 0, \quad n \geqq 1.$$

Dies alles zusammengenommen, ergibt

$$\left|\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_1} f(\theta', \varphi')\,S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do' - f(\theta, \varphi)\right| < \frac{\delta}{3} + |f(\theta, \varphi)|\cdot\frac{c_{27}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(1-\cos\varepsilon)}, \tag{68}$$

und zwar gilt dies, wie aus dem obigen Beweisgang sofort folgt, gleichmäßig, wenn (θ, φ) in einem Bereiche variiert, welcher im Inneren eines Stetigkeitsbereiches für $f(\theta, \varphi)$ enthalten ist.

In K_2 haben wir zufolge (3) und (63), da $\pi - \varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi$ ist,

$$\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\left|S_n^{(k)}(\cos\gamma)\right| < \frac{c_5}{4\pi(n+1)^k}\cdot\frac{c_{25}\sqrt{n+1}}{(1-\cos\gamma)\sqrt{\sin\gamma}} < \frac{c_{28}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}\sqrt{\sin\gamma}},$$

sodaß

$$(69)\qquad \left|\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int_{K_2} f(\theta',\varphi')\,S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do'\right| < \frac{c_{28}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\int_{K_2}\frac{|f(\theta',\varphi')|}{\sqrt{\sin\gamma}}\,do';$$

wegen $k > \frac{1}{2}$ nähert sich der rechtsstehende Ausdruck mit wachsendem n dem Grenzwert Null, wenn $f(\theta',\varphi')$ in der Umgebung K_2 von $\pi-\theta$, $\varphi+\pi$ beschränkt ist, oder allgemeiner, dem Integral

$$\int_{K_2}\frac{|f(\theta',\varphi')|}{\sqrt{\sin\gamma}}\,do'$$

einen endlichen Wert erteilt.

Im Falle $k = 1$ können wir über die linke Seite von (69) mehr aussagen. Wenn $A_n^{(1)} = n + 1$ ergibt sich nämlich aus (64), da in K_2 $1 - \cos\gamma > 1 + \cos\varepsilon > 1$,

$$\frac{1}{4\pi A_n^{(1)}}\left|S_n^{(1)}(\cos\gamma)\right| < \frac{1}{4\pi(n+1)}\cdot\frac{2n+2}{1} = \frac{1}{2\pi},$$

woraus

$$(70)\qquad \left|\frac{1}{4\pi A_n^{(1)}}\int_{K_2} f(\theta',\varphi')\,S_n^{(1)}(\cos\gamma)\,do'\right| < \frac{1}{2\pi}\int_{K_2}|f(\theta',\varphi')|\,do',$$

und die rechte Seite von (70) wird, zufolge der absoluten Integrierbarkeit von $f(\theta,\varphi)$, mit abnehmendem ε beliebig klein, und zwar, wie aus dem Heine-Borelschen Beweisverfahren sofort zu entnehmen ist, gleichmäßig, wo auch der Punkt θ, φ auf der Kugelfläche liegen mag.

Gehen wir schließlich zu K_3 über, so ist zufolge $\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi - \varepsilon$ und (3) und (63):

$$\left|\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int_{K_3} f(\theta',\varphi')S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do'\right| < \frac{c_5}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c_{25}}{(1-\cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}}\cdot\frac{1}{4\pi}\int_{K_3}|f(\theta',\varphi')|\,do'$$

$$< \frac{c_{28}G}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(1-\cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}},$$

wo

$$G = \frac{1}{4\pi}\int_{K}|f(\theta',\varphi')|\,do'$$

wegen der absoluten Integrierbarkeit endlich ist.

Die Zusammenfassung der vorhergehenden Abschätzungen liefert zufolge (66)

$$(71)\quad |s_n^{(k)}\{f(\theta,\varphi)\}-f(\theta,\varphi)|<\frac{\delta}{3}+\left|\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_2} f(\theta',\varphi')\,S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do'\right|$$
$$+\frac{1}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{1-\cos\varepsilon}\left(c_{27}\,|f(\theta,\varphi)|+\frac{c_{28}\,G}{\sqrt{\sin\varepsilon}}\right).$$

Für $\frac{1}{2}<k<1$ legen wir zuerst $\sin\varepsilon$ der Bedingung (67) gemäß fest; nähert sich dann das zweite Glied rechts in (71) für unbegrenzt wachsendes n dem Grenzwert Null (z. B. wenn die unter Gleichung (69) angegebene Bedingung erfüllt ist), so kann ein N angegeben werden derart, daß für $n\geqq N$ das zweite und dritte Glied rechts jedes kleiner als $\frac{\delta}{3}$ wird, und wir erhalten

$$(72)\qquad |s_n^{(k)}\{f(\theta,\varphi)\}-f(\theta,\varphi)|<\delta \quad \text{für}\quad n\geqq N.$$

Für $k=1$ kann ε so klein gewählt werden, daß erstens (67) erfüllt ist und zweitens der Ausdruck rechts in (70) kleiner als $\frac{\delta}{3}$ wird; nach solcher Festlegung von ε wird dann, für $n\geqq N$ und N hinreichend groß, auch das dritte Glied rechts in (71) kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$, und die Ungleichung (72) ist erfüllt.

Es besteht sogar (72) gleichmäßig in einem ganz innerhalb eines Stetigkeitsbereiches von $f(\theta,\varphi)$ gelegenen Bereich, falls nur für $k<1$ die auf K_2 bezügliche Bedingung daselbst gleichmäßig erfüllt ist. Wir können also den folgenden Satz aussprechen:

Hauptsatz I. *Es sei $f(\theta,\varphi)$ eine auf der Einheitskugel K im Riemannschen Sinne absolut integrable Funktion; dann ist die zugehörige Laplacesche Reihe summierbar $(C;k)$, wo $\frac{1}{2}<k<1$, mit der Summe $f(\theta,\varphi)$ in jedem Punkte (θ,φ), wo $f(\theta,\varphi)$ stetig ist, und wo der auf eine beliebig kleine Umgebung des Gegenpols $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ bezügliche Ausdruck*

$$\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_2} f(\theta',\varphi')\,S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do'$$

mit unbegrenzt wachsendem n dem Grenzwert Null zustrebt (was z. B. zutrifft, wenn die gegebene Funktion in der Umgebung des Gegenpols beschränkt ist). In einem Bereiche, welcher dem Inneren eines Stetigkeitsbereiches von $f(\theta,\varphi)$ angehört und in welchem sich der auf den Gegenpol bezügliche Ausdruck mit unbegrenzt wachsendem n der Null gleichmäßig nähert, ist die Summierbarkeit eine gleichmäßige.

Für $k = 1$ (und a fortiori für $k > 1$) gilt der Satz mit dem Unterschied, daß die obige Gegenpolbedingung überhaupt wegfällt.

Betrachten wir noch diejenige Art der Unstetigkeit von $f(\theta, \varphi)$, welche der Dirichletschen Unstetigkeit bei den Fourierschen Reihen entspricht. Durch den Punkt (θ, φ) legen wir einen Großkreisbogen, dessen geographische Länge von einem beliebigen Punkt auf dem zu (θ, φ) als Nordpol gehörigen Äquator aus gemessen ψ sei. Wir nehmen an, daß, wenn (θ', φ') sich auf diesem Großkreisbogen dem Punkte (θ, φ) nähert

$$\lim f(\theta', \varphi') = F(\theta, \varphi, \psi)$$

und zwar gleichmäßig für $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$, wobei $F(\theta, \varphi, \psi)$ eine integrable Funktion von ψ mit der Periode 2π sein soll.

In einem derartigen Unstetigkeitspunkte (θ, φ) ist nun für $\frac{1}{2} < k < 1$

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(k)} \{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi)\, d\psi,$$

wenn die Gegenpolbedingung des Hauptsatzes erfüllt ist. Für $k \geqq 1$ fällt diese Bedingung weg.

Zum Beweise benutzen wir wiederum die Zerlegung (66) und betrachten zuerst K_1. Wir können dann bei beliebig kleinem δ unser ε so klein wählen, daß, wenn (θ', φ') in K_1 auf dem zu ψ gehörigen Großkreisbogen liegt,

$$|f(\theta', \varphi') - F(\theta, \varphi, \psi)| < \frac{\delta}{3 c_{24}}$$

wird für jedes ψ wo $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$. Dann wird

$$\left| \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int_{K_1} f(\theta', \varphi') S_n^{(k)}(\cos\gamma)\, do' - \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int_{K_1} F(\theta, \varphi, \psi) S_n^{(k)}(\cos\gamma)\, do' \right|$$
$$< \frac{\delta}{3 c_{24}} \cdot \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int_{K_1} |S_n^{(k)}(\cos\gamma)|\, do' < \frac{\delta}{3}.$$

Verlegen wir den Nordpol nach (θ, φ), so wird

$$\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int_{K_1} F(\theta, \varphi, \psi) S_n^{(k)}(\cos\gamma)\, do'$$
$$= \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int_0^{\varepsilon} \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi) S_n^{(k)}(\cos\theta') \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi)\, d\psi \cdot \frac{1}{2 A_n^{(k)}} \int_0^{\varepsilon} S_n^{(k)}(\cos\theta') \sin\theta'\, d\theta'$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi)\, d\psi \cdot \frac{1}{4\pi A_n^{(k)}} \int_{K_1} S_n^{(k)}(\cos\gamma)\, do'.$$

Wenn wir die früher gegebenen Abschätzungen von $\frac{1}{4\pi A_n^{(k)}}\int\limits_{K_1} S_n^{(k)}(\cos\gamma)\,do'$ und der Integrale über K_2 und K_3 benutzen, so ergibt sich die Ungleichung (71) mit dem Unterschied, daß auf beiden Seiten $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\theta,\varphi,\psi)\,d\psi$ statt $f(\theta,\varphi)$ steht, und der Beweis wird wie vorhin zu Ende geführt.

§ 6.

Beispiel zum Nachweis der Notwendigkeit der Gegenpolbedingung im Hauptsatze I.

Man könnte vermuten, daß das Auftreten der Gegenpolbedingung nur an der Unvollkommenheit der Abschätzung (63) läge und daß die Bedingung selbst überflüssig wäre. Daß dem aber nicht so ist, soll jetzt an einem Beispiel dargetan werden.

Dazu gebrauchen wir den folgenden zuerst von S. Chapman bewiesenen Hilfssatz:*)

Wenn die Reihe $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$ summierbar $(C;\,k)$ ist, wo $k \geqq 0$, so besteht die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{n^k} = 0. \tag{73}$$

Das Beispiel ist folgendes. Franz Neumann und Stieltjes haben die formelle Entwicklung**)

$$\frac{2^\omega}{(1-x)^\omega} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)}\,\frac{(2n+1)\,\Gamma(n+\omega)}{\Gamma(n+2-\omega)}\,P_n(x), \qquad (0<\omega<1) \tag{74}$$

ohne Konvergenzuntersuchung***) angegeben.

*) S. Chapman, Non-integral orders of summability of series and integrals, Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1911), S. 369—409. Siehe S. 379.

**) Franz Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, Leipzig, B. G. Teubner 1878 (S. 133). Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris, Gauthier-Villars 1905, Bd. 2, S. 46. Vgl. auch L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe, Math. Ann. 67 (1909), S. 76—109 (S. 100—103).

***) Nach einem allgemeinen Satze von E. W. Hobson, On the representation of a function by a series of Legendre's functions, Proc. London Math. Soc. II; 7 (1909), S. 24—39, konvergiert die Reihe für $-1<x<1$, wenn $0<\omega<\frac{3}{4}$, und für $x=-1$, wenn $0<\omega<\frac{1}{2}$. Nach Fejér l. c. divergiert die Reihe im ganzen Intervalle $-1<x<1$, wenn $\frac{3}{4}\leqq\omega<1$, sowie für $x=-1$, wenn $\frac{1}{2}\leqq\omega<1$, und für $x=+1$ findet offenbar immer Divergenz statt.

Im Punkte $x = -1$ ist die Funktion links in (75) stetig, und im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ ist sie absolut integrierbar. Trotzdem divergieren für $x = -1$ die Cesàroschen Mittel k^{ter} Ordnung $\left(\frac{1}{2} < k < 1\right)$ der Reihe (75), sobald $\omega \geqq \frac{1+k}{2}$. Bezeichnen wir nämlich mit $u_n(x)$ das $n+1^{\text{te}}$ Reihenglied, so ist

$$u_n(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)} \cdot \frac{(2n+1)\Gamma(n+\omega)}{\Gamma(n+2-\omega)}$$

$$= (-1)^n \frac{2\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)} \cdot n^{2\omega-1}(1+\delta_n), \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0$$

nach der Stirlingschen Formel (Fejér, l. c. S. 102, Gl. (27)), und es folgt für $2\omega - 1 \geqq k$

$$\lim_{n=\infty} \frac{|u_n(-1)|}{n^k} \neq 0, \tag{75}$$

was in Verbindung mit dem Hilfssatze unsere Behauptung beweist. Es ist also insbesondere die auf den Gegenpol $x = +1$ bezügliche Bedingung des Hauptsatzes I nicht erfüllt.

§ 7.

Die Lebesgueschen Majoranten k^{ter} Ordnung der Legendreschen Reihe.

Wie bereits in § 2 hervorgehoben wurde, spielen bei der Legendreschen Reihe die Lebesgueschen Majoranten k^{ter} Ordnung $\varrho_n^{(k)}(x)$ dieselbe Rolle, wie die Lebesgueschen Konstanten $\varrho_n^{(k)}$ bei der Laplaceschen Reihe.

Wir wollen jetzt beweisen, daß *für ein festes $\varepsilon > 0$ und $k > 0$ die Lebesgueschen Majoranten für $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ und jedes n beschränkt sind.*

Aus (4) folgt unmittelbar, daß für $k' > k$

$$\varrho_n^{(k')}(x) \leqq \max\left(\varrho_0^{(k)}(x), \varrho_1^{(k)}(x), \cdots, \varrho_n^{(k)}(x)\right),$$

sodaß es nur nötig ist, den obigen Satz für $0 < k < 1$ zu beweisen, $\left(\text{für } k > \frac{1}{2} \text{ ist er sogar eine direkte Folgerung aus (18) und (59)}\right)$.

Wir bestimmen η durch die Bedingung

$$\cos\eta = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \eta < \frac{\pi}{2}$$

und setzen $x = \cos\theta$, $y = \cos\vartheta$, wo $\eta \leqq \theta \leqq \pi - \eta$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$; dann wird zufolge (16):

(76) $$\varrho_n^{(k)}(\cos\theta) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2A_n^{(k)}} |S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)| \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}} + \int_{\theta-\frac{\pi}{n}}^{\theta+\frac{\pi}{n}} + \int_{\theta+\frac{\pi}{n}}^{\pi} = J_1 + J_2 + J_3,$$

wobei wir uns n als so groß gewählt denken, daß $\frac{\eta}{2} - \frac{\pi}{n} > 0$ und folglich

(77) $$\theta - \frac{\pi}{n} > \theta - \frac{\eta}{2} \geqq \frac{\eta}{2}, \quad \theta + \frac{\pi}{n} < \theta + \frac{\eta}{2} \leqq \pi - \frac{\eta}{2}$$

wird. Betrachten wir zuerst J_2, indem wir $S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)$ in der Form

$$S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k)} \cdot (2\nu+1) P_\nu(\cos\theta) P_\nu(\cos\vartheta)$$

schreiben. Es ist nach der Stieltjesschen Annäherungsformel (14) mit $p = 0$

$$P_\nu(\cos\theta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{(\nu+1)\sin\theta}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{(\nu+1)\sin\eta}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right),$$

sowie zufolge (77)

$$P_\nu(\cos\vartheta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{(\nu+1)\sin\vartheta}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{(\nu+1)\sin\frac{\eta}{2}}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right);$$

demnach ist

$$(2\nu+1) P_\nu(\cos\theta) P_\nu(\cos\vartheta) = O(1)$$

und

$$\frac{1}{2A_n^{(k)}} |S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)| = O\left(\frac{1}{2A_n^{(k)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k)}\right) = O\left(\frac{A_n^{(k+1)}}{2A_n^{(k)}}\right) = O(n),$$

sowie endlich

(78) $$J_2 = \int_{\theta-\frac{\pi}{n}}^{\theta+\frac{\pi}{n}} O(n) \sin\vartheta\, d\vartheta = O\left(\frac{2\pi}{n} O(n)\right) = O(1).$$

Zum Zweck der Abschätzung von J_1 und J_3 benutzen wir (I:4) in Verbindung mit der Formel (I:7), in welcher wir $p = 1$ setzen und mit Benutzung der Stirlingschen Formel für $\Gamma(x)$

$$P_\nu(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{(\nu+1)\pi\sin\theta}} \cdot \cos\left(\frac{2\nu+1}{2}\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{M_\nu}{(\nu+1)^{\frac{3}{2}}(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

erhalten, wo M_ν für $0 \leqq \theta \leqq \pi$ und jedes ν beschränkt ist. Hieraus folgt

$$P_\nu(\cos\theta)P_{\nu+1}(\cos\vartheta)-P_{\nu+1}(\cos\theta)P_\nu(\cos\vartheta)$$
$$=\frac{2}{(\nu+1)\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\sin\vartheta}}\Big[\cos\Big(\frac{2\nu+1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\Big)\cos\Big(\frac{2\nu+3}{2}\vartheta-\frac{\pi}{4}\Big)$$
$$-\cos\Big(\frac{2\nu+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\Big)\cos\Big(\frac{2\nu+1}{2}\vartheta-\frac{\pi}{4}\Big)\Big]$$
$$+\frac{M_\nu'}{(\nu+1)^2(\sin\theta\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}},$$

wo M_ν' ebenfalls für $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\vartheta\leqq\pi$ und jedes ν beschränkt ist. Durch Zerlegung der trigonometrischen Produkte in Summen bestätigt man leicht die Identität

$$\cos\Big(\frac{2\nu+1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\Big)\cos\Big(\frac{2\nu+3}{2}\vartheta-\frac{\pi}{4}\Big)-\cos\Big(\frac{2\nu+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\Big)\cos\Big(\frac{2\nu+1}{2}\vartheta-\frac{\pi}{4}\Big)$$
$$=\sin(\nu+1)(\theta-\vartheta)\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}-\cos(\nu+1)(\theta+\vartheta)\sin\frac{\theta-\vartheta}{2},$$

und zufolge dieser wird

$$(\nu+1)[P(\cos\theta)P_{\nu+1}(\cos\vartheta)-P_{\nu+1}(\cos\theta)P_\nu(\cos\vartheta)]$$
$$=\frac{2}{\pi\sqrt{\sin\theta\sin\vartheta}}\Big[\sin(\nu+1)(\theta-\vartheta)\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}-\cos(\nu+1)(\theta+\vartheta)\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\Big]$$
$$+\frac{M_\nu'}{(\nu+1)(\sin\theta\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(\nu+1)\frac{P_\nu(\cos\theta)P_{\nu+1}(\cos\vartheta)-P_{\nu+1}(\cos\theta)P_\nu(\cos\vartheta)}{\cos\vartheta-\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\pi\sqrt{\sin\theta\sin\vartheta}}\left[\frac{\sin(\nu+1)(\theta-\vartheta)}{\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}}-\frac{\cos(\nu+1)(\theta+\vartheta)}{\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}}\right]$$
$$+\frac{M_\nu'}{2(\nu+1)\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}(\sin\theta\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}},$$

sowie nach (14) und (I:4):

$$(79)\qquad S_n^{(k)}(\cos\theta\cos\vartheta)=\frac{1}{\pi\sqrt{\sin\theta\sin\vartheta}}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}\frac{\sin(\nu+1)(\theta-\vartheta)}{\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}}$$
$$-\frac{1}{\pi\sqrt{\sin\theta\sin\vartheta}}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}\frac{\cos(\nu+1)(\theta+\vartheta)}{\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}}$$
$$+\frac{1}{2\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}(\sin\theta\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}\frac{M_\nu'}{\nu+1}.$$

Es ist nun für $\eta \leqq \theta \leqq \pi - \eta$ und $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$

$$\left| \frac{1}{\pi \sqrt{\sin\theta \sin\vartheta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \frac{\cos(\nu+1)(\theta+\vartheta)}{\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}} \right|$$

$$\leqq \frac{1}{\pi\sqrt{\sin\eta \sin\vartheta}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{(k-1)}}{\sin\frac{\eta}{2}} = \frac{A_n^{(k)}}{\pi \sin\frac{\eta}{2} \sqrt{\sin\eta\sin\vartheta}};$$

der Beitrag, welchen das zweite Glied rechts in (79) zu J_1 und J_3 liefert, ist demnach absolut genommen kleiner als

$$\frac{1}{2\pi \sin\frac{\eta}{2}\sqrt{\sin\eta}} \left(\int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin\vartheta}\, d\vartheta + \int_{\theta+\frac{\pi}{n}}^{\pi} \sqrt{\sin\vartheta}\, d\vartheta \right) = O(1).$$

Wir haben ferner, weil M_ν' für jedes ν beschränkt ist, unter Benutzung von (3):

$$(80) \qquad \left| \frac{1}{2A_n^{(k)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \frac{M_\nu}{\nu+1} \right|$$

$$< \frac{c_{33}}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n-\nu+1)^{k-1}}{\nu+1} < c_{33} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(\nu+1)(n-\nu+1)}$$

$$= \frac{c_{33}}{n+2} \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{n-\nu+1} \right) = \frac{2c_{33}}{n+2} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu+1}$$

$$< \frac{2c_{33}}{n+2} (\log(n+1)+1) < c_{34} \frac{\log(n+1)}{n+1} \quad \text{für} \quad n \geqq 1.$$

Der Beitrag, welchen das dritte Glied rechts in (79) zu J_1 liefert, ist demnach absolut genommen kleiner als

$$(81) \qquad c_{34} \frac{\log(n+1)}{n+1} \int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{2\left|\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\right| \sin\frac{\theta+\vartheta}{2} (\sin\theta\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$< \frac{c_{34}}{\sin\frac{\eta}{2}(\sin\eta)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\log(n+1)}{n+1} \int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}} \frac{d\vartheta}{2\left|\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\right| \sqrt{\sin\vartheta}} = O\left(\frac{\log^2(n+1)}{n+1}\right),$$

denn es ist

$$\int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}} \frac{d\vartheta}{2\left|\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\right|\sqrt{\sin\vartheta}} = \int_0^{\frac{\eta}{2}} + \int_{\frac{\eta}{2}}^{\theta-\frac{\pi}{n}} < \frac{1}{2\sin\frac{\eta}{4}} \int_0^{\frac{\eta}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\eta}{2}}} \int_{\frac{\eta}{2}}^{\theta-\frac{\pi}{n}} \frac{d\vartheta}{2\left|\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\right|}$$

und

$$\int_{\frac{\eta}{2}}^{\theta-\frac{\pi}{n}} \frac{d\vartheta}{2\left|\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\right|} < \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\eta}{2}}^{\theta-\frac{\pi}{n}} \frac{d\vartheta}{\theta-\vartheta} = \frac{\pi}{2}\log n + O(1).$$

In derselben Weise wird der Beitrag des betreffenden Gliedes zu J_3 gleich $O\left(\frac{\log^2(n+1)}{n+1}\right) = O(1)$ gefunden, sodaß wir, alles vorangehende zusammenfassend,

$$\varrho_n^{(k)}(\cos\theta) \tag{82}$$

$$= \left(\int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}} + \int_{\theta+\frac{\pi}{n}}^{\pi}\right) \frac{1}{2\pi A_n^{(k)}\sqrt{\sin\theta\sin\vartheta}} \left|\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \frac{\sin(\nu+1)(\theta-\vartheta)}{\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}}\right| \sin\vartheta\, d\vartheta + O(1)$$

erhalten.

Die rechts in dieser Formel auftretende Summe läßt sich am einfachsten folgendermaßen abschätzen: Es ist zunächst

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \sin(\nu+1)\theta = \Re\left(e^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)i} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} e^{\nu\theta i}\right); \tag{83}$$

ferner haben wir

$$\frac{1}{1-ze^{\theta i}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{n\theta i},$$

$$\frac{1}{(1-z)^k(1-ze^{\theta i})} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} e^{\nu\theta i}$$

oder, wenn wir $\frac{1}{z}$ statt z schreiben

$$\frac{z^{k+1}}{(z-1)^k(z-e^{\theta i})} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} e^{\nu\theta i},$$

woraus nach dem Cauchyschen Satze

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} e^{\nu\theta i} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{z^{n+k}\,dz}{(z-1)^k(z-e^{\theta i})},$$

wobei die Integration in direktem Sinne über einen Weg C erfolgt, welcher die beiden singulären Punkte $z=1$ und $z=e^{\theta i}$ umschließt, und die auftretenden mehrdeutigen Funktionen z^k und $(z-1)^k$ so zu bestimmen sind, daß dieselben für z reell und $=+\infty$ beide positiv unendlich werden. Wie bei den analogen Integralen in § 2 und § 3 ersetzen wir C durch vom Nullpunkt ausgehende Schleifen um die singulären Punkte (die dritte Schleife um $z=e^{-\theta i}$ fällt hier weg, da der betreffende Punkt regulär ist). Genau wie in § 2 sieht man, daß die Integration über die Schleife um $z=1$ zum obigen Ausdruck den Beitrag

$$\frac{\sin k\pi}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{z^{n+k}\,dz}{(1-z)^k(z-e^{\theta i})}$$

liefert; das Integral über die Schleife um $z=e^{\theta i}$ ist einfach gleich dem Residuum des Integranden in diesem Punkte, also

$$\frac{e^{(n+k)\theta i}}{(e^{\theta i}-1)^k} = \frac{e^{\left(n+\frac{k}{2}\right)\theta i+\frac{k}{2}\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k},$$

und wir erhalten

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} e^{\nu\theta i} = \frac{\sin k\pi}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{z^{n+k}\,dz}{(1-z)^k(z-e^{\theta i})} + \frac{e^{\left(n+\frac{k}{2}\right)\theta i+\frac{k}{2}\pi i}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^k}. \tag{84}$$

Für $0 \leqq z \leqq 1$ ist offenbar $|z-e^{\theta i}| \geqq |\sin\theta|$, und es ergibt sich aus (83) und (84) die Abschätzung

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \sin(\nu+1)\theta\right| \leqq \left|\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} e^{\nu\theta i}\right|$$

$$< \frac{1}{\pi|\sin\theta|}\int\limits_0^1 z^{n+k}(1-z)^{-k}\,dz + \frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|^k}$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma(1-k)\,\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+2)}\cdot\frac{1}{|\sin\theta|} + \frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|^k}$$

$$< \frac{c_{35}}{(n+1)^{1-k}}\cdot\frac{1}{|\sin\theta|} + \frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|^k}.$$

Hieraus ergibt sich ferner, indem wir bemerken, daß

$$\left|\frac{\sin(\theta-\vartheta)}{\theta-\vartheta}\right| \geqq \frac{\sin\left(\pi-\frac{\eta}{2}\right)}{\pi-\frac{\eta}{2}}, \qquad \left|\frac{\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}}{\frac{\theta-\vartheta}{2}}\right| \geqq \frac{2}{\pi}:$$

(85)
$$\frac{1}{2\pi A_n^{(k)}\sqrt{\sin\theta\sin\vartheta}}\left|\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)}\frac{\sin(\nu+1)(\theta-\vartheta)}{\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}}\right|\sin\vartheta$$

$$< \frac{c_8}{2\pi(n+1)^k}\frac{\sqrt{\sin\vartheta}}{\sqrt{\sin\eta}}\left[\frac{c_{35}}{(n+1)^{1-k}}\cdot\frac{1}{\left|\sin(\theta-\vartheta)\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\right|}+\frac{2}{\left|2\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\right|^{1+k}}\right]$$

$$< \frac{c_8}{2\pi(n+1)^k\sqrt{\sin\eta}}\left[\frac{c_{35}}{(n+1)^{1-k}}\cdot\frac{1}{\left|\frac{\sin\frac{\eta}{2}}{\pi-\frac{\eta}{2}}(\theta-\vartheta)\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\theta-\vartheta}{2}\right|}+\frac{2}{\left|2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\theta-\vartheta}{2}\right|^{1+k}}\right]$$

$$= \frac{c_{36}}{n+1}\cdot\frac{1}{(\theta-\vartheta)^2}+\frac{c_{37}}{(n+1)^k}\cdot\frac{1}{|\theta-\vartheta|^{1+k}}.$$

Infolge dieser Abschätzung wird

$$\int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}}\frac{1}{2\pi A_n^{(k)}\sqrt{\sin\theta\sin\vartheta}}\left|\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)}\frac{\sin(\nu+1)(\theta-\vartheta)}{\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}}\right|\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$< \frac{c_{36}}{n+1}\int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}}\frac{d\vartheta}{(\theta-\vartheta)^2}+\frac{c_{37}}{(n+1)^k}\int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}}\frac{d\vartheta}{(\theta-\vartheta)^{1+k}}$$

$$= \frac{c_{36}}{n+1}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{1}{\theta}\right)+\frac{c_{37}}{(n+1)^k}\left(\frac{1}{k}\left(\frac{n}{\pi}\right)^k-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\theta^k}\right)$$

$$< \frac{c_{36}}{\pi}\cdot\frac{n}{n+1}+\frac{c_{37}}{k\pi^k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = O(1);$$

ähnliches gilt für das zweite Integral in (82), und wir erhalten endlich

(86)
$$0 < \varrho_n^{(k)}(\cos\theta) < c_{38} \qquad (0<\eta\leqq\theta\leqq\pi-\eta),$$

was der zu beweisende Satz ist.*)

---

*) Für $k=0$ wächst dagegen $\varrho_n^{(k)}(x)$ für ein x des Intervalles $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ mit n ins Unendliche und zwar wie $\log n$; vgl. A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, erste Mitteilung, Math. Ann. 69 (1911), S. 331—371, Kap. I, § 3, und D. Jackson, On the degree of convergence of the development of a continuous function according to Legendre's polynomials, Trans. Am. Math. Soc. 13 (1912), S. 305—318. Folglich gibt es stetige Funktionen, deren Legendresche Reihen auch an inneren Punkten divergieren; vgl. hierzu auch meine frühere Arbeit, § 4.

§ 8.

Die Konvergenz der Cesàroschen Mittel der Ordnung $k > 0$ der Legendreschen Reihe einer absolut integrablen Funktion für innere Punkte des Intervalles $-1 \cdots +1$.

Hauptsatz II. *Es sei* $0 < k < 1$ *und* $f(x)$ *eine derartige Funktion, daß* $f(x)$ *und* $(1-x^2)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} f(x)$ *im ganzen Intervalle* $-1 \leqq x \leqq 1$ *absolut integrabel sind*); dann ist die zu* $f(x)$ *gehörige Legendresche Reihe summierbar* $(C; k)$ *mit der Summe* $f(x)$ *in jedem Punkt, wo* $-1 < x < 1$ *und* $f(x)$ *stetig ist, und die Summierbarkeit ist in jedem Intervalle* $a \leqq x \leqq b$, *wo* $-1 < a < b < 1$, *welches im Inneren eines Stetigkeitsintervalles von* $f(x)$ *liegt, eine gleichmäßige.*

Wir setzen, wie im vorhergehenden Paragraphen, $x = \cos\theta$, $y = \cos\vartheta$, wo $\eta \leqq \theta \leqq \pi - \eta$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$; es ist dann

$$(87) \qquad s_n^{(k)}\{f(\cos\theta)\} = \int_0^\pi \frac{f(\cos\vartheta)}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\theta-\varepsilon} + \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} + \int_{\theta+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5,$$

wo $0 < \varepsilon < \frac{\eta}{2}$.

Es sei $\delta > 0$ aber beliebig klein; weil $f(\cos\vartheta)$ im Punkte $\vartheta = \theta$ stetig ist, können wir ε so klein wählen, daß

$$(88) \qquad |f(\cos\vartheta) - f(\cos\theta)| < \frac{\delta}{3c_{38}} \quad \text{für} \quad \theta - \varepsilon \leqq \vartheta \leqq \theta + \varepsilon$$

und zufolge (86) wird dann

$$(89) \qquad \left| J_3 - f(\cos\theta) \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \frac{1}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta \right|$$

$$< \frac{\delta}{3c_{38}} \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \frac{1}{2A_n^{(k)}} |S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)| \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$< \frac{\delta}{3c_{38}} \int_0^\pi \frac{1}{2A_n^{(k)}} |S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)| \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{\delta}{3c_{38}} \varrho_n^{(k)}(\cos\theta) < \frac{\delta}{3}.$$

---

*) Für $k \geqq \frac{1}{2}$ ist die zweite Bedingung eine Folge der ersten, und umgekehrt für $0 < k \leqq \frac{1}{2}$.

Ferner ist, wie sofort einleuchtet,

$$\int_0^\pi \frac{1}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta = 1,$$

sodaß

$$1 - \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \frac{1}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \left(\int_0^{\theta-\varepsilon} + \int_{\theta+\varepsilon}^{\pi}\right) \frac{1}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta .$$

Eine für die rechte Seite dieser Formel geeignete Abschätzung von $S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)$ erhalten wir, indem wir bemerken, daß nach dem Abelschen Lemma*)

---

*) Es genügt für unseren Zweck, das Abelsche Lemma in der folgenden Form auszusprechen:

Es seien $a_0, a_1, \cdots, a_n$ positiv und $a_\nu < a_{\nu+1}$, sowie $b_{-1} = 0$, $b_0, b_1, \cdots, b_n$ irgendwelche reelle Größen, deren absolute Beträge $\leqq B$ sind. Dann ist

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (b_\nu - b_{\nu-1})\right| < 2Ba_n.$$

Aus der Identität der partiellen Summation

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (b_\nu - b_{\nu-1}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (a_\nu - a_{\nu+1}) b_\nu + a_n b_n$$

folgt nämlich

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (b_\nu - b_{\nu-1})\right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} (a_{\nu+1} - a_\nu) |b_\nu| + a_n |b_n| \leqq B\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} (a_{\nu+1} - a_\nu) + a_n\right)$$

$$= B(2a_n - a_0) < 2Ba_n.$$

Setzen wir $a_\nu = A_{n-\nu}^{(k-1)}$, $0 < k < 1$, so ist

$$a_{\nu+1} - a_\nu = A_{n-\nu-1}^{(k-1)} - A_{n-\nu}^{(k-1)} = A_{n-\nu-1}^{(k-1)}\left(1 - \frac{n-\nu+k-1}{n-\nu}\right) = A_{n-\nu-1}^{(k-1)} \cdot \frac{1-k}{n-\nu} > 0,$$

und für

$$b_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \sin(\mu+1)\theta = \frac{\sin(\nu+2)\frac{\theta}{2} \sin(\nu+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

bzw. für

$$b_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \cos(\mu+1)\theta = \frac{\cos(\nu+2)\frac{\theta}{2} \sin(\nu+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

ist $|b_\nu| < \dfrac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$, woraus die Formeln (90) folgen.

$$(90)\qquad \begin{aligned} &\left|\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \sin(\nu+1)\theta\right| < \frac{2}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|},\\ &\left|\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \cos(\nu+1)\theta\right| < \frac{2}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|},\end{aligned}$$

zufolge (79), (3), (90) und (80) ist dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta,\cos\vartheta)\right| &< \frac{c_5}{2(n+1)^k}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{\sin\theta\sin\vartheta}}\left(\frac{2}{\sin^2\frac{\theta-\vartheta}{2}}+\frac{2}{\sin^2\frac{\theta+\vartheta}{2}}\right)\\ &\quad + c_{34}\frac{\log(n+1)}{n+1}\cdot\frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\right|\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}(\sin\theta\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\\ (91)\qquad &< \frac{c_5}{2(n+1)^k}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{\sin\eta\sin\vartheta}}\left(\frac{2}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}+\frac{2}{\sin^2\frac{\eta}{2}}\right)\\ &\quad + c_{34}\frac{\log(n+1)}{n+1}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\eta}{2}(\sin\eta\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\\ &< \frac{c_{39}}{(n+1)^k}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}(\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

sodaß

$$\begin{aligned}\left|1-\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\frac{1}{2A_n^{(k)}}S_n^{(k)}(\cos\theta,\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\right| &< \left(\int_0^{\theta-\varepsilon}+\int_{\theta+\varepsilon}^{\pi}\right)\frac{c_{39}}{(n+1)^k}\cdot\frac{d\vartheta}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\sin\vartheta}}\\ &< \int_0^{\pi}\frac{c_{39}}{(n+1)^k}\cdot\frac{d\vartheta}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\sin\vartheta}} = \frac{c_{40}}{(n+1)^k}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.\end{aligned}$$

Aus (89) erhalten wir jetzt

$$(92)\qquad |J_3 - f(\cos\theta)| < \frac{\delta}{3} + \frac{c_{40}}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{|f(\cos\theta)|}{(n+1)^k}.$$

Für $\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \theta-\varepsilon$ bzw. $\theta+\varepsilon\leqq\vartheta\leqq\pi-\varepsilon$ folgt aus (91)

$$\left|\frac{1}{2A_n^{(k)}}S_n^{(k)}(\cos\theta,\cos\vartheta)\right| < \frac{c_{39}}{(n+1)^k}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}(\sin\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} < \frac{c_{39}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}$$

und hieraus

$$(93)\quad |J_2+J_4|<\frac{c_{39}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^k}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\theta-\varepsilon}+\int\limits_{\theta+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\right)|f(\cos\vartheta)|\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$<\frac{c_{39}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}\int\limits_0^{\pi}|f(\cos\vartheta)|\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\frac{c_{39}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}\int\limits_{-1}^{1}|f(y)|\,dy=\frac{c_{41}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{(n+1)^k},$$

wegen der absoluten Integrierbarkeit von $f(x)$.

Um endlich die Integrale J_1 und J_5 abzuschätzen, wenden wir auf die Identität

$$(y-x)\,S_n^{(k)}(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}(\nu+1)\left(P_\nu(x)\,P_{\nu+1}(y)-P_{\nu+1}(x)\,P_\nu(y)\right)$$

eine partielle Summation an und erhalten

$$\begin{aligned}(y-x)\,S_n^{(k)}(x,y)=&\sum_{\nu=1}^{n}\left(A_{n-\nu}^{(k-1)}(\nu+1)\,P_{\nu+1}(y)-A_{n-\nu+1}^{(k-1)}\nu\,P_{\nu-1}(y)\right)P_\nu(x)\\&+A_n^{(k-1)}P_0(x)\,P_1(y)-A_0^{(k-1)}(n+1)\,P_{n+1}(x)\,P_n(y)\\=&\sum_{\nu=1}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}(\nu+1)\left(P_{\nu+1}(y)-P_{\nu-1}(y)\right)P_\nu(x)\\&+\sum_{\nu=1}^{n}\left(A_{n-\nu}^{(k-1)}(\nu+1)-A_{n-\nu+1}^{(k-1)}\nu\right)P_{\nu-1}(y)\,P_\nu(x)\\&+A_n^{(k-1)}P_0(x)\,P_1(y)-A_0^{(k-1)}(n+1)\,P_{n+1}(x)\,P_n(y),\end{aligned}$$

oder, wegen $A_{n-\nu}^{(k-1)}(\nu+1)-A_{n-\nu+1}^{(k-1)}\nu=A_{n-\nu}^{(k-1)}+(1-k)\,A_{n-\nu}^{(k-1)}\dfrac{\nu}{n-\nu+1}$ und $A_0^{(k-1)}=1$,

$$\begin{aligned}(94)\quad (y-x)\,S_n^{(k)}(x,y)=&\sum_{\nu=1}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}(\nu+1)\left(P_{\nu+1}(y)-P_{\nu-1}(y)\right)P_\nu(x)\\&+\sum_{\nu=1}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}P_{\nu-1}(y)\,P_\nu(x)\\&+(1-k)\sum_{\nu=1}^{n}A_{n-\nu}^{(k-1)}\frac{\nu}{n-\nu+1}P_{\nu-1}(y)\,P_\nu(x)\\&+A_n^{(k-1)}P_0(x)\,P_1(y)-(n+1)\,P_n(y)\,P_{n+1}(x).\end{aligned}$$

Wir führen jetzt wieder $x = \cos\theta$, $y = \cos\vartheta$ ein; dann ist erstens nach (I: 7) mit $p = 1$

$$(95) \qquad |P_\nu(\cos\theta)| < \frac{c_{42}}{\sqrt{(\nu+1)\sin\theta}} \leqq \frac{c_{42}}{\sqrt{(\nu+1)\sin\eta}}$$

und zweitens

$$(96) \qquad |P_{\nu+1}(\cos\vartheta) - P_{\nu-1}(\cos\vartheta)| < \frac{c_{43}}{\sqrt{\nu+1}} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi.^{*)}$$

Hieraus folgt

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)}(\nu+1)(P_{\nu+1}(\cos\vartheta) - P_{\nu-1}(\cos\vartheta))\, P_\nu(\cos\theta)\right|$$
$$+ \left|\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} P_{\nu-1}(\cos\vartheta)\, P_\nu(\cos\theta)\right| + |A_n^{(k-1)} P_0(\cos\theta)\, P_1(\cos\vartheta)|$$
$$< \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \frac{c_{42} c_{43}}{\sqrt{\sin\eta}} + \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} + A_n^{(k-1)}$$
$$< \left(\frac{c_{42}c_{43}}{\sqrt{\sin\eta}} + 1\right) \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} = c_{44} A_n^{(k)}.$$

Wegen $|\cos\vartheta - \cos\theta| = \left|2\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}\right| \geqq 2\left(\sin\frac{\eta}{4}\right)^2$ ergibt dann (94)

$$(97) \qquad \left|\frac{1}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)\right|$$
$$< \frac{1}{4\left(\sin\frac{\eta}{4}\right)^2}\left[c_{44} + \frac{(1-k)c_{42}}{A_n^{(k)}\sqrt{\sin\eta}} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{(k-1)} \frac{\sqrt{\nu}}{n-\nu+1} |P_{\nu-1}(\cos\vartheta)|\right.$$
$$\left. + \frac{c_{42}}{\sqrt{\sin\eta}} \frac{\sqrt{n+1}}{A_n^{(k)}} |P_n(\cos\vartheta)|\right].$$

Wenden wir zur Abschätzung der rechts auftretenden Kugelfunktionen die Formel (95) an, so entsteht unter Benutzung von (3)

$$(98) \qquad \left|\frac{1}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)\right|$$
$$< \frac{1}{4\left(\sin\frac{\eta}{4}\right)^2}\left[c_{44} + \frac{(1-k)c_5 c_6 c_{42}^2}{\sqrt{\sin\eta\sin\vartheta}\cdot(n+1)^k} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(n-\nu+1)^{2-k}} + \frac{c_5 c_{42}^2}{(n+1)^k\sqrt{\sin\eta\sin\vartheta}}\right]$$
$$< c_{45} + \frac{c_{46}}{(n+1)^k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}.$$

*) Für einen sehr einfachen Beweis dieser Formel vgl. H. Burkhardt, Zur Theorie der trigonometrischen Reihen und der Entwicklungen nach Kugelfunktionen, Sitzungsberichte d. Bayerischen Ak. d. Wiss. (München) 1909, Nr. 10, S. 1—33.

Ersetzen wir aber in (97) die absoluten Beträge der Kugelfunktionen durch ihre Maximalwerte $= 1$, so erhalten wir

$$\left|\frac{1}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)\right|$$

$$< \frac{1}{4\left(\sin\frac{\eta}{4}\right)^2}\left[c_{44} + \frac{(1-k)c_5 c_6 c_{42}}{(n+1)^k \sqrt{\sin\eta}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{\nu}}{(n-\nu+1)^{2-k}} + \frac{c_5 c_{42}}{\sqrt{\sin\eta}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{2}-k}\right].$$

Am Anfang von § 5 wurde aber gezeigt, daß

$$(1-k)\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{(n-\nu+1)^{2-k}} < 2\sqrt{n+1},$$

und folglich ergibt die obige Formel

$$\left|\frac{1}{2A_n^{(k)}} S_n^{(k)}(\cos\theta, \cos\vartheta)\right| < c_{45} + c_{47}(n+1)^{\frac{1}{2}-k}. \tag{99}$$

Es sei jetzt erstens $k \geqq \frac{1}{2}$; dann ergibt die Abschätzung (99), auf das Integral J_1 angewandt,

$$|J_1| < \left(c_{45} + c_{47}(n+1)^{\frac{1}{2}-k}\right)\int_0^{\varepsilon} |f(\cos\vartheta)| \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$< (c_{45} + c_{47})\int_0^{\varepsilon} |f(\cos\vartheta)| \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Zweitens sei $k < \frac{1}{2}$ und n so klein, daß $\frac{\pi}{n+1} \geqq \varepsilon$; dieselbe Abschätzung ergibt

$$|J_1| < \left(c_{45} + c_{47}(n+1)^{\frac{1}{2}-k}\right)\int_0^{\varepsilon} |f(\cos\vartheta)| \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$< (c_{45} + c_{47})(n+1)^{\frac{1}{2}-k}\int_0^{\varepsilon} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \cdot (\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k} \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

oder, weil $\sin\vartheta < \vartheta \leqq \frac{\pi}{n+1}$ ist,

$$|J_1| < (c_{45} + c_{47})(n+1)^{\frac{1}{2}-k}\int_0^{\varepsilon} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-k} \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}-k}(c_{45} + c_{47})\int_0^{\varepsilon} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Drittens sei $k < \frac{1}{2}$ und $\frac{\pi}{n+1} < \varepsilon$; dann zerlegen wir

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} + \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon}$$

und wenden in dem ersten Integral die Abschätzung (99), in dem zweiten aber (98) an:

$$|J_1| < c_{45} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |f(\cos\vartheta)| \sin\vartheta \, d\vartheta + c_{47}(n+1)^{\frac{1}{2}-k} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \cdot (\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$+ c_{45} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon} |f(\cos\vartheta)| \sin\vartheta \, d\vartheta + \frac{c_{46}}{(n+1)^k} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \cdot \frac{1}{(\sin\vartheta)^k} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$< c_{45} \int_0^{\varepsilon} |f(\cos\vartheta)| \sin\vartheta \, d\vartheta + c_{47}(n+1)^{\frac{1}{2}-k} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \cdot \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-k} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$+ \frac{c_{46}}{(n+1)^k} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n+1}\right)^k} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= c_{45} \int_0^{\varepsilon} |f(\cos\vartheta)| \sin\vartheta \, d\vartheta + \pi^{\frac{1}{2}-k} c_{47} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$+ \frac{c_{46}}{2^k} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$< c_{48} \int_0^{\varepsilon} \frac{|f(\cos\vartheta)|}{(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}-k}} \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Ganz ähnliche Abschätzungen erhält man für J_5, und zufolge der über die absolute Integrierbarkeit von $f(x)$ und $(1-x^2)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} f(x)$ gemachten

Voraussetzungen läßt sich deshalb ε so klein wählen, daß erstens (88) erfüllt ist und zweitens $|J_1 + J_5| < \frac{\delta}{3}\cdot$ Dann schließen wir aus (87), (92) und (93), daß

$$\left| s_n^{(k)}\{f(\cos\theta)\} - f(\cos\theta)\right| < \frac{2\delta}{3} + \left(\frac{c_{40}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\,|f(\cos\theta)| + \frac{c_{41}}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\right)\cdot\frac{1}{(n+1)^k},$$

und indem wir ein $N = N(\varepsilon)$ so groß wählen, daß für $n \geqq N$ das zweite Glied rechts $< \frac{\delta}{3}$ wird, haben wir die Konvergenz der Cesàroschen Mittel k^{ter} Ordnung der Legendreschen Reihe gegen die Funktion selbst für einen im Inneren des Intervalles $-1 \cdots +1$ liegenden Stetigkeitspunkt bewiesen.

Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz in einem Intervalle, welches ganz im Inneren eines Stetigkeitsintervalles von $f(x)$ liegt, ergibt sich nach der Heine-Borelschen Schlußweise sofort aus dem vorangehenden Beweise.

§ 9.

Beispiel zum Nachweis der Notwendigkeit der Endpunktsbedingung im Hauptsatze II.

Aus der Formel (75) erhalten wir

$$(100)\quad f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2^\omega}{(1-x)^\omega} + \frac{2^\omega}{(1+x)^\omega}\right] \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)}\cdot\frac{(4n+1)\,\Gamma(2n+\omega)}{\Gamma(2n+2-\omega)} P_{2n}(x),$$

$$0 < \omega < 1,$$

und die Anwendung der Formel (I: 7) und der Stirlingschen Formel für $\Gamma(x)$ ergibt (Fejér, l. c. S. 103) für $x = \cos\theta$

$$\frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)}\cdot\frac{(4n+1)\,\Gamma(2n+\omega)}{\Gamma(2n+2-\omega)} P_{2n}(\cos\theta)$$

$$= \frac{2\,\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)}\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\left[\cos\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon_n(\theta)\right](2n)^{2\omega-\frac{3}{2}},$$

wo $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n(\theta) = 0$ gleichmäßig für $0 < \eta \leqq \theta \leqq \pi - \eta$.

Es sei erstens $\theta = \frac{p}{q}\pi$, wo p und q ganz und relativ prim; dann wird

$$\lim_{\nu=\infty} \cos\left(\left(2q\nu + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

Zweitens sei $\frac{\theta}{\pi}$ irrational; bezeichnen wir mit $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ den ν^{ten} Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $\frac{\theta}{\pi}$, so ist

$$\left|\frac{\theta}{\pi} - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right| < \frac{1}{q_\nu^2},$$

und folglich

$$\lim_{\nu=\infty} \cos\left(\left(2q_\nu + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Für jedes θ im Intervalle $\eta \leqq \theta \leqq \pi - \eta$ läßt sich also eine unbegrenzt wachsende Folge von ganzen Zahlen $n_1, n_2, \cdots$ angeben derart, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \cos\left(\left(2n_\nu + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

und indem wir das allgemeine Glied rechts in (100) mit u_n bezeichnen und bei gegebenem k, wo $0 < k < \frac{1}{2}$, ein $\omega > \frac{3}{4} + \frac{k}{2}$ festlegen, so wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n_\nu}}{n_\nu^k} = +\infty.$$

Nach dem Hilfssatze in § 6 sind folglich die Cesàroschen Mittel k^{ter} Ordnung der Reihe (100) in jedem Punkte des Intervalles $-1 \cdots +1$ divergent. Es ist hier die Endpunktsbedingung des Hauptsatzes II nicht erfüllt, denn $(1-x^2)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}$ wird für $x = \pm 1$ von der Ordnung $\omega + \frac{1}{4} - \frac{k}{2} > 1$ unendlich, d. h. ist nicht absolut integrabel im Intervalle $-1 \cdots +1$.

Chicago, Ill., den 1. Mai 1913.

Über eine von Herrn C. Runge behandelte Integralgleichung.*)

(Aus einem an Herrn C. Runge gerichteten Briefe.)

Von

Georg Pólya in Budapest.

Sie haben sich neuerdings mit der Aufgabe beschäftigt, zu vorgegebenem $f(x)$ eine Funktion $\varphi(x)$ so zu finden, daß die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,\varphi(x-u)\,du = f(x) \tag{1}$$

erfüllt sei. Das Interesse und die Neuartigkeit dieses Problems ermutigt mich, Ihnen darüber einige Bemerkungen vorzulegen, mögen sie auch noch so unfertig und lückenhaft sein.

Um eine Orientierung zu gewinnen, betrachte ich die analoge Aufgabe: zu den unendlich vielen vorgegebenen Zahlen

$$\cdots f_{-2},\ f_{-1},\ f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots$$

unendlich viele Zahlen

$$\cdots \varphi_{-2},\ \varphi_{-1},\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots$$

so zu bestimmen, daß die Gleichungen

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu \varphi_{\mu-\nu} = f_\mu \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2}$$

alle erfüllt seien.

Die Gleichungen (2) lassen sich zunächst rein formal in die einzige Gleichung

$$\left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu z^\nu\right)^2 = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_\mu z^\mu \tag{3}$$

zusammenfassen. Um zu einer vollständigen Diskussion zu gelangen, treffe

---

*) Siehe Math. Ann. 75, S. 130—132.

ich die (vielleicht allzu willkürliche) Festsetzung: eine unendliche Folge von Zahlen

$$\cdots, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$$

die die Gleichungen (2) befriedigen, soll nur dann als eine „zulässige Lösung" gelten, wenn die Laurentsche Reihe

$$\cdots + \varphi_{-2} z^{-2} + \varphi_{-1} z^{-1} + \varphi_0 + \varphi_1 z + \varphi_2 z^2 + \cdots$$

in einem Ringe konvergiert, dessen Dicke größer als Null ist.

Diese Beschränkung zugegeben, ist die Aufgabe nur dann lösbar, wenn die Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (3) in einem Ringe konvergiert, dessen Dicke von Null verschieden ist, und jede Lösung von (2)

$$\cdots, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$$

muß der Gleichung (3) genügen.

Die Mannigfaltigkeit der Lösungen von (2) läßt sich nun mit Hilfe der Elemente der Funktionentheorie völlig überblicken. Man markiere im Innern des Kreisringes, innerhalb welches die linke Seite von

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_\mu z^\mu = 0 \tag{4}$$

konvergiert, alle Wurzeln der Gleichung (4) von ungerader Mehrfachheit. Man schlage durch alle diese Wurzelpunkte die Kreise um den Mittelpunkt $z = 0$. Durch diese Kreise wird der Konvergenzring von $\sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_\mu z^\mu$ in endlich viele oder abzählbar unendlich viele *Teilkreisringe* zerschnitten. Diese *Teilkreisringe* zerfallen in zwei Klassen: zur *ersten* Klasse gehören diejenigen Teilkreisringe, in deren Innern

$$\sqrt{\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_\mu z^\mu} \tag{5}$$

eindeutig und regulär ist, und sich folglich in eine Laurentsche Reihe entwickeln läßt. Zur *zweiten* Klasse gehören diejenigen Teilkreisringe, in deren Innern (5) zweideutig, aber

$$\sqrt{z \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_\mu z^\mu}$$

eindeutig, regulär und in eine Laurentsche Reihe entwickelbar ist. Jeder Teilkreisring der ersten Klasse liefert zwei Lösungen der Gleichungen (2) (die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden). Die so gefundenen Lösungen sind alle verschieden und erschöpfen die Gesamtheit aller zu-

lässigen Lösungen. — Man sieht, daß folgende drei Fälle vorkommen können: die Aufgabe (2) hat keine Lösung, sie hat endlich viele oder sie hat abzählbar unendlich viele Lösungen.

Für Ihr Problem (1) führen nun diese Überlegungen zu einem Ansatz, durch den alle solche Lösungen $\varphi(x)$ gefunden werden müssen, die das Integral*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{-us} du = \Phi(s) \tag{6}$$

für zwei verschiedene reelle Werte von s absolut konvergent machen. Sei die linke Seite von (6) in dem Streifen $\alpha < \Re(s) < \beta$ absolut konvergent, so ist

$$\begin{aligned}\Phi^2(s) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, \varphi(v)\, e^{-(u+v)s} \cdot du\, dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ts}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, \varphi(t-u)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ts}\, dt\end{aligned}$$

und aus diesem Resultat erhält man leicht ersichtliche notwendige Bedingungen dafür, daß (1) eine Lösung der eben charakterisierten Art zuläßt. — Nehmen wir umgekehrt an, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ts}\, dt = F(s) \tag{7}$$

einen Streifen absoluter Konvergenz besitzt, und in einem Teil

$$\alpha < \Re(s) < \beta$$

desselben Streifens von ungeraden Nullstellen frei ist; machen wir ferner die Annahme, daß für $\alpha < \Re(s) < \beta$

$$\sqrt{F(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{-us}\, du$$

gesetzt werden kann, so daß die rechte Seite absolut konvergiert, dann

*) Mit der Konvergenz von Integralen von der Form (6) steht es im allgemeinen so: die s-Ebene wird durch vier, der imaginären Achse parallele Gerade in fünf Teile geteilt (in zwei Halbebenen und in drei unendliche Streifen) derart, daß das Integral im ersten und fünften divergiert, im zweiten und vierten bedingt, und im dritten unbedingt konvergiert.

ist $\varphi(x)$ eine Lösung Ihrer Gleichung (1). Sie kann sogar explizite berechnet werden. Sei nämlich $0 \leqq \alpha < \gamma < \beta$, so ist

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\sqrt{F(s)}\, e^{xs}}{s}\, ds = 2\pi i \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\, du.$$

Dies kann ganz strenge und genau auf dieselbe Weise gezeigt werden wie es bei Dirichletschen Reihen in dem einfachen Falle der absoluten Konvergenz geschieht.*)

Um meinen Ansatz zu vervollständigen, würde die Untersuchung der Bedingungen nötig sein, unter welchen die Quadratwurzel der Funktion (7) durch ein Integral von derselben Form dargestellt werden kann. Diese Untersuchung dürfte jedoch sehr schwierig sein.

Auf alle Fälle ist es sehr merkwürdig, daß sowohl Ihr Ansatz, wie der eben besprochene, auf das Ausziehen einer Quadratwurzel führt.

*) Landau, Handbuch, Bd. 2, S. 825—826.

Über Lösungen mit einem variablen Endpunkt in der Variationsrechnung.

Von

A. Rasmadse in Murom (Rußland).

Einleitung.

Die allgemeine Aufgabe der Variationsrechnung kann man folgendermaßen formulieren:

Es sei gegeben ein Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\,dt,$$

wo f und F Funktionen sind, die gewissen Bedingungen in einem bestimmten Bereich B genügen, und ein funktionales Feld*) stetiger Kurven, die ganz in diesem Bereich liegen. Es wird verlangt, diejenige Kurve dieses Feldes zu bestimmen, die für das Integral (J) einen Extremwert liefert.

Der Charakter des Problems hängt von den besonderen Bedingungen ab, welchen (außer den Regularitätsbedingungen: Stetigkeit, Existenz einer Tangente usw.) alle Kurven des Feldes entsprechen müssen. Z. B., wenn für alle Kurven

$$\int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y')\,dt = l \tag{l}$$

sein soll, wo G eine andere Funktion und l eine Konstante ist, so läßt das Problem besondere Betrachtungen zu. Aufgaben dieser Art heißen „isoperimetrische Probleme“.

Die besonderen Bedingungen, welche das funktionale Feld charakterisieren, sind zweierlei Art: entweder es sind gegebene Gleichungen (Nebenbedingungen), welchen alle oder eine Menge der Linienelemente $\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$

*) Im Sinne Hadamards, Leçons sur le Calcul des Variations.

der Kurven des Feldes genügen müssen ((*l*) ist eine spezielle Form einer solchen Bedingung), oder es sind Bedingungen bezüglich einzelner Linienelemente der Kurve.

Was die Endpunkte anbetrifft, so sind zwei Hauptbedingungen möglich:

a) alle Kurven haben die gleichen Endpunkte,

b) beide Endpunkte, oder nur einer von ihnen, sind willkürlich, oder es sind Kurven gegeben, auf welchen die Punkte sich bewegen können.

Es sei jetzt ein Problem ohne Nebenbedingungen gegeben.

Nehmen wir a priori an, daß die Extremale dieses Problems existiert, so finden wir, daß es diejenige von den Kurven des Feldes ist, deren sämtliche Linienelemente der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung

$$(1) \qquad F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - y'x'') = 0$$

genügen. Außerdem müssen, gemäß den charakteristischen Bedingungen des Feldes, ein oder mehrere Elemente der Extremalen auch noch anderen Gleichungen genügen. Letztere finden wir mittels der Variationsmethode, und sie haben die Form

$$\varphi_i\{F_{x'}(x_1, y_1, x_1', y_1'), F_{y'}(x, y, x', y'); F_{x'}(x_2, y_2, x_2', y_2'), F_{y'}(x_2, y_2, x_2', y_2'); \cdots; \\ a_0, a_1, \cdots\} = 0.$$

φ_i ist eine lineare Funktion der Ableitungen von F nach den Variabeln x', y'; $a_0, a_1, \cdots$ sind gewisse Parameter. Speziell für Probleme vom Typus b) werden die Elemente der Endpunkte auf der Extremalen mittels der Variationsmethode definiert, deshalb müssen sie den eben genannten Relationen genügen.

Das einfachste Feld vom Typus a) ist ein solches, dessen Kurven von der Klasse C'*) sind. Es ist nur eine Gleichung zu erfüllen, nämlich (1). Wählen wir in bestimmter Weise den Parameter t, so finden wir für das allgemeine Integral dieser Gleichung

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= f(t, \alpha, \beta), \\ y &= f_1(t, \alpha, \beta), \end{aligned}$$

wo α und β zwei willkürliche Konstante sind. Die durch die Gleichungen (2) dargestellten Kurven besitzen also die einfachste Extremaleneigenschaft. Sie bedecken den Bereich B.

Aus obigem folgt, daß die Extremalen eines anderen Problems ohne Nebenbedingungen entweder ganz der Schar (2) angehören, oder aus Kurvenstücken dieser Schar bestehen.

Also besteht jedes Problem der Variationsrechnung ohne Nebenbedingungen im Definieren einer Kurve der Schar (2), welche außer der

*) Im Sinne Bolzas, Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 13, 14.

einfachsten Extremaleneigenschaft noch diejenige besitzt, die in dem Problem genannt ist, oder mehrerer Kurven derselben Schar, deren Stücke eine Kurve bilden, welche dem Problem entspricht.

Eine besonders einfache Aufgabe ohne Nebenbedingungen über ein Extremum von dem Typus b), welche wir betrachten werden, besteht im folgenden: Ein funktionales Feld sei von einem Büschel stetiger Kurven gebildet, die von einem gegebenen Punkt A ausgehen und in einem Kreis von hinreichend kleinem Radius endigen. Dann muß die Extremale λ dieses Feldes eine Extremale auch in bezug auf sich selbst sein, d. h. sie muß in einem solchen Punkt R_0 endigen oder „abreißen", daß das Integral J, entlang dem Betrag AR_0 genommen, den Extremwert besitzt. Deswegen nennen wir die Extremale λ eine abgerissene Extremale und den Punkt R_0, wo sie abreißt, den Rißpunkt.

Von den Kurven (2) sind diejenigen abgerissen, auf denen Rißpunkte existieren. Später zeigen wir, daß die Gesamtheit abgerissener Extremalen eine Schar mit nur einem willkürlichen Parameter bildet.

Über das Büschel der Kurven, die vom Punkte A ausgehen, muß man folgendes bemerken: Der Charakter des Problems hängt davon ab, ob man den Punkt A für den Anfangspunkt oder für den Endpunkt hält. Entsprechend diesem kann dann auch der Rißpunkt R_0 für den Endpunkt oder für den Anfangspunkt gehalten werden.

Im ersten Fall nennen wir die Extremale „erster Gattung", im zweiten „zweiter".

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir meist die notwendigen und die hinreichenden Bedingungen für abgerissene Extremalen erster Gattung. Am Schluß bestimmen wir den Zusammenhang der abgerissenen Extremalen erster und zweiter Gattung.

Von den zwei Extremumswerten — Maxima und Minima — betrachten wir der Einfachheit halber nur den letzten.

Zu einer kurzen Orientierung über den Inhalt der Arbeit ist vielleicht das im letzten Kapitel gegebene Beispiel besonders geeignet.

A. Notwendige Bedingungen.

1. Von der Funktion F nehmen wir an, daß sie von der Klasse C''' im Bereich $B(x, y, x'^2 + y'^2 \neq 0)$ ist, und daß sie überdies der bekannten Homogenitätsbedingung

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y') \qquad (k > 0)$$

bezüglich der zwei letzten Argumente (x' und y') genügt. Außerdem sei uns eine Kurve L

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

von der Klasse C' gegeben, welche ganz im Innern des Bereichs B liegt und zwei gegebene Punkte dieses Bereichs verbindet. Alsdann ist die Funktion

$$F(\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t), \psi'(t))$$

stetig im Intervall $(t_1 t_2)$ und folglich hat das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t), \psi'(t))\, dt,$$

entlang der Kurve L genommen, einen ganz bestimmten endlichen Wert. Fernerhin werden wir dieses Integral kurz mit J_L bezeichnen.

Es sei λ eine abgerissene Extremale (Fig. 1), welche von dem Anfangspunkt A ausgeht, und R_0 ihr Rißpunkt. Im Innern eines Kreises R_0 von hinreichend kleinem Radius um den Punkt R_0 nehmen wir einen Punkt B. L sei eine beliebige benachbarte Kurve, welche die Punkte B und A auf der Extremalen λ verbindet. Dann ist nach der Definition der abgerissenen Extremalen

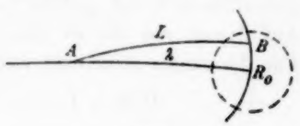


Fig. 1.

$$J_L \geqq J_\lambda.$$

Verbinden wir jetzt die Punkte B und R_0 durch eine willkürliche Kurve $\mathfrak{C}(R_0 B)$; da der Punkt B ein beliebiger ist, folgt aus der letzten Ungleichung, daß die Kurve $R_0 B$ transversal zu der Extremalen λ ist. Hieraus folgt, daß die Extremale λ von der Kurve, welche von R_0 ausgeht, transversal geschnitten wird.

Wenn θ_0 der Tangentenwinkel der Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt R_0 ist und x_0, y_0, x_0', y_0' die Koordinaten und Ableitungen der Extremalen λ in demselben Punkt R_0 sind, so muß die Transversalitätsbedingung

$$(3) \qquad F_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0') \cos\theta_0 + F_{y'}(x_0, y_0, x_0', y_0') \sin\theta_0 = 0$$

erfüllt sein. Da in dieser Gleichung (3) θ_0 willkürlich ist, führt uns das zu folgendem Satz.

Satz I. *In dem Rißpunkt R_0 einer abgerissenen Extremalen müssen folgende zwei Gleichungen erfüllt sein:*

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} F_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0') &= 0, \\ F_{y'}(x_0, y_0, x_0', y_0') &= 0. \end{aligned}$$

Schreibt man die Homogenitätsbedingung in der Form

$$F = x'F_{x'} + y'F_{y'},$$

so ist nach (I)

$$(4) \qquad F(x_0, y_0, x_0', y_0') = 0;$$

daher: im Rißpunkt R_0 der Extremalen ist die Funktion F gleich Null.

2. Es seien

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_0)$$

die Gleichungen der Extremalen $\lambda(AR_0)$ und t_1 und t_0 die Werte des Parameters t in dem Punkt A bzw. R_0. Betrachten wir jetzt die Funktion

$$J(t) = \int_{t_1}^{t} F(x(t), y(t), x'(t), y'(t))\, dt.$$

Diese Funktion muß für den Punkt $t = t_0$ ein Minimum liefern. Folglich ist im Punkte $t = t_0$ die erste Ableitung $J'(t)$ gleich Null, die zweite $J''(t) \geqq 0$. Die erste Ableitung $J'(t)$ ist aber

$$F[t] = F(x(t), y(t), x'(t), y'(t)).$$

Auf Grund von (4) ist also die erste Bedingung des Minimums erfüllt. Für die zweite Ableitung haben wir

$$J''(t) = F_x x'(t) + F_y y'(t) + x''(t) F_{x'} + y''(t) F_{y'}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $t = t_0$ ein und berücksichtigen die Bedingung (I), so erhalten wir

$$J''(t_0) = F_x x'(t_0) + F_y y'(t_0).$$

Daraus folgt, daß *in dem Rißpunkt* R_0, *außer der Bedingung* (I) *noch die Ungleichung*

$$F_x(x_0, y_0, x_0', y_0')x_0' + F_y(x_0, y_0, x_0', y_0')y_0' \geqq 0 \tag{5}$$

erfüllt sein muß.

Für die weitere Diskussion nehmen wir an, daß für den Bogen AR_0 der abgerissenen Extremalen die Legendresche und die Jacobische Bedingung in ihrer stärkeren Form erfüllt sind

$$F_1 > 0 \quad \text{und} \quad \bar{t}_0' < t_1 < t_0,$$

darin ist

$$F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} \tag{6}$$

und $\bar{t}_0'$ bezeichnet den Wert des Parameters t für denjenigen Punkt, dessen konjugierter Punkt R_0 ist.

B. Die Rißpunktkurve.

3. Oben sahen wir, daß irgend eine Extremale von der Klasse C' in einem Linienelement $\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$ abreißt, wenn

$$\begin{aligned} F_{x'}(x, y, x', y') &= 0, \\ F_{y'}(x, y, x', y') &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Dieses System (7) liefert eine Schar solcher Rißelemente, in welchen die Extremalen der Klasse C' abreißen können. Wenn wir daraus $\frac{y'}{x'}$ *) eliminieren, so erhalten wir den geometrischen Ort aller Rißpunkte:

$$R(x, y) = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Rißpunktkurve. Aus dem System (7) und nach (6)

$$F_{x'x}\,dx + F_{x'y}\,dy - x'^2 y' F_1\, d\left(\frac{y'}{x'}\right) = 0,$$

$$F_{y'x}\,dx + F_{y'y}\,dy + x'^3 F_1\, d\left(\frac{y'}{x'}\right) = 0.$$

Eliminiert man daraus $d\left(\frac{y'}{x'}\right)$, so erhält man, entlang der Rißpunktkurve

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

und deshalb

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{8}$$

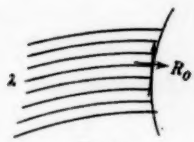


Fig. 2.

Aus dieser Formel folgt: Wenn die Funktion F unabhängig von x oder y ist, so stellt die Rißpunktkurve im allgemeinen eine oder mehrere Geraden parallel zur x-Achse bzw. zur y-Achse dar. Sind aber beide Variabeln x und y abwesend, so ist die Rißpunktkurve unbestimmt.

Durch die Gleichungen (7) wird ein Linienelement jeder abgerissenen Extremale *eindeutig* bestimmt. Die ganze Extremale ist daher durch diese Gleichungen vollständig bestimmt.

Es ist noch zu bemerken, da die abgerissenen Extremalen von der Klasse C' sind, die wir durch die Punkte der Rißpunktkurve in entsprechenden Richtungen (die aus (7) definierten) ziehen (Fig. 2), so bildet ihre Gesamtheit eine Schar mit nur einem willkürlichen Parameter (eine einparametrige Schar).

C. Theorie der konjugierten Punkte.

4. Es seien

$$x = \bar{x}(a), \quad y = \bar{y}(a)$$

die Gleichungen einer Kurve $\mathfrak{C}$, die durch den Rißpunkt R_0 geht. Die

*) Das ist möglich, da die Funktionen $F_{x'}$ und $F_{y'}$ nullter Ordnung sind in bezug auf x' und y'. Folglich

$$F_{x'}(x, y, x', y') = F_{x'}\left(x, y, 1, \frac{y'}{x'}\right),$$

$$F_{y'}(x, y, x', y') = F_{y'}\left(x, y, 1, \frac{y'}{x'}\right).$$

Kurve $\mathfrak{C}$ ist bekanntlich (Nr. 1) transversal zur Extremalen λ. Nehmen wir an, daß die Tangenten der Kurve $\mathfrak{C}$ und der Extremalen λ im Punkt R_0 verschieden sind, dann kann man durch jeden beliebigen Punkt B der Kurve $\mathfrak{C}$ in hinreichender Nähe von R_0 nur eine Extremale transversal zur Kurve $\mathfrak{C}$ ziehen.*) Die Gesamtheit solcher Extremalen, die transversal zur Kurve $\mathfrak{C}$ sind, bildet eine einparametrige Schar von Extremalen.

Es seien

(9) $$x = \varphi(t, a), \quad y = \psi(t, a)$$

die Gleichungen dieser Schar und $a = a_0$ der Wert des Parameters a der Extremalen λ. Es sei ferner entlang der Kurve $\mathfrak{C}$

(10) $$t = t(a).$$

Dann haben wir eine Identität:

(11) $$\begin{aligned}&\bar{x}'(a) F_{x'}(\varphi(t(a), a), \psi(t(a), a), \varphi_t(t(a), a), \psi_t(t(a), a))\\ &+ \bar{y}'(a) F_{y'}(\varphi(t(a), a), \psi(t(a), a), \varphi_t(t(a), a), \psi_t(t(a), a)) = 0.\end{aligned}$$

Differenziert man beide Teile dieser Gleichung (11), so erhält man

$$\begin{aligned}&\left[\bar{x}'(a)\frac{d}{dt}F_{x'} + \bar{y}'(a)\frac{d}{dt}F_{y'}\right]\frac{dt}{da} + \bar{x}''(a)F_{x'} + \bar{y}''(a)F_{y'}\\ &+ \bar{x}'(a)[F_{x'x}\varphi_a + F_{x'y}\psi_a + F_{x'x'}\varphi_{ta} + F_{x'y'}\psi_{ta}]\\ &+ \bar{y}'(a)[F_{y'x}\varphi_a + F_{y'y}\psi_a + F_{y'x'}\varphi_{ta} + F_{y'y'}\psi_{ta}] = 0.\end{aligned}$$

Benutzt man die Bezeichnung

$$\begin{aligned}&L = F_{x'x} - \psi_t\psi_{tt}F_1; \quad M = F_{x'y} + \psi_t\varphi_{tt}F_1 = F_{y'x} + \varphi_t\psi_{tt}F_1,\\ &N = F_{y'y} - \varphi_t\varphi_{tt}F_1; \quad K = \bar{x}''(a)F_{x'} + \bar{y}''(a)F_{y'},\\ &\Delta = \varphi_t\psi_a - \psi_t\varphi_a,\end{aligned}$$

so bekommt man

$$\begin{aligned}&[F_x\bar{x}'(a) + F_y\bar{y}'(a)]\frac{dt}{da} + (L\varphi_a + M\psi_a - \psi_t F_1\Delta_t)\bar{x}'(a)\\ &\qquad + (M\varphi_a + N\psi_a + \varphi_t F_1\Delta_t)\bar{y}'(a) + K(a) = 0.\end{aligned}$$

Daher

(12) $$\frac{dt}{da} = -\frac{(L\varphi_a + M\psi_a - \psi_t F_1\Delta_t)\bar{x}'(a) + (M\varphi_a + N\psi_a + \varphi_t F_1\Delta_t)\bar{y}'(a) + K(a)}{F_x\bar{x}'(a) + F_y\bar{y}'(a)}.$$

Daraus folgt, daß die Funktion (10) in der Umgebung des Punktes $a = a_0$ überhaupt nur für solche Kurven $\mathfrak{C}$ existiert, für welche der Nenner des obigen Bruchs für $a = a_0$ verschieden von Null ist, d. h. wenn

$$F_x\bar{x}'(a_0) + F_y\bar{y}'(a_0) \neq 0$$

ist.

Ist aber

$$F_x\bar{x}'(a_0) + F_y\bar{y}'(a_0) = 0,$$

so fallen die Tangenten der Kurve $\mathfrak{C}$ und der Rißpunktkurve im Riß-

*) Bolza, Vorlesungen, S. 321.

punkt R_0 zusammen (Nr. 3). Daher betrachten wir nur die Kurven $\mathfrak{C}$, für welche diese Tangentenrichtungen verschieden sind.

Wir suchen jetzt das Gefälle $T_0 = \operatorname{tg} \theta_0$ der Tangente an die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt R_0. Auf Grund von (10) haben wir zwei Identitäten

$$\bar{x}(a) = \varphi(t(a), a), \quad \bar{y}(a) = \psi(t(a), a),$$

und da

$$t(a_0) = t_0,$$

so ist

$$T_0 = \left(\frac{\psi_t \frac{dt}{da} + \psi_a}{\varphi_t \frac{dt}{da} + \varphi_a} \right)_{\substack{t=t_0 \\ a=a_0}},$$

Führen wir jetzt im Zähler und Nenner statt $\frac{dt}{da}$ den Ausdruck (12) ein, so erhalten wir

$$\psi_t \frac{dt}{da} + \psi_a = -\frac{-(L\bar{x}' + M\bar{y}')\Delta + \psi_t(\varphi_t \bar{y}' - \psi_t \bar{x}')F_1 \Delta_t + K(a)\psi(t)}{F_x \bar{x}' + F_y \bar{y}'},$$

$$\varphi_t \frac{dt}{da} + \varphi_a = -\frac{(M\bar{x}' + N\bar{y}')\Delta + \varphi_t(\varphi_t \bar{y}' - \psi_t \bar{x}')F_1 \Delta_t + K(a)\varphi(t)}{F_x \bar{x}' + F_y \bar{y}'}.$$

Da

$$K(a_0) = 0,$$

so wird

$$(13) \quad T_0 = \frac{-(L_0 \bar{x}_0' + M_0 \bar{y}_0')\Delta(t_0, a_0) + y_0'(x_0' \bar{y}_0' - y_0' \bar{x}_0')F_1(t_0, a_0)\Delta_t(t_0, a_0)}{(M_0 \bar{x}_0' + N_0 \bar{y}_0')\Delta(t_0, a_0) + x_0'(x_0' \bar{y}_0' - y_0' \bar{x}_0')F_1(t_0, a_0)\Delta_t(t_0, a_0)},$$

worin L_0, M_0, N_0, $\bar{x}_0'$, $\bar{y}_0'$ die Werte von L, M, N, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ für den Punkt $t = t_0$, $a = a_0$ sind. Ferner schreiben wir anstatt $\Delta(t_0, a_0)$, $\Delta_t(t_0, a_0)$, $F_1(t_0, a_0)$ *) einfach Δ, Δ_t, F_1.

Aus (13) folgt ferner

$$T_0 = \frac{-(L_0 + M_0 T_0)\Delta + y_0'(x_0' T_0 - y_0')F_1 \Delta_t}{(M_0 + N_0 T_0)\Delta + x_0'(x_0' T_0 - y_0')F_1 \Delta_t},$$

sodaß sich die Bestimmung von T_0 auf die Lösung einer quadratischen Gleichung

$$(N_0 \Delta + x_0'^2 F_1 \Delta_t)T_0^2 + 2(M_0 \Delta - x_0' y_0' F_1 \Delta_t)T_0 + (L_0 \Delta + y_0'^2 F_1 \Delta_t) = 0$$

reduziert. Daraus

$$T_0 = \frac{-(M_0 \Delta - x_0' y_0' F_1 \Delta_t) \pm \sqrt{(M_0 \Delta - x_0' y_0' F_1 \Delta_t)^2 - (N_0 \Delta + x_0'^2 F_1 \Delta_t)(L_0 \Delta + y_0'^2 F_1 \Delta_t)}}{N_0 \Delta + x_0'^2 F_1 \Delta_t},$$

was nach einfacher Rechnung ergibt

$$(14) \quad T_0 = \frac{-(M_0 \Delta - x_0' y_0' F_1 \Delta_t) \pm \sqrt{(M_0^2 - N_0 L_0)\Delta^2 - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x_0' y_0' + N_0 y_0'^2)F_1 \Delta \Delta_t}}{N_0 \Delta + x_0'^2 F_1 \Delta_t}$$

*) Die abkürzende Bezeichnung stammt von Bolza, Vorlesungen, S. 223.

$$F(\varphi(t, a), \psi(t, a), \varphi_t(t, a), \psi_t(t, a)) = F(t, a).$$

Es sei $P(\tau)$ der Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{C}$ auf der Extremalen λ.*) Dann ist**)

$$\Delta(t, a_0) = C\theta(t, \tau), \tag{15}$$

wo C eine willkürliche Konstante ist und θ nach Weierstraß dasjenige Integral der Jacobischen Differentialgleichung für die Extremale λ bezeichnet, welches für $\tau = t$ verschwindet. Aus (15) folgt

$$\Delta(t_0, a_0) = C\theta(t_0, \tau),$$
$$\Delta_t(t_0, a_0) = C\theta_t(t_0, \tau).$$

Setzen wir das in (14) ein, so erhalten wir

$$T_0 = \frac{-(M_0\theta - x_0'y_0'F_1\theta_t) \pm \sqrt{(M_0^2 - N_0L_0)\theta^2 - (L_0x_0'^2 + 2M_0x_0'y_0' + N_0y_0'^2)F_1\theta\theta_t}}{N_0\theta + x_0'^2F_1\theta_t}$$

oder

$$T_0 = \frac{-\left(M_0 - x_0'y_0'F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right) \pm \sqrt{(M_0^2 - N_0L_0) - (L_0x_0'^2 + 2M_0x_0'y_0' + N_0y_0'^2)F_1\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}}}{N_0 + x_0'^2F_1\frac{\theta_t}{\theta}}. \tag{16}$$

Dies ist die Relation zwischen dem Tangentenwinkel an die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt R_0 und dem Brennpunkt der Extremalen λ.

5. Betrachten wir jetzt die Funktion unter der Wurzel. Wir bezeichnen sie kurz mit $f(\tau)$:

$$f(\tau) = (M_0^2 - N_0L_0) - (L_0x_0'^2 + 2M_0x_0'y_0' + N_0y_0'^2)F_1\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}.$$

Nach der Theorie der Jacobischen Differentialgleichung ist bekanntlich

$$\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$$

eine wachsende Funktion von τ.

Da außerdem

$$F_x = Lx' + My'; \quad F_y = Mx' + Ny', \tag{17}$$

so haben wir

$$L_0x_0'^2 + 2M_0x_0'y_0' + N_0y_0'^2 = x_0'F_x + y_0'F_y.$$

In Nr. 2 bewiesen wir

$$x_0'F_x + y_0'F_y \geqq 0.$$

Nehmen wir diese Bedingung in stärkerer Form, d. h. mit Ausschluß des Gleichheitszeichens, so finden wir, daß die Funktion $f(\tau)$ immer abnimmt.

Es möge $P_0(\tau_0)$ derjenige Punkt auf der Extremalen λ sein, für welchen

$$f(\tau_0) = 0. \tag{18}$$

*) Den Brennpunkt der Schar (9) auf der Extremalen λ nennen wir den Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{C}$ auf der Extremalen λ oder einfach den Brennpunkt der Extremalen λ.

**) Bolza, American Journal of Mathematics 30.

Alsdann ist die Funktion $f(\tau)$ positiv für die Werte τ bis τ_0 und negativ für τ über τ_0 hinaus.

Es sei

$$\tau < \tau_0;$$

dann ist

$$f(\tau) > 0. \tag{19}$$

In diesem Fall finden wir aus (16) zwei reelle Werte für T_0; folglich existieren im Punkt R_0 zwei Tangentenrichtungen, die dem τ entsprechen, dessen Wert der Ungleichung (19) genügt. Ziehen wir jetzt durch R_0 in einer dieser Richtungen eine Kurve $\mathfrak{C}$ und konstruieren transversal zu dieser Kurve eine Schar von Extremalen, welche die abgerissene Extremale λ umgeben, so dient als Brennpunkt dieser Schar derjenige Punkt auf der Extremalen λ, welcher dem Wert des Parameters $t = \tau$ entspricht. Es möge A dieser Punkt sein und B der analoge Punkt für die Extremale BC der genannten Schar. Die Punkte A und B liegen auf der Enveloppe dieser Schar. Nach dem Zermelo-Kneserschen Enveloppensatz haben wir (Fig. 3)

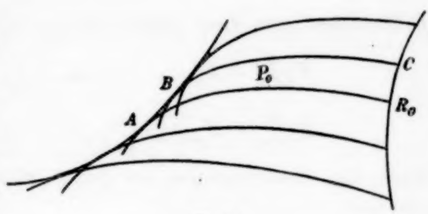


Fig. 3.

$$J_{AB} + J_{BC} = J_{AR_0}.$$

Also liefert eine abgerissene Extremale AR_0 kein Minimum, wenn für den Anfangspunkt $A(t_1)$

$$t_1 \leqq \tau_0.$$

Ist $\tau > \tau_0$, so ist

$$f(\tau) < 0. \tag{20}$$

T_0 ist in diesem Fall imaginär; folglich existiert keine reelle Tangentenrichtung für τ, deren Wert der Ungleichung (20) genügt.

Aus allem Gesagten folgt, daß die notwendige Bedingung eines Minimums die Ungleichung

$$t_1 > \tau_0 \tag{21}$$

ist.

6. Jetzt beweisen wir folgenden Satz:

Satz II. *Der Punkt $P_0(\tau_0)$ ist der Brennpunkt der Schar abgerissener Extremalen auf der Extremalen λ.* Zum Beweis setzen wir voraus, daß entlang der Rißpunktkurve F_x und F_y nicht identisch verschwinden. Es seien

$$x = x(t, m), \quad y = y(t, m)$$

die Gleichungen der Schar abgerissener Extremalen, welche die Extremale λ für $m = m_0$ enthält. Es sei ferner

$$t = \mathfrak{t}(m)$$

entlang der Rißpunktkurve. Für $m = m_0$ ist

$$\mathfrak{t}(m_0) = t_0.$$

Dann haben wir zwei Identitäten

$$F_{x'}\big(x(\mathfrak{t}(m), m),\ y(\mathfrak{t}(m), m),\ x_t(\mathfrak{t}(m), m),\ y_t(\mathfrak{t}(m), m)\big) = 0,$$

$$F_{y'}\big(x(\mathfrak{t}(m), m),\ y(\mathfrak{t}(m), m),\ x_t(\mathfrak{t}(m), m),\ y_t(\mathfrak{t}(m), m)\big) = 0.$$

Differenziert man diese Identitäten, so erhält man

$$F_x \frac{d\mathfrak{t}}{dm} + F_{x'x} x_m + F_{x'y} y_m + x_{tm} F_{x'x'} + y_{tm} F_{x'y'} = 0,$$

$$F_y \frac{d\mathfrak{t}}{dm} + F_{y'x} x_m + F_{y'y} y_m + x_{tm} F_{y'x'} + y_{tm} F_{y'y'} = 0.$$

Nach den Bezeichnungen der Nr. 5 können wir diese Gleichungen so schreiben:

$$(22)\qquad \begin{aligned} F_x \frac{d\mathfrak{t}}{dm} + Lx_m + My_m - y_t F_1 \Delta_t &= 0,\\ F_y \frac{d\mathfrak{t}}{dm} + Mx_m + Ny_m + x_t F_1 \Delta_t &= 0. \end{aligned}$$

Eliminieren wir $\frac{d\mathfrak{t}}{dm}$ daraus, so folgt

$$\frac{Lx_m + My_m - y_t F_1 \Delta_t}{F_x} = \frac{Mx_m + Ny_m + x_t F_1 \Delta_t}{F_y}.$$

Daher haben wir auf Grund von (17) entlang der Rißpunktkurve identisch

$$(M^2 - LN)\Delta - (Lx_t^2 + 2Mx_t y_t + Ny_t^2) F_1 \Delta_t = 0$$

und folglich im Punkt R_0

$$(M_0^2 - L_0 N_0)\Delta(t_0, m_0) - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x_0' y_0' + N_0 y_0'^2) F_1(t_0, m_0)\Delta_1(t_0, m_0) = 0.$$

Es sei $H_0(h_0)$ der Brennpunkt der Schar abgerissener Extremalen auf der Extremalen λ. Nach (15) schreiben wir die letzte Gleichung folgendermaßen

$$(M_0^2 - L_0 N_0) - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x_0' y_0' + N_0 y_0'^2) F_1(t_0, a_0) \frac{\theta_t(t_0, h_0)}{\theta(t_0, h_0)} = 0.$$

Vergleicht man jetzt diesen Ausdruck mit (18), so ersieht man, daß

$$\frac{\theta_t(t_0, \tau_0)}{\theta(t_0, \tau_0)} = \frac{\theta_t(t_0, h_0)}{\theta(t_0, h_0)}.$$

Das ist aber nur dann möglich, wenn

$$h_0 = \tau_0,$$

d. h. wenn die Punkte P_0 und H_0 zusammenfallen. Wir hatten angenommen, daß entlang der Rißpunktkurve F_x und F_y verschieden von Null sind. Es ist aber leicht zu beweisen, daß eine von diesen Bedingungen nicht wesentlich ist. Es sei $F_x \neq 0$, aber

(23) $$F_y = 0.$$

Dann ist die Rißpunktkurve eine Parallele zur y-Achse. Folglich

$$x(\mathfrak{t}(m), m) = \text{const.}$$

Differenzieren wir diese Gleichung, so kommt

$$x_t \frac{d\mathfrak{t}}{dm} + x_m = 0.$$

Jetzt eliminieren wir aus dieser und der ersten Gleichung (22) $\frac{d\mathfrak{t}}{dm}$ und erhalten

$$\frac{Lx_m + My_m - y_t F_1 \Delta_t}{F_x} = \frac{x_m}{x_t}.$$

Daraus und nach der ersten der Gleichungen (17)

$$M\Delta - x_t y_t F_1 \Delta_t = 0$$

oder

$$M - x_t y_t F_1 \frac{\Delta_t}{\Delta} = 0.$$

Setzt man jetzt darin m_0 für m ein und berücksichtigt (15), so erhält man

(24) $$M_0 - x_0' y_0' F_1 \frac{\theta_t(t_0, h_0)}{\theta(t_0, h_0)} = 0.$$

In diese Form kann man auch (18) bringen. Nach (23) ist

$$M_0 x_0' + N_0 y_0' = 0.$$

Daher

$$N_0 = -\frac{x_0'}{y_0'} M_0.$$

Setzen wir jetzt diesen Wert für N_0 in (18) ein, so bekommen wir

$$M_0^2 + M_0 L_0 \frac{x_0'}{y_0'} - (L_0 x_0'^2 + M_0 x_0' y_0') F_1 \frac{\theta_t(t_0, \tau_0)}{\theta(t_0, \tau_0)} = 0$$

oder

$$\frac{L_0 x_0' + M_0 y_0'}{y_0'} \left(M_0 - x_0' y_0' F_1 \frac{\theta_t(t_0, \tau_0)}{\theta(t_0, \tau_0)} \right) = 0.$$

Es ist aber

$$\frac{L_0 x_0' + M_0 y_0'}{y_0'} \neq 0.$$

Folglich

$$M_0 - x_0' y_0' F_1 \frac{\theta_t(t_0, \tau_0)}{\theta(t_0, \tau_0)} = 0.$$

Vergleichen wir das mit (24), so finden wir

$$h_0 = \tau_0.$$

Also ist der Satz auch für diesen Fall bewiesen. Nach diesem Satz schreiben wir folglich (21):

(II) $$t_1 > h_0.$$

Das führt uns zu folgendem Satz:

Satz III. *Die notwendige Bedingung eines Minimums für das Integral* (J) *besteht darin, daß der Anfangspunkt* A *der Extremalen* λ *sich zwischen dem Brennpunkt* H_0 *und dem Rißpunkt* R_0 *befindet.*

D. Schwache abgerissene Extremalen.

7. Als wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen betrachteten, nahmen wir die Bedingung (5) in stärkerer Form an. Es ist leicht ersichtlich, daß im Fall

(25) $$x_0' F_x + y_0' F_y = 0$$

die Extremale λ schwach ist. In der Tat: (25) ist äquivalent folgendem:

$$L_0 x_0'^2 + 2 M_0 x_0' y_0' + N_0 y_0'^2 = 0.$$

Da aber x_0' und y_0' reell sind, und

$$x_0'^2 + y_0'^2 \neq 0,$$

so ist das nur dann möglich, wenn

$$M_0^2 - N_0 L_0 \gtreqless 0.$$

Dann ist aber T_0 wegen (16) immer reell, folglich ist die Extremale λ für alle Punkte schwach. Insbesondere: ist entlang der Rißpunktkurve

$$F_x = F_y = 0,$$

so ist $F_x x' + F_y y'$ identisch Null für beliebige Rißelemente $\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$. Folglich sind alle abgerissenen Extremalen schwach. Diesen Fall schließen wir von der Betrachtung aus.

Die Ungleichung (5) kann man noch anders schreiben. Wir bezeichnen die Koordinaten des Rißpunktes durch ξ und η.

Dann haben wir aus (8)

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{F_x}{F_y}$$

und daher

$$F_y = -\frac{\xi' F_x}{\eta'}.$$

Setzen wir das in die Ungleichung (5) ein, so erhalten wir

$$F_x x' - \frac{\xi' F_x}{\eta'} y' > 0$$

oder

$$\frac{F_x}{\eta'}(x'\eta' - y'\xi') > 0.$$

Daraus folgt, daß *nur diejenigen Rißpunkte starken Extremalen entsprechen, in welchen die letzteren die Rißpunktkurve nicht berühren.* Also, wenn die Rißpunktkurve die Enveloppe der Schar abgerissener Extremalen ist, so sind alle abgerissenen Extremalen schwach.

E. Hinreichende Bedingungen.

8. Es sei eine Extremale λ gegeben, für welche alle Bedingungen eines Minimums erfüllt sind, die wir in Nr. 2 nannten; außerdem sei im Anfangspunkt die Bedingung (II)

$$t_1 > h_0$$

erfüllt und im Endpunkt R_0 die Bedingungen (I) und (5).

Dann ist die Extremale $\lambda(AR_0)$ eine wirklich abgerissene, d. h. sie liefert wirklich für das Integral (J) einen kleineren Wert, als jede andere benachbarte Kurve, die von A ausgeht und ihren Endpunkt B in einem Kreis hat, der mit hinreichend kleinen Radius um R_0 beschrieben ist. Verbinden wir nämlich die Punkte R_0 und B durch eine beliebige Kurve $\mathfrak{C}(R_0B)$

$$x = \tilde{x}(\alpha), \quad y = \tilde{y}(\alpha).$$

Im Punkt R_0 ist

$$F_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0') = 0,$$
$$F_{y'}(x_0, y_0, x_0', y_0') = 0.$$

Es seien $\tilde{x}_0'$, $\tilde{y}_0'$ die Ableitungen der Funktionen $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ im Punkt R_0. Dann folgt aus den letzten Gleichungen

$$F_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0')\tilde{x}_0' + F_{y'}(x_0, y_0, x_0', y_0')\tilde{y}_0' = 0.$$

Also schneidet die Kurve $\mathfrak{C}$ die Extremale AR_0 transversal. Es ist jetzt nur noch zu beweisen, daß der Anfangspunkt A so gewählt ist, daß die Kurve R_0B wirklich transversal zur Extremalen λ ist. Dazu ist bekanntlich nur zu zeigen, daß t_1 der Bedingung*)

(26) $$A_0 + B_0 \frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)} > 0$$

genügt, wo A_0 und B_0 die Werte für A und B

$$A = \tilde{x}''F_{x'} + \tilde{y}''F_{y'} + L\tilde{x}'^2 + 2M\tilde{x}'\tilde{y}' + N\tilde{y}'^2,$$
$$B = (x'\tilde{y}' - y'\tilde{x}')^2 F_1$$

für den Punkt R_0 sind.

*) Bolza, Vorlesungen, S. 316.

Nach (I) kann man die Bedingung folgendermaßen schreiben

$$(26') \quad L_0 \tilde{x}_0'^2 + 2M_0 \tilde{x}_0 \tilde{y}_0' + N_0 \tilde{y}_0'^2 + (x_0' \tilde{y}_0' - y_0' \tilde{x}_0')^2 F_1 \frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)} > 0$$

oder

$$\left(L_0 + y_0'^2 F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right) \tilde{x}_0'^2 + 2\left(M_0 - x_0' y_0' F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right) \tilde{x}_0' \tilde{y}_0' + \left(N_0 + x_0'^2 F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right) \tilde{y}_0'^2 > 0.$$

Der erste Teil dieser Ungleichung ist eine quadratische Form in bezug auf $\tilde{x}'$ und $\tilde{y}'$; damit diese Ungleichung für beliebige $\tilde{x}_0'$ und $\tilde{y}_0'$ erfüllt ist, muß daher notwendig

$$(27) \quad \begin{cases} \left(M_0 - x_0' y_0' F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right)^2 - \left(L_0 + y_0'^2 F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right)\left(N_0 + x_0'^2 F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right) < 0, \\ L_0 + y_0'^2 F_1 \frac{\theta_t}{\theta} > 0 \end{cases}$$

sein. Wir haben aber

$$\left(M_0 - x_0' y_0' F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right)^2 - \left(L_0 + y_0'^2 F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right)\left(N_0 + x_0'^2 F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right)$$
$$= (M_0^2 - N_0 L_0) - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x_0' y_0' + N_0 y_0'^2) F_1 \frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)},$$

und da

$$t_1 > h_0$$

ist, so haben wir nach Nr. 5 und 6

$$(M_0^2 - N_0 L_0) - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x_0' y_0' + N_0 y_0'^2) F_1 \frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)} < 0.$$

Die erste der Ungleichungen (27) ist also erfüllt. Jetzt muß man noch beweisen, daß die zweite Ungleichung auch erfüllt ist. Wir betrachten die Funktion

$$\varphi(\tau) = L_0 + y_0'^2 F_1 \frac{\theta_t(t_0, \tau)}{\theta(t_0, \tau)}.$$

Suchen wir den Wert dieser Funktion für den Punkt $\tau = h_0$.

Aus (18) finden wir

$$\frac{\theta_t(t_0, h_0)}{\theta(t_0, h_0)} = \frac{M_0^2 - N_0 L_0}{(L_0 x_0'^2 + 2M_0 x_0' y_0' + N_0 y_0'^2) F_1}.$$

Deshalb ist

$$\varphi(h_0) = L_0 + \frac{M_0^2 - N_0 L_0}{L_0 x_0'^2 + 2M_0 x_0' y_0' + N_0 y_0'^2} y_0'^2$$

oder

$$\varphi(h_0) = \frac{(L_0 x_0' + M_0 y_0')^2}{L_0 x_0'^2 + 2M_0 x_0' y_0' + N_0 y_0'^2}.$$

Daher ist

$$\varphi(h_0) \geqq 0.$$

$\varphi(\tau)$ ist aber eine wachsende Funktion und da $t_1 > h_0$ ist, so haben wir

$$\varphi(t_1) > 0.$$

Folglich ist auch die zweite der Ungleichungen (27) erfüllt. Deshalb ist (26') und folglich auch (26) erfüllt für willkürliche $\bar{x}_0'$ und $\bar{y}_0'$. Es ist aber

$$J_{AB} - J_{AR_0} = \left(A_0 + B_0 \frac{\theta_t}{\theta}\right) \varepsilon^2 + \cdots,$$

wo ε eine hinreichend kleine Größe ist. Deshalb ist

$$J_{AB} > J_{AR_0}.$$

Aus den letzten Ungleichungen folgt, daß die Extremale AR_0 wirklich im Punkt R_0 abreißt, also ist unser Satz bewiesen.

F. Abgerissene Extremalen zweiter Gattung.

9. Beweisen wir jetzt, daß die abgerissenen Extremalen zweiter Gattung Verlängerungen der Extremalen erster Gattung sind.

Es sei AR_0A' eine Extremale von der Klasse C', die durch ein Rißelement $\left(x_0, y_0 \frac{y_0'}{x_0'}\right)$ geht, und

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

die Gleichungen dieser Extremalen (Fig. 4).

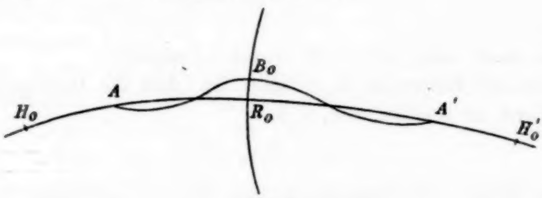


Fig. 4.

Ziehen wir eine benachbarte Kurve AB_0A'. Wenn eine willkürliche Kurve durch den Rißpunkt R_0 und den Punkt B_0 der Vergleichskurve geht, wobei B_0 hinreichend nahe bei R_0 gelegen ist, so ist sie auf Grund der Gleichungen (I) transversal sowohl zu AR_0 wie auch zu R_0A'. Folglich ist AR_0 eine Extremale im funktionalen Feld der Kurven von der Form AB_0 und R_0A' eine Extremale im funktionalen Feld der Kurven B_0A'. Im ersten Falle gehen alle Vergleichskurven vom Anfangspunkte aus, im zweiten vereinigen sie sich alle in dem Endpunkt, wobei der Endpunkt der ersten und der Anfangspunkt der zweiten sich in einem Kreise befinden, der mit hinreichend kleinem Radius um R_0 beschrieben ist. Deshalb ist laut unserer Definition AR_0 eine abgerissene Extremale erster Gattung und R_0A' eine abgerissene Extremale zweiter Gattung. Also ist eine Extremale zweiter Gattung die Verlängerung der Extremalen erster Gattung.

Jetzt beweisen wir folgenden Satz:

Satz IV. *Wenn eine der Extremalen* (AR_0 *oder* R_0A') *stark ist, so ist die andere schwach.*

Es seien t_0 und t_2 die Werte des Parameters t in dem Punkte R_0 bzw. A'. Damit die abgerissene Extremale R_0A' zweiter Gattung ist, muß die Funktion

$$J(t) = \int_t^{t_2} F(x(t), y(t), x'(t), y'(t))\, dt$$

für den Punkt $t = t_0$ ein Minimum liefern. Wie in Nr. 2 ist ersichtlich, daß die erste Bedingung des Minimums erfüllt ist. Für die zweite Ableitung haben wir

$$J''(t) = -(F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_{x'} x''(t) + F_{y'} y''(t))$$

und auf Grund von (I)

$$J''(t) = -(F_x x'(t_0) + F_y y'(t_0)).$$

Also muß im Rißpunkt die Ungleichung

$$F_x x'(t_0) + F_y y'(t_0) \leqq 0 \tag{28}$$

erfüllt sein.

Weiter kann man, wie in Nr. 6 und 7, zeigen:

a) damit die Extremale R_0A' stark ist, muß die Bedingung (28) in stärkerer Form zu erfüllen sein, d. h.

$$F_x x_0' + F_y y_0' < 0.$$

b) Ist $H_0'(h_0')$ der Brennpunkt der Schar abgerissener Extremalen zweiter Gattung auf der Extremalen R_0A', so muß, damit die letztere stark ist, der Punkt A' sich notwendig zwischen R_0 und H_0' befinden.

Nehmen wir an, daß A und A' zwischen H_0 und R_0 bzw. R_0 und H_0' liegen und daß entlang der Extremalen AA' die Bedingung Legendres

$$F_1(x, y, \cos\beta, \sin\beta) > 0 \qquad (0 \leqq \beta \leqq 2\pi)$$

erfüllt ist.

Wenn jetzt die Funktion

$$W = F_x x' + F_y y' \tag{29}$$

für das Rißelement $\left(x_0, y_0, \frac{y_0'}{x_0'}\right)$ einen positiven Wert besitzt, so ist die Extremale AR_0 erster Gattung stark, die Extremale R_0A' zweiter Gattung schwach. Besitzt sie aber einen negativen Wert, so ist die Extremale zweiter Gattung R_0A' stark, die Extremale AR_0 erster Gattung aber schwach.

Also ist unser Satz bewiesen.

G. Das absolute Extremum.

10. Die geometrischen Örter der Punkte H_0 und H_0' bilden die Enveloppen der Schar

$$x = x(t, m), \quad y = y(t, m)$$

abgerissener Extremalen. Bezeichnen wir diese Enveloppen mit E bzw. E'. Im Bereich, der durch diese Kurven abgegrenzt ist, greifen wir alle starken Extremalen erster und zweiter Gattung heraus, d. h. alle diejenigen, für welche in dem Rißpunkt $W \neq 0$ und längs welcher

$$F_1(x, y, \cos\beta, \sin\beta) > 0 \qquad (0 \leqq \beta \leqq 2\pi),$$

und bezeichnen mit D_1 und D_2 die Bereiche welche von der Gesamtheit starker Extremalen erster bzw. zweiter Gattung gebildet sind.

Wir beweisen jetzt, daß jede beliebige abgerissene Extremale, welche durch einen Punkt im Innern des Bereiches D_1 geht, für das Integral einen kleineren Wert liefert, als eine andere Kurve, welche denselben Anfangspunkt hat, ganz im Innern des Bereiches D_1 verläuft und in der Nähe der Rißpunktkurve endet.

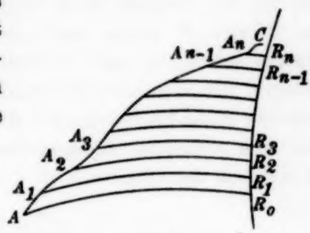


Fig. 5.

Es sei in der Tat AR_0 eine abgerissene Extremale und AC eine Vergleichskurve. Auf ihr nehmen wir eine Reihe von Punkten $A_1, A_2, A_3, \cdots; A_n$ (Fig. 5) hinreichend nahe beieinander; durch diese Punkte ziehen wir abgerissene Extremalen $A_1R_1\; A_2R_2 \cdots$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}
J_{AR_0} &< J_{AA_1} + J_{A_1R_1}, \\
J_{A_1R_1} &< J_{A_1A_2} + J_{A_2R_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
J_{A_{n-1}R_{n-1}} &< J_{A_{n-1}A_n} + J_{A_nR_n}, \\
J_{A_nR_n} &< J_{A_nC}.
\end{aligned}$$

Addiert man diese Ungleichungen, so erhält man

$$J_{AR_0} < J_{AA_1} + J_{A_1A_2} + J_{A_2A_3} + \cdots + J_{A_nC}$$

d. h.

$$J_{AR_0} < J_{AC}.$$

Also ist unser Satz bewiesen.

Einen analogen Satz kann man auch für den Bereich D_2 beweisen.

Hieraus ziehen wir folgende Folgerung:

Es sei $L(AB)$ irgend eine Extremale, welche die Rißpunktkurve im Punkt R_0 schneidet; die Teile AR_0 und R_0B mögen in dem Bereich D_1 bzw. D_2 liegen (Fig. 6). Durch die Endpunkte ziehen wir abgerissene Extremalen erster Gattung AR_a und zweiter Gattung R_bB. Nach dem Bewiesenen ist

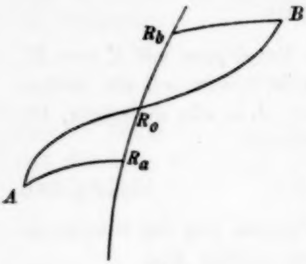


Fig. 6.

$$J_{AR_a} < J_{AR_0},$$
$$J_{R_bB} < J_{R_0B}.$$

Wir addieren diese zwei Ungleichungen

$$J_{AR_a} + J_{R_bB} < J_{AB}.$$

Folglich liefert die Kurve AR_aR_bB für das Integral ein absolutes Minimum. Genau gesagt: wenn D ein Bereich ist, der beiden Bereichen D_1 und D_2 angehört, liefert die zerrissene Kurve AR_aR_bB, die darin gezogen ist, für das Integral einen kleinsten Wert im Feld der Kurven, die ganz im Bereich D liegen und zwei gegebene Punkte A und B verbinden. Daraus sehen wir, daß im Bereich D nicht eine stetige Extremale für das Integral ein absolutes Minimum liefert, sondern eine zerrissene mit dem Riß der Koordinaten (x, y). Allgemein: *wenn die Funktion $F(x, y, x', y')$ alle oben genannten Eigenschaften besitzt, so existiert ein solcher Bereich D, in welchem das Integral*

$$J_A^B = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

kein Extremum in stetigen Lösungen besitzt. Die Extremalen dieses Bereiches müssen zerrissen sein, mit einem Riß der Koordinaten x und y.

H. Beispiel.

11. Es sei eine Kurve zu ermitteln, für welche das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left(ab\sqrt{x'^2 + y'^2} + ayx' + bxy'\right) dt \qquad (a > b > 0)$$

ein Minimum wird.

Man hat hier

$$F = ab\sqrt{x'^2 + y'^2} + ayx' + bxy',$$

und folglich nimmt die Eulersche Gleichung (1) die Form an

$$b - a + ab\,\frac{x'y'' - y'x''}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} = 0,$$

oder

$$(30) \qquad \frac{1}{R} = \frac{x'y'' - y'x''}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} = \frac{a - b}{ab}.$$

Die Krümmung ist also konstant und gleich $\frac{1}{R} = \frac{a-b}{ab}\cdot$ Daraus folgt, daß die Extremalen Kreise mit dem Radius $R = \frac{ab}{a-b}$ sind, die in positivem Sinn beschrieben werden, d. h. so, daß der Mittelpunkt zur Linken liegt.

Das allgemeine Integral der Gleichung (30) kann man in parametrischer Form schreiben

(31) $$x = \alpha + R\cos t, \quad y = \beta + R\sin t,$$

wo α und β willkürliche Konstante sind.

Jetzt suchen wir die Gleichung der Rißpunkte. Man hat

$$F_{x'} = ab\,\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + ay,$$

$$F_{y'} = ab\,\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + bx.$$

Die Gleichungen (I) sind demnach folgende:

(32) $$ab\,\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + ay = 0; \quad ab\,\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + bx = 0.$$

Bezeichnen wir die laufenden Koordinaten der Rißpunktkurve mit ξ und η. Dann ist nach (32)

(33) $$\xi = -a\cos t, \qquad \eta = b\sin t.$$

Eliminiert man t daraus, so erhält man

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Also ist die Rißpunktkurve eine Ellipse ($ABCD$) mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkte der Koordinaten und mit den Halbachsen a und b (Fig. 7).

Jetzt definieren wir den geometrischen Ort der Mittelpunkte der abgerissenen Extremalen. Aus (31) und (33) finden wir, daß entlang der Rißpunktkurve

(34) $$\alpha + R\cos t = -a\cos t; \quad \beta + R\sin t = b\sin t.$$

Da $\frac{1}{R} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$, so ist $R > b$.

Aus (34) folgt

$$\alpha = -(a+R)\cos t, \quad \beta = -(R-b)\sin t.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$a + R = a', \quad R - b = b'.$$

Dann finden wir

(35) $$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} = 1.$$

Also ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Extremalen auch eine Ellipse $(A'B'C'D')$ mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt der Koordinaten und den Halbachsen $a' = a + R$ und $b' = R - b$.

Definieren wir jetzt die Kurven E und E', die geometrischen Örter der Brennpunkte H_0 und H_0' der abgerissenen Extremalen.

E und E' sind die Enveloppen der Kreise vom Radius R, deren Mittelpunkte auf der Ellipse (35) liegen. Deshalb ist E eine zu (35) parallele Ellipse $(A''B''C''D'')$ mit den Halbachsen

$$a' + R = a + 2R \quad \text{und} \quad b' + R = 2R - b.$$

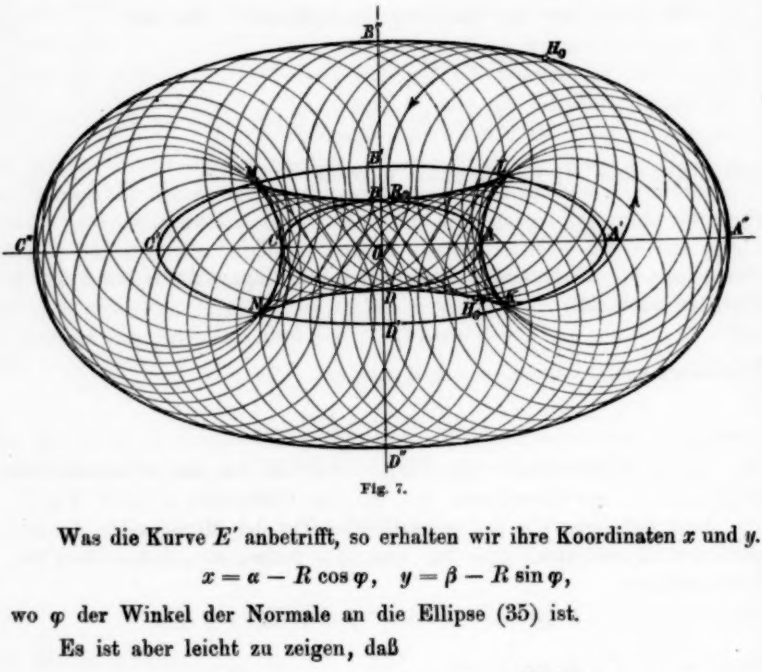


Fig. 7.

Was die Kurve E' anbetrifft, so erhalten wir ihre Koordinaten x und y.

$$x = \alpha - R\cos\varphi, \quad y = \beta - R\sin\varphi,$$

wo φ der Winkel der Normale an die Ellipse (35) ist.

Es ist aber leicht zu zeigen, daß

$$\alpha = \frac{a'^2 \cos\varphi}{\sqrt{a'^2\cos^2\varphi + b'^2\sin^2\varphi}}, \quad \beta = \frac{b'^2\sin\varphi}{\sqrt{a'^2\cos^2\varphi + b'^2\sin^2\varphi}}.$$

Deshalb

$$x = \frac{a'^2\cos\varphi}{\sqrt{a'^2\cos^2\varphi + b'^2\sin^2\varphi}} - R\cos\varphi; \quad y = \frac{b'^2\sin\varphi}{\sqrt{b'^2\cos^2\varphi + b'^2\sin^2\varphi}} - R\sin\varphi.$$

Die Form dieser Kurve hängt von den Werten a', b' und R ab. In unserem Fall stellen diese Gleichungen eine Kurve vierter Ordnung $(KLMN)$ dar, die in A, B, C, D die Ellipse (33) berührt.

Suchen wir endlich den Bereich starker Extremalen. Da

$$F_1 = \frac{ab}{(\sqrt{x'^2+y'^2})^3}$$

ist, so ist die Bedingung des gewöhnlichen Minimums

$$F_1(x, y, \cos\beta, \sin\beta) > 0$$

für alle abgerissenen Extremalen erfüllt.

Jetzt sind nur noch die Rißpunkte zu finden, welche den starken Extremalen erster und zweiter Gattung zugehören. Es ist die Funktion (29)

$$W = x'F_x + y'F_y = (a+b)x'y'.$$

Auf Grund von (31) und (33)

$$W = \frac{a+b}{ab} R^2 \xi\eta.$$

Nun ist aber auf der Rißpunktkurve

$W = 0$ für die Punkte A, B, C, D,

$W > 0$ für die Punkte der Bogen AB und CD,

$W < 0$ für die Punkte der Bogen BC und DA.

Deshalb sind von der Gesamtheit abgerissener Extremalen nur vier schwach, nämlich die, welche die Rißpunktkurve in ihren Extrempunkten A, B, C, D berühren. Die Punkte der Bogen AB und CD sind die Rißpunkte starker Extremalen erster Gattung; die Punkte der Bogen BC und DA sind die Rißpunkte starker Extremalen zweiter Gattung. Die Gesamtheit der ersten und der zweiten bildet die Bereiche D_1 bzw. D_2, welche die oben betrachteten Eigenschaften besitzen.

Murom, 21. Mai 1913.

Die beiden Kleeblattschlingen.

Von

M. Dehn in Breslau.

Die beiden Kleeblattschlingen.

I.

Im Folgenden möchte ich zeigen, daß die Untersuchung der zu den verschlungenen Raumkurven (*Knoten*) gehörenden Gruppen uns in den Stand setzt, grundlegende topologische Probleme einfach und streng zu behandeln. Zu diesem Zwecke habe ich ein ziemlich spezielles Beispiel ausgesucht, das doch einerseits allgemeineres Interesse beanspruchen darf, andererseits so einfach ist, daß man keiner schwierigen oder besonders auf den Fall zugeschnittenen Methoden bedarf.

Die *Kleeblattschlinge* (Fig. 1) ist der einfachste Knoten, d. i. die einfachste verschlungene Raumkurve, die sich im Raume nicht stetig in einen Kreis überführen läßt. Sie ist der einzige Knoten, der so auf eine Ebene projiziert werden kann, daß die Projektion nur drei Doppelpunkte aufweist. Im Raum kann man nun *zwei verschiedene Arten* von Kleeblattschlingen unterscheiden, die auseinander durch Spiegelung, etwa an einer Ebene, entstehen. Beide Arten sind in Fig. 1 dargestellt. *Unser Problem besteht darin, den Nachweis zu führen, daß diese beiden Arten von Kleeblattschlingen im Raume*) voneinander topologisch zu unterscheiden sind,* daß also die linke Kleeblattschlinge durch keine stetige Raumtransformation in die rechte überführbar ist. Natürlich ist diese Tatsache jedem bekannt, der sich mit Knoten etwas eingehender beschäftigt hat und sich die Raumkurven etwa durch Fäden veranschaulicht hat. Aber diese prak-

Fig. 1.

*) Und zwar auch im geschlossenen sphärischen Raume, im Widerspruch zu einer Bemerkung in der Enzyklopädie.

tisch vielleicht ausreichende Gewißheit ist sehr weit entfernt von einem wirklichen Beweise.*) — Die Erscheinung ist jedenfalls sehr beachtenswert:**) Der Raum mit einer Linkskleeblattschlinge und der Raum mit einer Rechtskleeblattschlinge sind homöomorph, d. i. in der Weise gleich zusammensetzbar, daß die beiden Knoten entsprechende Gebilde in den beiden Räumen sind. Trotzdem sind die beiden in demselben Raume gelegenen Knoten nicht durch stetige Transformation des Raumes ineinander überführbar. Wir haben hier also eine Art *topologische Symmetrie* vor uns. Die im zweidimensionalen Raume (auf der Kugel) gelegenen topologisch symmetrischen, nicht ineinander deformierbaren Gebilde sind lange nicht so schön, wie nebenbei bemerkt sei. Fig. 2 stellt zwei solche, übrigens ziemlich willkürlich ausgewählte Gebilde dar.

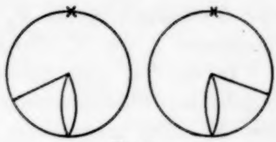


Fig. 2.

Ich will nun im Folgenden die Grundlagen für den Beweis entwickeln. Der Gang wird wohl noch klarer, wenn man zunächst die stetigen Transformationen Δ irgend einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M_3 in sich betrachtet, bei der zwei in M_3 liegende Kurven K_1 und K_2 ineinander übergehen (in unserem Falle ist die M_3 ein einfach zusammenhängendes Stück des gewöhnlichen Raumes oder auch der ganze dreidimensionale sphärische Raum).

*Sollen K_1 und K_2 durch Δ ineinander übergehen, so müssen die Gruppen****) von K_1 und K_2 in der Weise isomorph aufeinander bezogen werden können, daß die bei Δ einander entsprechenden Kurven auch bei der isomorphen Zuordnung einander entsprechen.*

Diese „*Hauptbedingung*“ folgt sofort aus dem Umstande, daß irgend welche Kurven, die zusammen im Außenraum von K_1 ein Elementarflächenstück begrenzen, bei der stetigen Transformation Δ der M_3 in Kurven übergehen, die im Außenraum von K_2 zusammen ein Elementarflächenstück begrenzen. Sind also $a_1 \cdots a_n$ Elemente der Gruppe von K_1 und gilt:

$$a_1 \cdots a_n = 1,$$

so muß für die entsprechenden Elemente der Gruppe von K_2 gelten:

$$a_1' \cdots a_n' = 1,$$

wobei a_1 und a_1' Kurven entsprechen, die durch Δ ineinander übergehen. Also ist die Zuordnung $a_i \longrightarrow a_i'$ eine isomorphe Zuordnung der Gruppe auf sich selbst. — Umgeben wir innerhalb M_3 einen Punkt einer Kurve K mit einem genügend kleinen Elementarraumstück E_3, so wird K die E_3

*) Hierauf weist auch H. Tietze, Monatsh. f. Math. u. Phys. 19, S. 97 hin.

**) Zuerst hat wohl Listing auf diese Erscheinung und ihr Gegenstück, die „Amphicheiralität“ der Knoten hingewiesen.

***) Siehe Anm. **) auf der nächsten Seite.

begrenzende Kugelfläche in zwei Punkten A und B schneiden; eine Kurve β, die auf der Begrenzung von E_3 A und B trennt, wollen wir eine *Breitenkurve* β nennen. Umgeben wir K innerhalb M_3 mit einem genügend kleinen Ringraum, so wird die begrenzende Ringfläche keinen Punkt mit K gemeinsam haben. Diese Ringfläche wird bei geeigneter Wahl eine bestimmte Breitenkurve β enthalten. β wird diese Ringfläche nicht zerstückeln. Eine Kurve auf der Ringfläche, die β *einmal* schneidet, wollen wir eine *Längskurve* λ nennen. Dann ist ein besonderer Teil der Hauptbedingung:

a) *Die isomorphe Beziehung der Gruppen von K_1 und K_2 aufeinander muß so gewählt werden können, daß eine jede Breitenkurve β_1 von K_1 in eine Breitenkurve β_2 von K_2 und ebenso eine Längskurve λ_1 von K_1 in eine Längskurve λ_2 von K_2 übergeht.**)

In der Tat geht durch Δ ein einen Punkt von K_1 bzw. K_1 selbst umgebender Elementarraum bzw. Ringraum in ein einen Punkt von K_2 bzw. K_2 selbst umgebenden Elementarraum bzw. Ringraum über und K_2 wird ebenso wie K_1 mit dem Elementarraum zwei, mit dem Ringraum keinen Punkt gemeinsam haben usf.

Diese Bedingung a) gilt für alle zweiseitigen und einseitigen Mannigfaltigkeiten M_3. *Ist die M_3 zweiseitig,* so können wir die Bedingung a) noch weiter verschärfen: Nehmen wir irgend ein Paar β und λ, die zu einer Kurve K gehören, und geben β und λ Durchlaufungssinn, so erhält dadurch zunächst das β entsprechende, einen Punkt P von K umgebende Elementarraumstück E_3 und damit die ganze Mannigfaltigkeit M_3 eine Indikatrix. Wir können etwa den angenommenen Durchlaufungssinn von β demjenigen Teil der E_3 begrenzenden Kugelfläche zuordnen, der von K zuerst getroffen wird, wenn man K von P aus in derselben Richtung wie λ durchläuft (s. Fig. 3).

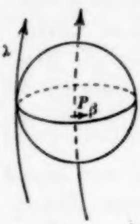


Fig. 3.

Da nun bei der stetigen Transformation der *zweiseitigen* M_3 in sich die Indikatrix unverändert bleibt, so folgt die Verschärfung der Bedingung a).

a') *Die isomorphe Beziehung der Gruppe von K_1 auf die Gruppe von K_2 muß so gewählt werden können, daß, wenn dabei ein Paar mit Durchlaufungssinn versehener Kurven β_1 und λ_1 von K_1 in ein Paar mit Durchlaufungssinn versehener Kurven β_2 und λ_2 von K_2 übergeht, die durch die Richtungen von β_1 und λ_1 bestimmte Indikatrix von M_3 dieselbe ist, wie die durch die Richtungen von β_2 und λ_2 bestimmte.*

In unserem Falle ist die M_3 der gewöhnliche Raum. Die Gruppe G_{Kl} der Kleeblattschlinge in diesem Raume ist aus früheren Untersuchungen**)

*) S. die Bemerkung am Schluß dieser Arbeit.

**) S. Math. Ann. 1910 und 1911 sowie die Münsterische Dissertation von Gieseking.

schon recht bekannt. Wir untersuchen nun im folgenden Abschnitt die isomorphe Zuordnung von G_{Kl} auf sich selbst, die *Gruppe der Isomorphismen von* G_{Kl}. Es wird sich zeigen, daß diese sehr einfach zu beschreiben ist: Außer den selbstverständlichen „kogredienten" Isomorphismen gibt es wesentlich nur einen „kontragredienten" Isomorphismus. Wir beherrschen so alle Möglichkeiten, die Raumkurven in bezug auf die linke Kleeblattschlinge den Raumkurven in bezug auf die rechte Kleeblattschlinge so zuzuordnen, daß durch dieses Zuordnen die aus diesen Kurven bezw. gebildeten Gruppen einander isomorph zugeordnet werden. Es ergibt sich dabei, daß *die Bedingung* a') *niemals erfüllt ist*, womit unser Ziel erreicht ist.

Eine weitere Klärung des hier vorliegenden Problems habe ich dadurch versucht, daß ich im dritten Abschnitt ganz kurz einen „amphicheiralen" Knoten behandelt habe, d. i. eine solche verschlungene, durch eine stetige Raumtransformation nicht in einen Kreis zu transformierende Raumkurve, die durch eine stetige Raumtransformation in ihr Spiegelbild übergeführt werden kann. Der von mir behandelte Knoten ist nach der Kleeblattschlinge der überhaupt einfachste, nämlich der einzige, der bei geeigneter Projektion nur vier Doppelpunkte aufweist. Wir werden sehen, daß für diesen Knoten, seinem amphicheiralen Charakter entsprechend, die Gruppe der Isomorphismen nicht mehr so einfach ist, wie bei der Kleeblattschlinge.

So führt unser topologisches Problem von selbst auf die Frage nach den Isomorphismen einer unendlichen Gruppe, etwa zu dem sehr allgemeinen Problem: *wenn die Gruppe selbst durch Erzeugende und Relationen gegeben ist, die Gruppe ihrer Isomorphismen in derselben Weise darzustellen.* Im Falle der Fundamentalgruppen für geschlossene Flächen wird dies Problem in einer demnächst erscheinenden Arbeit in Angriff genommen.

II.

Die Gruppe G_{Kl} der Kleeblattschlinge kann, wie mehrfach auseinandergesetzt*), in folgender Weise definiert werden:

Erzeugende:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,$$

Relationen:

$$a_1 a_4^{-1} a_2 = a_2 a_4^{-1} a_3 = a_3 a_4^{-1} a_1 = 1.$$

Das zugehörige Gruppenbild besteht (s. a. a. O.) aus Streifen (s. Fig. 4), die zu je dreien an den Rändern zusammenhängen. Stellt man (s. Math. Ann. 1911) das Gruppenbild als reguläres Netz in einem nicht-euklidischen Raum dar, dessen Fundamentalgebilde ein Zylinder mit einer zu den Streifenkanten

*) Siehe Anm. **) auf der vorhergehenden Seite.

bzw. den Erzeugenden a_4 parallelen Achse ist, so entspricht jedem Element der Gruppe eine bestimmte Bewegung in dieser Geometrie, die das Gruppenbild mitsamt der Bezeichnung in sich überführt. Der Erzeugenden a_4 bzw. dem Element a_4^n entspricht speziell eine Drehung um die Kante, durch den Anfangspunkt um $\frac{2\pi}{3}$ bzw. $\frac{2n\pi}{3}$, verbunden mit einer Parallelverschiebung längs dieser Kante um c bezw. nc, wo c die Länge von a_4 ist. In einer Ebene senkrecht zur Achse gilt die gewöhnliche hyperbolische Geometrie. Schneiden wir das Gruppenbild mit einer solchen Ebene durch den Anfangspunkt O, so liefern die Spuren der Streifen einen unendlichen Streckenkomplex Γ (s. Fig. 5): von jedem Punkt von Γ gehen drei Strecken aus, die Winkel von 120° miteinander bilden. Γ ist ein Baum, d. i., es gibt keine geschlossenen Polygone in Γ. Einem Element von G_{Kl} entspricht eine Bewegung von Γ in sich. *Die Erzeugende a_4 und ihre Potenzen*

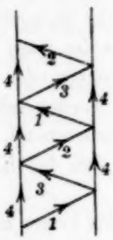


Fig. 4.

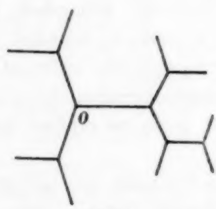


Fig. 5.

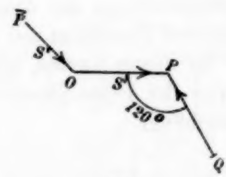


Fig. 6.

sind die einzigen Elemente, für die die entsprechenden Bewegungen von Γ den Anfangspunkt O in Ruhe lassen.

1. *Bei einem Isomorphismus von G_{Kl}* (d. i. einer isomorphen Abbildung auf sich selbst) *geht a_4^3 in a_4^3 oder in a_4^{-3} über.* In der Tat, ein Element, das mit allen Elementen von G_{Kl} vertauschbar ist (ein ausgezeichnetes Element von G_{Kl}), muß wieder in ein solches Element übergehen. Nun sind aber a_4^3 und seine Potenzen die einzigen ausgezeichneten Elemente von G_{Kl}, wie wir gleich zeigen werden; folglich geht die Gruppe $\{(a_4^3)^n\}$ durch den Isomorphismus wieder in die Gruppe $\{(a_4^3)^n\}$ über. Die Gruppe $\{(a_4^3)^n\}$ läßt sich aber durch *ein* Element nur dann erzeugen, wenn dieses Element gleich $(a_4)^3$ oder $(a_4)^{-3}$ gewählt wird. Folglich geht a_4^3 beim Isomorphismus in a_4^3 oder in a_4^{-3} über. Wir müssen also nur noch nachweisen, daß $(a_4^3)^n$ *die einzigen ausgezeichneten Elemente von G_{Kl}* sind.

Es sei nun S irgend ein ausgezeichnetes Element, dann wird speziell

$$Sa_4S^{-1} = a_4$$

sein, also eine Drehung um O hervorrufen. Es möge nun durch die S entsprechende Bewegung von Γ O in P, $\bar{P}$ in O übergehen (s. Fig. 6).

Dann wird durch die Bewegung Sa_4 der Punkt O in P und $\overline{P}$ etwa in Q übergeführt, wo $\sphericalangle OPQ = \frac{2\pi}{3}$ und $OP = QP$ ist. Durch die Bewegung Sa_4S^{-1} wird folglich O in Q übergeführt, weil der Streckenzug S, dessen Projektion auf die Ebene von Γ $OP = S'$ ist, durch die Drehung a_4 um P in einen Streckenzug übergeführt wird, dessen Projektion auf die Ebene von Γ auch der Richtung nach QP ist. Also liefert das Element Sa_4S^{-1} nur dann eine Drehung um O, wenn P mit O zusammenfällt. Folglich muß S eine Drehung um O hervorrufen, also eine Potenz von a_4 sein. Alle ausgezeichneten Elemente von G_{Kl} sind folglich in der Form a_4^n enthalten. Nun ist aber

$$a_4\, a_1 a_4^{-1} = a_2,$$
$$a_4^2 a_1 a_4^{-2} = a_3.$$

Also sind weder $a_4^{\pm 1}$ noch $a_4^{\pm 2}$ ausgezeichnete Elemente, da a_1, a_2 und a_3 voneinander verschieden sind. Dagegen ist in der Tat

$$a_4^3 a_1 a_4^{-3} = a_1,$$
$$a_4^3 a_2 a_4^{-3} = a_2,$$
$$a_4^3 a_3 a_4^{-3} = a_3,$$

wie aus der Figur abzulesen ist, woraus sofort folgt, daß, wie zu beweisen war, $(a_4^3)^n$ die einzigen ausgezeichneten Elemente unserer Gruppe sind.

2. *Bei einem Isomorphismus von G_{Kl} geht a_4 über in Sa_4S^{-1} oder $Sa_4^{-1}S^{-1}$.*

Es möge a_4 in $\bar{a}_4$ übergehen, dann muß die dritte Potenz von a_4 nach dem Vorherigen entweder a_4^3 oder a_4^{-3} sein. Also muß die Bewegung, die $(\bar{a}_4)^3$ entspricht, Γ in Ruhe lassen. Also muß $\bar{a}_4$ selbst eine Drehung von Γ um 120^0 um einen realen Mittelpunkt M der Ebene von Γ hervorrufen. Wir beachten nun, daß sich Γ aus lauter regulären Polygonzügen zusammensetzen läßt, deren Winkel 120^0 betragen und deren Ecken bei geeigneter Wahl der Länge der Seite (oder Länge der Projektion von a_1 usw.) auf einem Grenzkreis (d. i. einem das Fundamentalgebilde berührenden Kreis) liegen. Diese Polygonzüge wollen wir kurz *Fundamentalpolygone* nennen. Durch Drehung um M sollen nun die Fundamentalpolygone ineinander übergehen. Läge M nun im Inneren eines Fundamentalpolygons, so müßte dieses durch die Drehung um M in sich übergehen. Denn M liegt nur im Inneren eines einzigen Polygons und bei Drehung um M kann M nicht aus dem Inneren des Polygons herauskommen. Aber bei Drehung um den realen Punkt M um einen von 2π verschiedenen Winkel kann das Fundamentalpolygon nicht in sich übergehen. Vielmehr ist das nur möglich, wenn der Drehmittelpunkt in den Polygonmittelpunkt fällt, der jedenfalls ideal ist (und bei geeigneter Wahl der Streckenlänge von Γ auf

das Fundamentalgebilde fällt). Also kann M nicht im Inneren eines Polygons liegen. Folglich muß M mindestens auf *einer* Strecke von Γ liegen. Liegt M aber auf *einer* Strecke, dann geht diese durch Drehung um 120^0 um M in eine von ihr verschiedene Strecke von Γ über, die mit ihr den Punkt M gemeinsam hat. Also fällt M mit einem Eckpunkt von Γ zusammen. $\bar a_4$ ruft folglich eine Drehung um 120^0 um einen Eckpunkt M von Γ hervor und ist also durch Transformation mit einem geeigneten Element S aus a_4 resp. a_4^{-1} zu erhalten. In der Tat, wird durch S O_1 in O, O in M (s. Fig. 7) übergeführt, so geht durch $S^{-1}\bar a_4 S$ O in sich über, also ist $S^{-1}\bar a_4 S$ eine Drehung um O also $= a_4^n$. Es kann aber n nur gleich $+1$ oder -1 sein, da $(\bar a_4)^3 = a_4^{+3}$ oder $= a_4^{-3}$ sein soll und

$$(\bar a_4)^3 = (S a_4^n S^{-1})^3 = S^3 a_4^{3n} S^{-3} = a_4^{3n}$$

ist.

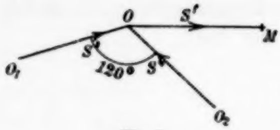


Fig. 7.

3. *Geht bei einem Isomorphismus a_4 in a_4 über, so geht a_1 über in $a_4^{\alpha} a_1 a_4^{-\alpha}$.*

Die Gruppe G_{Kl} kann auch allein durch a_1 und a_4 erzeugt werden, denn die anderen Erzeugenden a_2 und a_3 sind die Transformierten von a_1 durch a_4 resp. a_4^2. G_{Kl} wird durch *eine* Relation zwischen a_4 und a_1 definiert, nämlich durch

$$a_4^{-2} a_1 a_4 a_1 = 1,$$

die man durch Elimination von a_2 und a_3 aus den drei ursprünglichen Relationen erhält.

Es möge nun bei einem Isomorphismus a_4 in $\bar a_4$, a_1 in $\bar a_1$ übergehen. Dann muß der Relation gemäß

$$\bar a_1 a_4 \bar a_1 = a_4^2$$

sein, also eine Drehung um O hervorrufen. Es sei nun (Fig. 8) OPP_1 die Projektion des Streckenzuges $\bar a_1 \bar a_1$ auf die Ebene von Γ. Dann ist OPQ_1 die Projektion des Streckenzuges $\bar a_1 a_4 \bar a_1$, wo

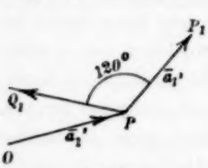


Fig. 8.

$$\sphericalangle P_1 P Q_1 = 120^0$$

ist und

$$PQ_1 = PP_1 = OP$$

ist. Demgemäß kann nur dann $\bar a_1 a_4 \bar a_1 = a_4^2$ sein, also eine Drehung um O hervorrufen, wenn Q_1 mit O zusammenfällt, also $\sphericalangle OPP_1 = 120^0$ ist (und zwar muß die Drehung um P von O nach P_1 rechtsläufig sein, wenn a_4 eine linksläufige Drehung von 120^0 hervorruft und umgekehrt). Wir konstruieren nun mit der Projektion $\bar a_1'$ von $\bar a_1$ einen unendlichen Streckenkomplex $\bar\Gamma$, der von O angeht, bei dem wieder an jeder Ecke drei Strecken unter dem Winkel von 120^0 zusammenstoßen.

Da die Länge von $\bar{a}_1'$ nicht kleiner ist als die Länge von a_1' (die Streckenlänge von Γ), so wird auch $\bar{\Gamma}$ ein Baum sein. Er enthält nur Eckpunkte, die auch Eckpunkte von Γ sind, aber alle Eckpunkte von Γ nur dann, wenn die Länge von $\bar{a}_1'$ gleich der Länge von a_1' ist. Alle Eckpunkte des Gruppenbildes, die durch a_4 und $\bar{a}_1$ erhalten werden können, projizieren sich auf die Ecken von $\bar{\Gamma}$, da aber durch $\bar{a}_1$ und a_4 die ganze Gruppe erzeugbar ist, so muß $\bar{a}_1'$ die Streckenlänge von Γ haben, also gleich $a_1^{\pm 1}$, $a_2^{\pm 1}$ oder $a_3^{\pm 1}$ sein. Es ist aber:

$$a_4^{-2} a_i^{-1} a_4 a_i^{-1} \neq 1 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Es ist also $\bar{a}_1 = a_1$, a_2 oder a_3, d. i. nach obigen $= a_4^{\alpha} a_1 a_4^{-\alpha}$. Da a_2 und a_3 die Transformierten von a_1 durch a_4 resp. a_4^2 sind, so folgt, daß a_2 und a_3 entsprechend $a_4^{\alpha} a_2 a_4^{-\alpha}$, und $a_4^{\alpha} a_3 a_4^{-\alpha}$ zugeordnet werden.

4. Ganz ebenso folgt: *Geht a_4 in a_4^{-1} über, so geht a_1 in $a_4^{\alpha} a_1^{-1} a_4^{-\alpha}$ über.* Denn aus der Relation

$$a_4^{-2} a_1 a_4 a_1 = 1$$

folgt durch Umkehrung:

$$a_4^{-1} a_1^{-1} a_4^2 a_1^{-1} = 1,$$

durch Transformation

$$a_4^3 a_4^{-1} a_1^{-1} a_4^2 a_1^{-1} a_4^{-3} = 1,$$

und wegen der Vertauschbarkeit von a_4^3 mit allen Elementen,

$$a_4^2 a_1^{-1} a_4^{-1} a_1^{-1} = 1.$$

Also gelten dieselben Schlüsse für a_4^{-1} und a_1^{-1} die wir unter 3. für a_4 und a_2 gemacht haben. *Die Zuordnung $a_1 \to a_1^{-1}$, $a_4 \to a_4^{-1}$ stellt einen kontragredienten Isomorphismus von G_{Kl} dar.* Denn a_1 ist nicht in a_1^{-1} transformierbar, wie man am einfachsten einsieht, wenn man G_{Kl} durch Hinzufügung geeigneter Relationen zu einer Abelschen Gruppe macht. Denn dann geht G_{Kl} über in die gewöhnliche unendlich zyklische Gruppe $\{a_1^n\}$, in welcher a_1 nicht in a_1^{-1} transformierbar ist, weil daraus $a_1^2 = 1$ folgen würde.

5. Geht a_4 in $S a_4 S^{-1}$ über, so gibt es einen Isomorphismus (nämlich den gewöhnlichen kogredienten), durch den a_1 in $S a_1 S^{-1}$ übergeht, folglich geht nach 4. bei einem Isomorphismus, bei dem a_4 in $S a_4 S^{-1}$ übergeht, a_1 in $a_4^{\alpha} S a_1 S^{-1} a_4^{-\alpha}$ über, denn durch Einschaltung des Isomorphismus:

$$a_4 \to \bar{\bar{a}}_4 = S a_4 S^{-1},$$
$$a_1 \to \bar{\bar{a}}_1 = S a_1 S^{-1}$$

erhalten wir aus dem gegebenen einen Isomorphismus, bei dem $\bar{\bar{a}}_4$ in $\bar{a}_4$ übergeht, folglich muß dabei $\bar{a}_1$ in $a_4^{\alpha} \bar{\bar{a}}_1 a_4^{-\alpha}$ übergehen. Ebenso geht a_1 in $S a_4^{\alpha} a_1^{-1} a_4^{-\alpha} S^{-1}$ über, wenn a_4 in $S a_4^{-1} S^{-1}$ übergeht. Da es aber

nach 2. andere Zuordnungen zu a_4 als die beiden vorstehenden nicht gibt, so haben wir das Resultat:

Alle Isomorphismen von G_{Kl} sind durch die folgenden Zuordnungen gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} a_i \rightarrow S a_i S^{-1} \\ \text{resp.} \\ a_i \rightarrow S a_i^{-1} S^{-1} \end{array}\right\} \qquad (i = 1, 4).$$

Wir erhalten daraus für a_2 und a_3 die Zuordnung:

$$a_2 \rightarrow S a_2 S^{-1}, \quad a_3 \rightarrow S a_3 S^{-1}$$

resp.

$$a_2 \rightarrow S a_3^{-1} S^{-1}, \quad a_3 \rightarrow S a_2^{-1} S^{-1}.$$

Alle kontragredienten Isomorphismen können durch einen geeigneten kogredienten Isomorphismus auf die Form gebracht werden:

$$a_1 \rightarrow a_1^{-1}, \; a_2 \rightarrow a_3^{-1}, \; a_3 \rightarrow a_2^{-1}, \; a_4 \rightarrow a_4^{-1}.$$

6. Haben wir nun die beiden Kleeblattschlingen Kl_λ und Kl_ϱ, so ist die Gruppe der Raumkurven in bezug auf Kl_λ isomorph bezogen auf die Gruppe der Raumkurven in bezug auf Kl_ϱ, wenn man den erzeugenden Kurven a_1 und a_4 links die entsprechenden Kurven rechts mit umgekehrtem Umlaufssinn zuordnet (s. Fig. 9) (indem die letzteren Kurven aus den Kurven links etwa durch Spiegelung an der Projektionsebene entstehen). a_1 ist eine Breitenkurve, a_4^3 stellt bei beiden Schlingen eine Längskurve

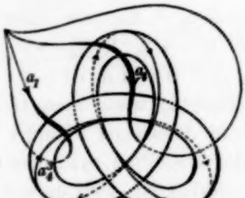


Fig. 9a.

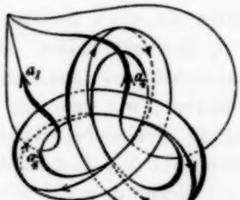


Fig. 9b.

dar (s. Fig.) (die eine geht aus der anderen etwa durch Spiegelung an der Projektionsebene hervor). Man sieht sofort, daß die durch den Umlaufssinn von a_1 und a_4^3 bei Kl_λ entstehende Indikatrix die umgekehrte ist, wie die durch den Umlaufssinn von a_1 und a_4^3 bei Kl_ϱ entstehende Indikatrix. Also kann diese Zuordnung der Kurven von Kl_λ und Kl_ϱ nicht einer stetigen Raumtransformation, bei der die beiden Knoten ineinander übergehen, entsprechen. Jede weitere mögliche Zuordnung von a_1 und a_4 zu Kurven von Kl_ϱ entspricht aber einem Isomorphismus von G_{Kl}. Wir wissen, daß alle Isomorphismen von G_{Kl} sich durch Hinzufügung eines kogredienten Isomorphismus (Transformation) auf die Identität:

$$a_1 \longrightarrow a_1,$$
$$a_4 \longrightarrow a_4$$

oder die Zuordnung

$$a_1 \longrightarrow a_1^{-1},$$
$$a_4 \longrightarrow a_4^{-1}$$

zurückführen lassen. Der ersten Zuordnung entspricht wie wir eben sahen, keine Möglichkeit der stetigen Überführung von Kl_λ in Kl_ϱ aber auch nicht der zweiten. Denn a_1^{-1} und a_4^{-3} liefern dieselbe Indikatrix wie a_1 und a_4^3.

Um nun unseren Beweis völlig zu Ende zu führen, haben wir nur noch nachzuweisen, daß Sa_1S^{-1} und $Sa_4^3S^{-1}$ als Breiten- resp. Längskurve dieselbe Indikatrix liefern wie a_1 und a_4^3. Wir können aber leicht noch mehr zeigen, nämlich, daß die Indikatrix sich nicht ändert, wenn man die Breitenkurve a_1 und die Längskurve a_4^3 jede für sich beliebig transformiert (d. i., stetig im Außenraum von Kl deformiert). In der Tat, um die Indikatrix zu bestimmen genügt es, erstens die durch a_1 und die mit bestimmtem Umlaufssinn versehene Knotenlinie etwa $\overrightarrow{Kl}$ selbst entstehende Indikatrix zu betrachten und sodann den Umlaufssinn von a_4^3 mit dem angenommenen Umlaufssinn von $\overrightarrow{Kl}$ zu vergleichen. Nun wird aber erstens durch keine stetige Deformation von a_1 im Außenraum von Kl die zu a_1 und $\overrightarrow{Kl}$ gehörige Indikatrix verändert. Zweitens aber kann man a_4^3 nicht im Außenraum von Kl stetig in eine Längskurve deformieren, die in bezug auf $\overrightarrow{Kl}$ den umgekehrten Umlaufssinn hat. Denn dieser könnten wir die Form $a_4^{-3}a_1^{12}$ geben. Es haben nämlich alle Längskurven eventuell nach einer Transformation auf der Kl umgehenden Ringfläche die Form $a_4^{\pm 3}a_1^n$. Ferner haben alle auf dieser Ringfläche ineinander transformierbaren Längskurven in bezug auf $\overrightarrow{Kl}$ denselben Umlaufssinn und $a_4^3a_1^n$ hat in bezug auf $\overrightarrow{Kl}$ den umgekehrten Umlaufssinn wie $a_4^{-3}a_1^n$. Soll aber durch Transformation im Außenraum a_4^3 in $a_4^{-3}a_1^n$ übergehen, so muß n gleich 12 sein, wie sofort aus den definierenden Relationen von G_{Kl} folgt, wenn man noch die Vertauschbarkeit aller Elemente hinzufügt. Aus

$$Ta_4^3T^{-1} = a_4^{-3}a_1^{12}$$

folgt

$$a_4^3 = a_4^{-3}a_1^{12},$$

weil ja a_4^3 mit allen Elementen vertauschbar ist. Also müßte

$$a_4^6 = a_1^{12}$$

sein, eine Relation, die, wie etwa ein Blick auf das Gruppenbild lehrt,

gewiß nicht erfüllt ist. — Es liefern also die beiden Kurven, die aus a_1 und a_4^3 durch Transformation entstehen, dieselbe Indikatrix, wie a_1 und a_4^3, womit unser Beweis erledigt ist.

III.

Wie im Anfang gesagt, soll zum Schluß noch ganz kurz ein amphicheiraler Knoten L behandelt werden, d. i. ein solcher Knoten, der in sein Spiegelbild transformierbar ist. Dieser Knoten ist in der nebenstehenden Figur dargestellt.*) Die Gruppe ergibt sich nach dem Math. Ann. 1910 entwickelten Verfahren direkt durch Betrachtung der in den vier Überkreuzungspunkten zusammenstoßenden fünf inneren Parzellen:

Erzeugende: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Relationen: $a_3 a_4^{-1} a_1 = a_1 a_2^{-1} a_3 = a_1 a_4^{-1} a_5 a_2^{-1} = a_3 a_2^{-1} a_5 a_4^{-1} = 1.$

Wir betrachten folgende Zuordnung der Erzeugenden der Gruppe G_L unseres Knotens zu anderen Elementen:

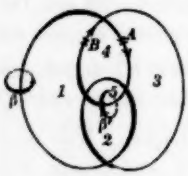


Fig. 10.

$$a_1 \longrightarrow a_2 a_5^{-1} = b_1,$$
$$a_2 \longrightarrow a_3 a_5^{-1} = b_2,$$
$$a_3 \longrightarrow a_4 a_5^{-1} = b_3,$$
$$a_4 \longrightarrow a_1 a_5^{-1} = b_4,$$
$$a_5 \longrightarrow a_5^{-1} \quad = b_5.$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Zuordnung ein Isomorphismus ist, indem in der Tat 1) sämtliche definierende Relationen für die b_i in derselben Weise gelten, wie für die a_i, 2) durch die b_i die a_i ausdrückbar sind, wie aus den obigen Relationen sofort hervorgeht.

Eine Breitenkurve β und eine Längskurve λ für L werden dargestellt durch die Elemente:

$$a_1 \text{ resp. } a_4 a_5^{-1} a_1 a_1 a_4^{-1} a_3.$$

(Für λ erkennt man das am besten, wenn man vom Punkt A in der Pfeilrichtung ausgeht). Durch den Isomorphismus gehen β und λ über in

$$a_2 a_5^{-1} \text{ resp. } a_1 a_2 a_5^{-1} a_2 a_3 a_5^{-1}.$$

Die erste Kurve stellt wieder eine Breitenkurve, β', dar, die zusammen mit den mit Umlaufssinn versehenen Knoten, $\overrightarrow{L}$, die *umgekehrte* Indikatrix bildet wie β. Die zweite Kurve stellt wieder eine Längskurve, λ', dar (wie man am besten sieht, wenn man von B aus in der Pfeilrichtung ausgeht). Da λ' in bezug auf $\overrightarrow{L}$ denselben Umlaufssinn hat wie λ, so ist

*) Er wird zur Zeit auf meine Veranlassung von einem Kieler Schüler behandelt. Es ist ihm bereits gelungen, das interessante Gruppenbild für den Knoten aufzustellen.

durch den Isomorphismus die Indikatrix (β, λ) in die umgekehrte (β', λ') übergeführt. Das entspricht der Möglichkeit, daß der Knoten amphicheiral ist. In der Tat *entspricht diesem Isomorphismus von G_L eine Transformation von L in sein Spiegelbild.* Dies sieht man leicht ein, wenn man sich L über eine Kugelfläche ausgebreitet denkt und die Außenparzelle in die Mittelparzelle 5 überführt. Dann geht L in sein Spiegelbild (etwa in bezug auf die Kugelfläche) über.

Es liegt nahe, weitere Isomorphismen von G_L aufzusuchen. Man findet einen zweiten von der Form:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_3^{-1}, \\ c_2 &= a_2^{-1}, \\ c_3 &= a_1^{-1}, \\ c_4 &= a_4^{-1}, \\ c_5 &= a_5^{-1}. \end{aligned}$$

Dieser ist auch kontragredient wie der erste. Verbinden wir diese beiden Isomorphismen, so erhalten wir, wenn wir einem kogredienten Isomorphismus stets die Identität zuordnen, eine Gruppe von acht Isomorphismen, die mit der achtgliedrigen Diedergruppe übereinstimmt. Ob aus dieser Gruppe durch Transformation alle Isomorphismen erhalten werden können bedarf einer weiteren Untersuchung.

Diese Isomorphismen haben alle die Eigenschaft die Breitenkurven und Längskurven wieder in Breiten- resp. Längskurven überzuführen. Die Untersuchung, ob dies für alle Isomorphismen von Knotengruppen der Fall ist, bildet ein wichtiges Mittel, um das allgemeine Problem der Transformierbarkeit von Knoten ineinander zu bewältigen.

Fiskelös, den 24. August 1913.

Die zwölf Nullkorrelationen des räumlichen Fünfecks.

Von

Th. Reye in Straßburg i. E.

Das Problem der zwölf Nullkorrelationen, die ein räumliches Fünfeck bestimmt, hat mich seit zwei Dezennien vielfach beschäftigt. Welche Gruppen von Transformationen werden durch zwei, drei, vier oder mehrere dieser Nullkorrelationen erzeugt? Sind sie nicht alle zwölf in einer endlichen Gruppe enthalten? Das waren meine Hauptfragen. Ihr Studium führte mich u. a. zu zehn Gruppen von je 576 Kollineationen und Korrelationen, die durch je sechs der zwölf Nullkorrelationen erzeugt werden. Sie lassen sich leicht zu zehn Gruppen von je 1152 Transformationen erweitern, und diese enthalten je zwölf Kollineationen, die das Fünfeck und eine seiner Kanten in sich überführen. Wir wollen die zwölf Nullkorrelationen und jene sie teilweise enthaltenden Gruppen hier aufstellen und die obigen Fragen beantworten.

Ein vollständiges räumliches Fünfeck hat fünf Eckpunkte, 1, 2, 3, 4, 5, von denen keine vier in einer Ebene liegen, ferner zehn Kanten, die je zwei, und zehn Ebenen, die je drei Eckpunkte verbinden. Es kann durch eine beliebige Permutation i, k, l, m, n der Eckpunkte bezeichnet werden. Jeder Kante $\overline{ik}$ liegt in ihm eine Ebene lmn gegenüber; diese schneidet die Kante in einem „Nebenpunkt $ik \cdot lmn$" des Fünfecks, einer „Kantenspur". Zwei seiner Ebenen ikl, imn, die keine Kante gemein haben, schneiden sich in einer „Nebenkante $i(kl, mn)$"; diese enthält einen Eckpunkt i und zwei Nebenpunkte $kl \cdot imn$ und $mn \cdot ikl$. Das Fünfeck hat fünfzehn Nebenkanten; durch jeden Eckpunkt gehen drei von ihnen, und in jeder Fünfeckebene liegen drei, die sich in einem Nebenpunkt schneiden. Die zwei Nebenkanten $i(kl, mn)$, $i(lm, nk)$ liegen in einer „Nebenebene $i(klmn)$" des Fünfecks; diese enthält den Eckpunkt i und zwei Paar Nebenpunkte.

Das vollständige Fünfeck ist für 120 Kollineationen invariant. Jede von ihnen führt die fünf Eckpunkte 1, 2, 3, 4, 5 in eine ihrer 120 Permu-

tationen i, k, l, m, n über. Die 120 Kollineationen bilden eine Gruppe G_{120}; von ihnen sind 20 senär, 24 quinär, 30 quaternär, 20 ternär, 15 geschart involutorisch, 10 perspektiv involutorisch und eine ist die identische Kollineation.*) Die Vertauschung von zwei Eckpunkten i, k wird durch eine perspektiv involutorische Kollineation $ik \cdot l \cdot m \cdot n$ bewirkt, welche die übrigen drei Eckpunkte l, m, n in Ruhe läßt. Die ternäre Kollineation $i \cdot k \cdot lmn$ permutiert die Eckpunkte l, m, n zyklisch und läßt die zwei übrigen i, k in Ruhe. Aus ihr und der involutorischen $ik \cdot l \cdot m \cdot n$ resultiert eine senäre Kollineation $ik \cdot lmn$ der Gruppe G_{120}. Die geschart involutorische Kollineation $ik \cdot lm \cdot n$ läßt einen Eckpunkt n in Ruhe und vertauscht die vier anderen Eckpunkte paarweise miteinander. Jede zyklische Permutation von vier oder allen fünf Eckpunkten wird durch eine quaternäre bezw. quinäre Kollineation der Gruppe G_{120} bewirkt.

In dem vollständigen Fünfeck sind zwölf einfache Fünfecke enthalten, nämlich:

$$\alpha_1 = 12345,\ \alpha_2 = 15243,\ \alpha_3 = 14235,\ \alpha_4 = 14523,\ \alpha_5 = 12453,\ \alpha_6 = 14352,$$
$$\beta_1 = 13524,\ \beta_2 = 12354,\ \beta_3 = 12543,\ \beta_4 = 15342,\ \beta_5 = 14325,\ \beta_6 = 13245.$$

Jedes von ihnen enthält die fünf Eckpunkte in bestimmter Reihenfolge, dazu die fünf Kanten und die fünf Ebenen, die je zwei bezw. je drei aufeinander folgende Eckpunkte verbinden. Das einfache Fünfeck $iklmn$ kann auch durch $klmni$ oder $inmlk$ bezeichnet werden. Von den zwei einfachen Fünfecken α_p, β_p $(p = 1, 2, \cdots, 6)$ hat jedes die fünf Diagonalen des andern zu Kanten. Je zehn Kollineationen der Gruppe G_{120} transformieren ein beliebiges der zwölf einfachen Fünfecke in eines der elf übrigen oder auch in dasselbe Fünfeck.

Bekanntlich sind die fünf Kanten eines einfachen räumlichen Fünfecks in einem linearen Strahlenkomplex enthalten; sie bestimmen ihn und die Nullkorrelation, welche die fünf Kanten und jeden Strahl des Komplexes in sich überführt. Durch die Nullkorrelation ist jedem Eckpunkte des Fünfecks die Ebene als seine „Nullebene" zugeordnet, die ihn mit den zwei benachbarten Eckpunkten verbindet.**) Unsere zwölf einfachen Fünfecke bestimmen also zwölf Nullkorrelationen,***) die wir ebenfalls mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_6, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_6$ bezeichnen. Indem wir jedem Eckpunkte seine Nullebene zuordnen, stellen wir z. B. die Nullkorrelationen α_1, β_2 dar durch:

---

*) Vgl. H. Himpel, Über die Gruppe der 120 Kollineationen, durch die ein räumliches Fünfeck in sich selbst übergeht. (Inaug. Diss.) Straßburg 1903.

**) v. Staudt, Geometrie der Lage (Nürnberg 1847), Nr. 325. Vgl. Reye, Geometrie der Lage (Stuttgart 1907), 4. Aufl., II, S. 113.

***) A. Grüttner, Das räumliche Fünfeck (Inaug. Diss., Breslau 1903), S. 17.

$$\alpha_1 = 12345 = 1\;{\scriptstyle 512} \cdot 2\;{\scriptstyle 123} \cdot 3\;{\scriptstyle 234} \cdot 4\;{\scriptstyle 345} \cdot 5\;{\scriptstyle 451},$$

$$\beta_2 = 12354 = 1\;{\scriptstyle 412} \cdot 2\;{\scriptstyle 123} \cdot 3\;{\scriptstyle 235} \cdot 4\;{\scriptstyle 541} \cdot 5\;{\scriptstyle 354}.$$

Durch Vertauschung der Eckpunkte 4 und 5 geht α_1 in β_2 und β_2 in α_1 über, ebenso durch Vertauschung von 1 mit 3; zugleich werden dadurch α_2 und β_1 miteinander vertauscht. Jede der sechs Nullkorrelationen α_p kann in eine beliebige der fünf β_q, deren Indizes q von p verschieden sind, auf zweifache Art übergeführt werden durch Vertauschung von zwei Eckpunkten.

Wie jede Nullkorrelation sind die α_p und die β_q involutorisch, d. h. mit den zu ihnen inversen α_p^{-1} bezw. β_q^{-1} identisch; sie sind binär, denn ihre zweiten Potenzen stellen die mit eins zu bezeichnende identische Kollineation dar, die jeden Punkt und jede Ebene in Ruhe läßt. Es ist:

$$\alpha_p = \alpha_p^{-1}, \quad \beta_q = \beta_q^{-1}, \quad \alpha_p^2 = 1, \quad \beta_q^2 = 1.$$

Die Nullkorrelationen α_1, β_2 sind miteinander vertauschbar, also für einander invariant, ebenso α_2, β_1; aus ihnen resultieren die geschart involutorischen Kollineationen:

$$\alpha_1\beta_2 = \beta_2\alpha_1 = 2 \cdot 45 \cdot 1\;{\scriptstyle 12\cdot 345} \cdot 3\;{\scriptstyle 23\cdot 451},$$

$$\alpha_2\beta_1 = \beta_1\alpha_2 = 2 \cdot 13 \cdot 4\;{\scriptstyle 42\cdot 513} \cdot 5\;{\scriptstyle 25\cdot 134},$$

und es ist $\beta_2^{-1}\alpha_1\beta_2 = \alpha_1$ und $\beta_2 = \alpha_1^{-1}\beta_2\alpha_1$. Wie α_1 und β_2, so sind auch α_p und β_q vertauschbar und für einander invariant, wenn p, q zwei verschiedene der Indizes $1, 2, \cdots, 6$ bezeichnen; aus α_p und β_q resultiert eine involutorische Kollineation $\alpha_p\beta_q = \beta_q\alpha_p$.*) Die zwei Nullkorrelationen α_p, β_q erzeugen eine viergliedrige Gruppe G_4, die außer ihnen die involutorische Kollineation $\alpha_p\beta_q$ und die identische $\alpha_p^2 = \beta_q^2 = 1$ enthält. Es gibt dreißig geschart involutorische Kollineationen $\alpha_p\beta_q$, die aus je zwei der zwölf Nullkorrelationen resultieren.

Durch zyklische Permutation der Eckpunkte 2, 3, 4 oder auch der Eckpunkte 5, 2, 1 geht $\alpha_1 = 12345$ über in $\alpha_2 = 13425 = 51342$, zugleich aber β_1 in β_2. Aus α_1 und α_2 bezw. aus β_2 und β_1 resultieren die ternären Kollineationen:

$$\alpha_1\alpha_2 = 1\;5\;{\scriptstyle 15\cdot 234} \cdot 3\;4\;{\scriptstyle 34\cdot 512} \cdot 2\;{\scriptstyle 13\cdot 425\;\;45\cdot 123},$$

$$\beta_2\beta_1 = 1\;4\;{\scriptstyle 14\cdot 235} \cdot 3\;5\;{\scriptstyle 35\cdot 412} \,.\, 2\;{\scriptstyle 13\cdot 524\;\;54\cdot 123}.$$

Ihre dritten Potenzen stellen die identische Kollineation dar, es ist

$$(\alpha_1\alpha_2)^3 = 1, \quad (\beta_2\beta_1)^3 = 1$$

und folglich

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1 = \alpha_2\alpha_1\alpha_2, \quad \beta_2\beta_1\beta_2 = \beta_1\beta_2\beta_1.$$

---

*) Grüttner a. a. O., S. 27—29.

Aber $\alpha_1\alpha_2\alpha_1$ oder $\alpha_1^{-1}\alpha_2\alpha_1$ ist die Nullkorrelation, in welche α_2 durch α_1 übergeführt wird. Sie und $\beta_2\beta_1\beta_2$ werden dargestellt durch:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1 = \alpha_2\alpha_1\alpha_2 = 1\ 451 \cdot 2\ 2(3451) \cdot 3\ 345 \cdot 4\ 341 \cdot 5\ 513,$$
$$\beta_2\beta_1\beta_2 = \beta_1\beta_2\beta_1 = 1\ 541 \cdot 2\ 2(3541) \cdot 3\ 354 \cdot 5\ 351 \cdot 4\ 413.$$

Aus je zweien der Nullkorrelationen α oder β resultieren sechzig ternäre Kollineationen; denn wie $\alpha_1\alpha_2$ und $\beta_2\beta_1$ sind auch $\alpha_p\alpha_q$ und $\beta_q\beta_p$ ternär. Folglich ist:

$$\alpha_p\alpha_q\alpha_p = \alpha_q\alpha_p\alpha_q \quad \text{und} \quad \beta_q\beta_p\beta_q = \beta_p\beta_q\beta_p.$$

Diese symbolischen Produkte repräsentieren die Nullkorrelationen, in welche α_q und β_p bezw. durch α_p und β_q übergeführt werden. Es gibt dreißig Nullkorrelationen, die auf solche Weise aus unseren zwölf α und β abgeleitet werden.

Die zwei Nullkorrelationen α_p, α_q erzeugen eine sechsgliedrige Gruppe G_6, diese besteht aus den drei Nullkorrelationen α_p, α_q, $\alpha_p\alpha_q\alpha_p$, den zwei ternären Kollineationen $\alpha_p\alpha_q$ und $(\alpha_p\alpha_q)^2 = \alpha_q\alpha_p$ und der identischen Kollineation $\alpha_p^2 = \alpha_q^2 = (\alpha_p\alpha_q)^3 = 1$. Ihre Korrelationen und Kollineationen transformieren eine Ebene (oder auch einen Punkt) in drei Punkte und drei Ebenen einer Geraden, die für α_p und α_q, also auch für $\alpha_p\alpha_q$, $\alpha_q\alpha_p$ und $\alpha_p\alpha_q\alpha_p$ invariant ist.

Zu je zweien erzeugen die sechs Nullkorrelationen α fünfzehn sechsgliedrige Gruppen; ebenso die sechs β. Ist p, q, r, s, t, u eine Permutation der Indizes 1, 2, 3, 4, 5, 6, so erzeugen β_r und β_s die Gruppe G_6' der sechs Transformationen:

$$\beta_r,\quad \beta_s,\quad \beta_r\beta_s\beta_r,\quad \beta_r\beta_s,\quad \beta_s\beta_r,\quad \beta_r^2 = \beta_s^2 = (\beta_r\beta_s)^3 = 1.$$

Da jede dieser Transformationen mit jeder von G_6 vertauschbar ist, so erzeugen die vier Nullkorrelationen α_p, α_q, β_r, β_s eine Gruppe G_{36}, deren 18 Kollineationen und 18 Korrelationen durch die 36 Produkte aus je einer Transformation von G_6 und je einer von G_6' dargestellt werden. Die Gruppe G_{36} besteht, wie leicht einzusehen, aus sechs Nullkorrelationen, zwölf senären Korrelationen, der identischen Kollineation, neun geschart involutorischen und acht ternären Kollineationen. Es gibt neunzig Gruppen G_{36}, die durch je vier der zwölf Nullkorrelationen erzeugt werden.

Durch Vertauschung des Eckpunktes 3 mit 5 gehen α_1, α_2 bezw. über in β_3, β_6, also $\alpha_1\alpha_2\alpha_1$ in:

$$\beta_3\beta_6\beta_3 = \beta_6\beta_3\beta_6 = 1\ 431 \cdot 2\ 2(5431) \cdot 5\ 543 \cdot 4\ 541 \cdot 3\ 315.$$

Aus $\alpha_1\alpha_2\alpha_1$ und $\beta_3\beta_6\beta_3$ aber resultiert eine der fünfzehn geschart involutorischen Kollineationen der Gruppe G_{120}, nämlich:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1\beta_3\beta_6\beta_3 = 2 \cdot 14 \cdot 35.$$

Die vierzehn übrigen lassen sich hieraus durch Permutation der fünf Eckpunkte ableiten. So ergibt sich mittels Vertauschung von 1 und 2:

$$\beta_2\beta_5\beta_3\alpha_1\alpha_4\alpha_1 = 1 \cdot 24 \cdot 35.$$

Aus diesen beiden involutorischen Kollineationen resultiert:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1\beta_3\beta_6\beta_3{}^2\beta_5\beta_3\alpha_1\alpha_4\alpha_1 = 124 \cdot 3 \cdot 5$$

oder

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_1\beta_3\beta_6\beta_5\beta_3 = 124 \cdot 3 \cdot 5,$$

eine der zehn ternären Kollineationen der Gruppe G_{120}.

Zu jeder Kante $\overline{ik}$ des vollständigen Fünfecks gehören drei der sechs einfachen Fünfecke α_p, nämlich die drei, von denen $\overline{ik}$ eine Diagonale, nicht eine Kante ist. So gehören zu $\overline{12}$ die einfachen Fünfecke α_2, α_3, α_4. Die drei mit ihnen gleichnamigen Nullkorrelationen stehen zueinander und zu $\overline{ik}$ in besonderen Beziehungen, sie bilden „ein der Kante zugeordnetes Tripel". Das Gleiche gilt von dreien der Nullkorrelationen β. Die Zuordnung der Tripel zu den einzelnen Kanten ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

$\overline{12}$,	$\overline{13}$,	$\overline{14}$,	$\overline{15}$,	$\overline{23}$,	$\overline{24}$,	$\overline{25}$,	$\overline{34}$,	$\overline{35}$,	$\overline{45}$,
$\alpha_2\alpha_3\alpha_4$,	$\alpha_1\alpha_3\alpha_6$,	$\alpha_1\alpha_2\alpha_5$,	$\alpha_4\alpha_5\alpha_6$,	$\alpha_2\alpha_5\alpha_6$,	$\alpha_1\alpha_4\alpha_6$,	$\alpha_1\alpha_3\alpha_5$,	$\alpha_3\alpha_4\alpha_5$,	$\alpha_1\alpha_2\alpha_4$,	$\alpha_2\alpha_3\alpha_6$,
$\beta_5\beta_1\beta_6$,	$\beta_2\beta_4\beta_5$,	$\beta_6\beta_3\beta_4$,	$\beta_2\beta_1\beta_3$,	$\beta_4\beta_3\beta_1$,	$\beta_5\beta_3\beta_2$,	$\beta_4\beta_2\beta_6$,	$\beta_6\beta_1\beta_2$,	$\beta_3\beta_6\beta_5$,	$\beta_1\beta_5\beta_4$.

Der Kante $\overline{45}$ sind hiernach die Tripel $\alpha_2\alpha_3\alpha_6$ und $\beta_1\beta_5\beta_4$ zugeordnet, der Kante $\overline{35}$ die Tripel $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ und $\beta_3\beta_6\beta_5$. Durch Vertauschung der Eckpunkte 3, 5 gehen die letzteren zwei Tripel ineinander über.

Die zehn Tripel der α gehen in die der β über, wenn zwei Eckpunkte des Fünfecks miteinander vertauscht werden. Sie und die zugehörigen Fünfeckkanten gehen teils ineinander und teils in sich selbst über, wenn zwei Paar Eckpunkte miteinander vertauscht, oder wenn drei oder alle fünf Eckpunkte zyklisch permutiert werden. Jedes der zwanzig Tripel läßt sich durch Permutation der fünf Eckpunkte in jedes andere überführen. Deshalb läßt sich alles, was wir von einem der Tripel nachweisen werden, auf alle übrigen übertragen.

Die Nullkorrelationen α_1, α_2, α_4 bilden ein der Kante $\overline{35}$ zugeordnetes Tripel. Durch α_1 wird α_2, wie schon bemerkt, in die Nullkorrelation:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1 = \alpha_2\alpha_1\alpha_2 = 1\ {\scriptstyle 451} \cdot 2\ {\scriptstyle 2(3451)} \cdot 3\ {\scriptstyle 345} \cdot 4\ {\scriptstyle 341} \cdot 5\ {\scriptstyle 513}$$

übergeführt. Aus dieser und der Nullkorrelation:

$$\alpha_4 = 14523 = 1\ {\scriptstyle 314} \cdot 2\ {\scriptstyle 523} \cdot 3\ {\scriptstyle 231} \cdot 4\ {\scriptstyle 145} \cdot 5\ {\scriptstyle 452}$$

resultiert die involutorische Kollineation:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_4 = 14 \cdot 3\ {\scriptstyle 45 \cdot 123} \cdot 5\ {\scriptstyle 13 \cdot 452} \cdot 2\ {\scriptstyle 35 \cdot 2(3451)}.$$

Sie ist mit der zu ihr inversen $\alpha_4\alpha_1\alpha_2\alpha_1$ identisch, und $\alpha_1\alpha_2\alpha_1$ ist also mit α_4 vertauschbar. Aber aus:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_4 = \alpha_4\alpha_1\alpha_2\alpha_1 \quad \text{oder} \quad \alpha_2\alpha_1\alpha_2\alpha_4 = \alpha_4\alpha_2\alpha_1\alpha_2$$

folgt durch zweimalige Multiplikation mit α_1 bezw. α_2 wegen $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$:

$$\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_1 = \alpha_1\alpha_4\alpha_1\alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_2 = \alpha_2\alpha_4\alpha_2\alpha_1.$$

Jede der drei Nullkorrelationen des Tripels $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ ist demnach vertauschbar mit der Nullkorrelation, in welche eine der zwei übrigen die dritte überführt; aus ihr und dieser Nullkorrelation resultiert eine involutorische Kollineation.

Multiplizieren wir die beiden Seiten der Gleichung:

$$\alpha_2\alpha_1\alpha_2\alpha_4 = \alpha_4\alpha_1\alpha_2\alpha_1$$

vorne mit α_2 und hinten mit α_1, so ergibt sich:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_1 = \alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_2.$$

Aus $\alpha_4\alpha_2\alpha_4\alpha_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_2$ folgt ebenso:

$$\alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_2 = \alpha_4\alpha_1\alpha_2\alpha_4.$$

Die Kollineation $\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_1$, in welche $\alpha_2\alpha_4$ durch α_1 übergeführt wird, ist also mit $\alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_4\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ identisch; sie ist wie $\alpha_2\alpha_4$ ternär. Die zu ihr inverse ternäre Kollineation ist:

$$\alpha_1\alpha_4\alpha_2\alpha_1 = \alpha_4\alpha_2\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_2$$

und wird dargestellt durch:

$$\alpha_4\alpha_2\alpha_1\alpha_4 = 351\ 352\ 354 \cdot 145\ 123\ 1(4523) \cdot 425\ 413\ 4(2513).$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_1 = \alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_2$$

hinten mit α_2 und α_4, so ergibt sich:

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^2 = \alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_4.$$

Da $\alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_4$ eine involutorische Kollineation ist, so ist die vierte Potenz von $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ die identische Kollineation, und $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ selbst ist eine quaternäre Korrelation. In der Tat ergibt sich für $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ die Darstellung:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_4 = 1\ 245\ 35'1(2345)\ 234 \cdot 2\ 135\ 4'\ 1(2345) \cdot$$
$$\cdot\, 3\ 541\ 25'341\ 2(3451) \cdot 5\ 4(1325)\ 34'512\ 123.$$

Wie $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ und $\alpha_4\alpha_2\alpha_1$ sind auch $\alpha_1\alpha_4\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_4\alpha_1$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_4$ und $\alpha_4\alpha_1\alpha_2$ quaternäre Korrelationen, denn die Kollineationen:

$$(\alpha_1\alpha_4\alpha_2)^2 = (\alpha_2\alpha_4\alpha_1)^2 = \alpha_4\alpha_2\alpha_1\alpha_2 \quad \text{und} \quad (\alpha_2\alpha_1\alpha_4)^2 = (\alpha_4\alpha_1\alpha_2)^2 = \alpha_1\alpha_4\alpha_2\alpha_4$$

sind involutorisch.

Nunmehr ist leicht zu beweisen, daß die drei Nullkorrelationen des der Kante $\overline{35}$ zugeordneten Tripels $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ eine Gruppe G_{24} von zwölf Kolli-

neationen und zwölf Korrelationen erzeugen. Diese Gruppe G_{24} besteht aus sechs quaternären Korrelationen:

$$\alpha_p\alpha_q\alpha_r, \text{ den Permutationen von } \alpha_1\alpha_2\alpha_4,$$

sechs Nullkorrelationen:

$$\alpha_p \text{ und } \alpha_p\alpha_q\alpha_p = \alpha_q\alpha_p\alpha_q,$$

drei involutorischen Kollineationen:

$$\alpha_p\alpha_q\alpha_p\alpha_r = \alpha_r\alpha_p\alpha_q\alpha_p,$$

acht ternären Kollineationen:

$$\alpha_p\alpha_q \text{ und } \alpha_r\alpha_p\alpha_q\alpha_r = \alpha_p\alpha_q\alpha_r\alpha_p = \alpha_q\alpha_r\alpha_p\alpha_q$$

und der identischen Kollineation:

$$\alpha_p^2 = (\alpha_p\alpha_q)^3 = (\alpha_p\alpha_q\alpha_r)^4 = (\alpha_p\alpha_q\alpha_p\alpha_r)^2 = (\alpha_p\alpha_q\alpha_r\alpha_p)^3 = 1.$$

Mittels dieser und der Gleichungen:

$$(\alpha_p\alpha_q\alpha_r)^2 = (\alpha_r\alpha_q\alpha_p)^2 = \alpha_q\alpha_r\alpha_p\alpha_r$$

läßt sich die Resultierende von zwei beliebigen der 24 Transformationen auf eine der 24 zurückführen und mit ihr identifizieren. Beispielsweise ist:

$$\alpha_r\alpha_p\alpha_r\alpha_q\alpha_r = \alpha_p\alpha_r\alpha_p\alpha_q\alpha_r = \alpha_p\alpha_p\alpha_q\alpha_r\alpha_p = \alpha_q\alpha_r\alpha_p.$$

Die Korrelationen und Kollineationen der Gruppe G_{24} transformieren eine Ebene η' in die zwölf Punkte P und die zwölf Ebenen η einer Konfiguration, die für alle Transformationen $\tau_1, \tau_2, \cdots$ der Gruppe invariant ist. Wenn nämlich η' durch τ_1 in η_1 übergeht, η_1 aber durch τ_2 in $\eta_{1,2}$, so wird η' durch $\tau_1\tau_2$ in $\eta_{1,2}$ übergeführt; weil aber auch die Transformation $\tau_1\tau_2$ in G_{24} enthalten ist, so ist $\eta_{1,2}$ ebenso wie η_1 ein Element der Konfiguration. In jeder Ebene η der Konfiguration liegen sechs der zwölf Punkte P, und zwar zu dreien auf vier Geraden g, deren Schnittpunkte sie sind. Diese sechs P sind der Ebene η zugeordnet durch die sechs Nullkorrelationen:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_4, \quad \alpha_2\alpha_4\alpha_2, \quad \alpha_4\alpha_1\alpha_4, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_1;$$

die drei Nullkorrelationen α_1, α_2, $\alpha_1\alpha_2\alpha_1$ aber ordnen der Ebene η drei Punkte einer Geraden g zu, die für α_1 und α_2 und folglich auch für $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_1\alpha_2\alpha_1$ invariant ist; dasselbe gilt von α_2, α_4, $\alpha_2\alpha_4\alpha_2$, von α_4, α_1, $\alpha_4\alpha_1\alpha_4$ und von $\alpha_2\alpha_4\alpha_2$, $\alpha_4\alpha_1\alpha_4$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_1$. Analog gehen durch jeden Punkt P der Konfiguration sechs ihrer zwölf Ebenen η, und zwar schneiden sie sich zu dreien in vier Geraden g, deren Verbindungsebenen sie sind. Die Konfiguration ist demnach die bekannte Hexaederkonfiguration $(12_6, 16_3)$, deren sechzehn Gerade g mit je drei ihrer zwölf Punkte P und je drei ihrer zwölf Ebenen η inzident sind.*)

*) Vgl. Reye, Die Hexaeder- und die Oktaederkonfigurationen $(12_6, 16_3)$ in Acta Math. 1 (1882), S. 97—108.

So z. B. ist eine dieser ∞^3 Konfigurationen $(12_6, 16_3)$ durch die Fünfeckebene 345 bestimmt. Sie enthält die zwölf Punkte P:

$$4,\ 34\cdot125,\ 45\cdot123;\ 35\cdot1(2345),\ 5,\ 3;\ 23\cdot145,\ 25\cdot134,\ 2,\ 13\cdot245,\ 1,\ 15\cdot234$$

und die zwölf Ebenen η:

$$125,\ 135,\ 134;\ 123,\ 1(2345),\ 145;\ 2(3451),\ 345,\ 245,\ 235,\ 4(1325),\ 234.$$

Von diesen Ebenen gehen die ersten sechs durch den Eckpunkt 1, sie schneiden sich zu dreien in den vier Geraden:

$$\overline{15},\ \overline{13},\ 1(34, 52),\ 1(23, 45).$$

Von jenen zwölf Punkten liegen die ersten sechs in der Ebene 345 und zu dreien auf den vier Geraden:

$$\overline{34},\ [345,\ 1(2345)],\ \overline{45},\ \overline{53}.$$

Diese Konfiguration ist nicht nur für alle Transformationen unserer Gruppe G_{24}, sondern auch für die perspektiv involutorische Kollineation

$$\varphi = 35 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$$

invariant; denn durch Vertauschung der Eckpunkte 3, 5 gehen ihre Punkte und Ebenen teils in sich selbst, teils ineinander über.

Die zwanzig je einer Fünfeckkante zugeordneten Tripel von Nullkorrelationen erzeugen zwanzig mit G_{24} gleichartige Gruppen von je zwölf Kollineationen und zwölf Korrelationen. Durch Permutationen der fünf Eckpunkte kann jede dieser Gruppen in jede andere übergeführt werden. Der Kante $\overline{35}$ ist zugleich mit $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ das Tripel $\beta_3\beta_6\beta_5$ zugeordnet, und seine drei Nullkorrelationen sind mit α_1, α_2 und α_4 vertauschbar. Von den Transformationen B der durch β_3, β_6 und β_5 erzeugten Gruppe G'_{24} ist daher jede mit allen Transformationen A der durch α_1, α_2 und α_4 erzeugten Gruppe G_{24} vertauschbar. Die 576 Transformationen von der Form $\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$ bilden folglich eine Gruppe G_{576}, und diese wird durch die sechs Nullkorrelationen α_1, α_2, α_4, β_3, β_6, β_5 erzeugt.

Die Gruppe G'_{24} besteht ebenso wie G_{24} aus sechs quaternären und sechs binären (oder Null-)Korrelationen, aus acht ternären und drei binären (involutorischen) Kollineationen und der identischen Kollineation. Eine Transformation AB der Gruppe G_{576} ist nur dann eine Korrelation, wenn eine ihrer Komponenten A, B eine Korrelation, die andere eine Kollineation ist; in jedem anderen Falle ist sie eine Kollineation. Wegen $\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$ wird $(\mathsf{AB})^n = \mathsf{A}^n\mathsf{B}^n$. Deshalb ist AB vom n^{ten} Grade, wenn beide Komponenten A, B vom n^{ten} Grade sind, oder wenn die eine n^{ten} Grades, die andere die identische Kollineation ist. Ist eine der Komponenten quaternär (vierten Grades), die andere binär, so ist AB quaternär. Ist endlich eine der Komponenten A, B ternär, die andere binär oder quaternär, so ist AB vom sechsten bzw. zwölften Grade.

Die durch α_1, α_2, α_4, β_3, β_6, β_5 erzeugte Gruppe G_{576} besteht demnach aus 288 Korrelationen und 288 Kollineationen. Von ihren Korrelationen sind 48 binär (darunter zwölf Nullkorrelationen), 48 quaternär, 96 senär und 96 zwölften Grades; von ihren 288 Kollineationen sind 51 binär, 80 ternär, 108 quaternär, 48 senär und eine ist die identische. Die 288 Kollineationen bilden eine ausgezeichnete Untergruppe von G_{576}. Sechs von ihnen, nämlich die identische Kollineation, die drei geschart involutorischen:

$$\alpha_1\alpha_4\alpha_1\beta_3\beta_5\beta_3 = 1 \cdot 24 \cdot 35, \quad 2 \cdot 14 \cdot 35, \quad 4 \cdot 12 \cdot 35$$

und die zwei ternären:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_1\beta_3\beta_6\beta_5\beta_3 = 124 \cdot 3 \cdot 5 \text{ und } 142 \cdot 3 \cdot 5,$$

führen das vollständige Fünfeck und seine Kante $\overline{35}$ in sich über.

Dasselbe bewirkt die perspektiv involutorische Kollineation:

$$\varphi = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 35.$$

Sie vertauscht die Eckpunkte 3 und 5 miteinander und die Nullkorrelationen α_1, α_2, α_4 bzw. mit β_3, β_6, β_5. Es ist also:

$$\alpha_1\varphi = \varphi\beta_3, \quad \alpha_2\varphi = \varphi\beta_6, \quad \alpha_4\varphi = \varphi\beta_5,$$
$$\beta_3\varphi = \varphi\alpha_1, \quad \beta_6\varphi = \varphi\alpha_2, \quad \beta_5\varphi = \varphi\alpha_4.$$

Durch φ wird folglich jede Transformation der durch α_1, α_2, α_4 erzeugten Gruppe G_{24} mit einer von G'_{24} vertauscht; die durch α_1, α_2, α_4, β_3, β_6, β_5 erzeugte Gruppe G_{576} geht deshalb durch φ in sich selbst über, und mit φ erzeugen die sechs Nullkorrelationen eine Gruppe G_{1152}. Diese besteht aus den 576 Transformationen der G_{576} und deren 576 Produkten mit φ. Sie enthält unter anderen die senäre Kollineation:

$$\psi = 124 \cdot 35,$$

die aus φ und der ternären Kollineation $124 \cdot 3 \cdot 5$ resultiert, überhaupt aber die zwölf Kollineationen, die das Fünfeck und seine Kante $\overline{35}$ in sich überführen. In G_{1152} gibt es auch oktenäre Korrelationen. So ist die Korrelation

$$\alpha_1\alpha_2\beta_5\varphi = \varphi\beta_3\beta_6\alpha_4$$

achten Grades, weil ihre zweite Potenz:

$$(\alpha_1\alpha_2\beta_5\varphi)^2 = \alpha_1\alpha_2\beta_5\varphi\varphi\beta_3\beta_6\alpha_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_4\beta_5\beta_3\beta_6$$

quaternär ist.

Die Gruppe G_{1152} besteht aus 576 Kollineationen und 576 Korrelationen. Sie läßt sich nicht nur durch α_1, α_2, α_4 und φ, sondern auch durch α_1 und die senäre Kollineation $\psi = 124 \cdot 35$ erzeugen. Denn zunächst ist:

$$\psi^2 = 142 \cdot 3 \cdot 5, \quad \psi^4 = 124 \cdot 3 \cdot 5, \quad \psi^3 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 35 = \varphi.$$

Durch ψ^4 und ψ^2 wird α_1 in α_2 und α_4 übergeführt, durch $\varphi = \psi^3$ aber

gehen α_1, α_2, α_4 bzw. in β_3, β_6, β_5 über. Die durch α_1 und ψ erzeugte Gruppe enthält also die sieben Transformationen α_1, α_2, α_4, β_3, β_6, β_5, φ und ist folglich mit G_{1152} identisch.

Die Korrelationen und Kollineationen der durch α_1, α_2 und α_4 erzeugten Gruppe G_{24} transformieren, wie schon bemerkt, die Fünfeckebene 345 in die zwölf Punkte und die zwölf Ebenen einer Konfiguration $(12_6, 16_3)$, die für α_1, α_2, α_4 und zugleich für die involutorische Kollineation $\varphi = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 35$ invariant ist (S. 421). Diese Konfiguration ist folglich auch invariant für alle Transformationen der durch α_1, α_2, α_4 und φ erzeugten Gruppe G_{1152}. Demnach besteht G_{1152} aus den 576 Kollineationen und den 576 Korrelationen, die die Konfiguration $(12_6, 16_3)$ in sich selbst überführen.*)

Es gibt zehn mit G_{576} gleichartige Gruppen von je 288 Kollineationen und 288 Korrelationen, die erzeugt werden durch die sechs Nullkorrelationen je zweier, einer Fünfeckkante $\overline{ik}$ zugeordneter Tripel $\alpha_p\alpha_q\alpha_r$, $\beta_s\beta_t\beta_u$. Jede von ihnen wird zu einer Gruppe G_{1152} erweitert durch die perspektive involutorische Kollineation $ik \cdot l \cdot m \cdot n$, die die Eckpunkte i, k der zugehörigen Kante miteinander vertauscht und die übrigen drei Eckpunkte l, m, n in Ruhe läßt. Diese G_{1152} enthält u. a. die zwölf Kollineationen, die das Fünfeck und die Kante $\overline{ik}$ in sich überführen. Von den zehn Gruppen G_{1152} läßt sich jede durch eine α_p ihrer Nullkorrelationen und eine senäre Kollineation $ik \cdot lmn$ erzeugen.

Drei der sechs Nullkorrelationen α_p, die in keinem der zehn den Fünfeckkanten zugeordneten Tripel enthalten sind, haben allemal eine Kante zum gemeinsamen Nullstrahl. So lassen die drei Nullkorrelationen:

$$\alpha_1 = 12345, \quad \alpha_2 = 15243, \quad \alpha_3 = 14235$$

die Kante $\overline{15}$ in Ruhe. Es fragt sich, ob auch diese drei eine endliche Gruppe erzeugen, ob insbesondere ihre Resultierende $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ eine zyklische Korrelation ist. Sie resultiert aus:

$$\alpha_1\alpha_2 = 1\ \ 5\ \ {\scriptstyle 15\cdot234} \cdot 3\ \ 4\ \ {\scriptstyle 34\cdot512} \cdot 2\ \ {\scriptstyle 13\cdot245}\ \ {\scriptstyle 45\cdot123}$$

und

$$\alpha_3 = 1\ \ {\scriptstyle 514} \cdot 2\ \ {\scriptstyle 423} \cdot 3\ \ {\scriptstyle 235} \cdot 4\ \ {\scriptstyle 142} \cdot 5\ \ {\scriptstyle 351};$$

es ergibt sich:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1\ \ {\scriptstyle 513} \cdot 5\ \ {\scriptstyle 512} \cdot {\scriptstyle 15\cdot234}\ \ {\scriptstyle 514} \cdot {\scriptstyle 345}\ \ 2\ \ {\scriptstyle 5(1423)} \cdots.$$

Ihre zweite Potenz, die Kollineation $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2$, läßt folglich die Punkte 1, 5, 15·234 und die Ebenen 513, 512, 514 und damit alle Punkte und alle Ebenen der Geraden $\overline{51}$ in Ruhe. Unter den zyklischen Raumkollineationen

*) Vgl. Reye in Acta Math. 1, S. 101. Herr Feder hat diese Gruppe G_{1152} in den Math. Ann. 47, S. 375—407 eingehend erörtert und zu einer G_{2304} erweitert.

aber sind die geschart involutorischen die einzigen, die alle Elemente gerader Linien, nämlich der Involutionsachsen, in Ruhe lassen. Nur dann also ist die Kollineation $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2$ zyklisch, wenn sie involutorisch ist.

Nun wird aber durch die Korrelation $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ jede der Geraden:

$$\overline{51\cdot 234\ \ 12\cdot 345},\ \overline{45},\ 2(34,51),\ 5(23,14),\ \overline{51\cdot 234\ \ 52\cdot 134}$$

in die nächstfolgende transformiert. Die Kollineationen $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2$ und $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{-2}$ transformieren also die Gerade $2(34,51)$ bzw. in $\overline{51\cdot 234\ \ 52\cdot 134}$ und $\overline{51\cdot 234\ \ 12\cdot 345}$, und da diese zwei Geraden nicht zusammenfallen, so ist die Kollineation $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2$ von der inversen $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{-2}$ verschieden, also nicht involutorisch, sie und die Korrelation $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ sind nicht zyklisch.

Die zwölf Nullkorrelationen des räumlichen Fünfecks erzeugen demnach keine endliche Gruppe, sie sind in keiner endlichen Gruppe von Transformationen enthalten.

Auch keine vier der sechs Nullkorrelationen α_p sind in einer endlichen Gruppe enthalten; denn zwei der vier von ihnen gebildeten Tripel sind keiner Fünfeckkante zugeordnet, und von ihnen gilt dasselbe wie von α_1, α_2, α_3.

Straßburg, den 3. November 1913.

Über Flächen mit einer Schar von kongruenten und geschlossenen geodätischen Linien.

Von

P. Funk in Prag.

Hazzidakis hat allgemein das Problem der Aufstellung sämtlicher Flächen mit einer Schar kongruenter geodätischer Linien gelöst, ohne jedoch auf den Spezialfall, daß die geodätischen Linien geschlossen sind, genauer einzugehen.*)

Zoll hat in seiner Göttinger Dissertation als Beispiele von Flächen mit dieser Eigenschaft Rotationsflächen und Schraubenflächen behandelt und hat ferner bewiesen, daß die einzigen Flächen mit einer Schar ebener kongruenter geodätischer Linien solche sind, die dadurch entstehen, daß die Ebene einer beliebigen ebenen Kurve auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche gleitungslos abrollt. Er nennt sie Kanalflächen, was jedoch nicht üblich ist.**)

Hier soll bewiesen werden: Rotationsflächen und Schraubenflächen sind die einzigen Flächen, auf denen eine Schar kongruenter geschlossener Raumkurven doppelter Krümmung geodätische Linien sind. Bedienen wir uns einer kinematischen Deutung, so lautet der zu beweisende Satz: Wenn sich eine geschlossene Raumkurve doppelter Krümmung so bewegen kann, daß sie auf der beschriebenen Fläche geodätische Linie ist, so ist die Bewegung durch die Gestalt der Kurve eindeutig bestimmt.***)

Die Art der Bewegung müßte entweder eine Schraubung oder eine Rotation sein, eine Translation ist ausgeschlossen; denn auf einer zylindrischen Fläche sind die geschlossenen geodätischen Linien ebene Kurven. Nehmen wir nun an, es gäbe eine geschlossene Raumkurve doppelter Krümmung, die auf mehr als eine Art so bewegt werden könnte, daß sie auf der entstehenden Fläche geodätische Linie ist. Wenn man sich auf analytische Flächen beschränkt, so müßte sich die Ganghöhe der infinitesimalen Schraubung jedenfalls stetig mit der Zeit ändern (bzw. konstant bleiben). Es wäre demnach entweder der Wert der Ganghöhe in zwei ver-

*) J. f. Math. 95, S. 190. **) Zoll, Diss. Göttingen. Math. Ann. 57, S. 108.

***) Der im Anhang meiner Dissertation (Göttingen 1911) hierfür gegebene Beweis ist nicht richtig, worauf mich Herr W. Blaschke in liebenswürdiger Weise aufmerksam machte. Auch verwende ich dort die Bezeichnung Kanalflächen im selben Sinne wie Zoll.

schiedenen Zeitpunkten von Null verschieden oder er wäre beständig Null, d. h. die Bewegung bestände aus lauter infinitesimalen Rotationen.

Somit sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Bewegung bestehe aus infinitesimalen Schraubungen, wobei also die Ganghöhe im allgemeinen von Null verschieden ist. Der Kurve müßte sich dann ein ganzes System von Geraden als Schraubenachsen zuordnen lassen, sodaß bei Ausführung der Schraubung die Kurve auf der entstehenden Schraubenfläche geodätische Linie ist. Eine Gerade dieses Systems von Schraubenachsen sei die z-Achse; dann müßte, da auf Schraubenflächen, wie in der Zollschen Dissertation bewiesen wurde, die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien die einzigen geschlossenen geodätischen Linien sind, die Differentialgleichung

$$x\,dy - y\,dx = h\,dz \tag{1}$$

erfüllt sein. Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar, daß bei gegebener Gestalt der Kurve und bei festgelegter Lage zur Schraubenachse die Ganghöhe eindeutig bestimmt ist. Für irgend eine andere Gerade des Systems der Schraubenachsen erhielte man:

$$\bar{x}\,d\bar{y} - \bar{y}\,d\bar{x} = \bar{h}\,d\bar{z},$$

wobei $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ mit xyz durch die Formeln der gewöhnlichen Koordinatentransformation verbunden sein sollen. Unsere Raumkurve müßte diesen beiden Differentialgleichungen genügen. Die einzigen Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen sind aber Gerade. Jeder dieser beiden Differentialgleichungen entspricht nämlich ein Nullsystem, und die gemeinsamen Elemente dieser beiden Nullsysteme, also die Geraden einer linearen Kongruenz, sind die einzigen Lösungen unserer Differentialgleichungen. Somit ergibt sich

Satz I: *Ein und dieselbe geschlossene Raumkurve mit doppelter Krümmung kann nicht zugleich auf zwei verschiedenen Schraubenflächen geodätische Linie sein.*

2. Angenommen, die Bewegung bestände aus lauter infinitesimalen Rotationen. Es müßte sich dann der Kurve ein System von Rotationsachsen zuordnen lassen, sodaß sie auf den entsprechenden Rotationsflächen geodätische Linie ist. Die Hauptnormalen der Kurve müßten jede der Rotationsachsen schneiden. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß durch

$$\begin{matrix} x = A \\ y = Bz \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x = -A \\ y = -Bz \end{matrix}$$

zwei der Rotationsachsen des Systems dargestellt sind. (Wir dürfen annehmen $A \neq 0$, $B \neq 0$, d. h. die Rotationsachsen seien windschief; wäre dies nämlich nicht der Fall, so lägen entweder alle Hauptnormalen in der durch die beiden Rotationsachsen gehenden Ebene oder alle Haupt-

normalen gingen durch den Schnittpunkt der beiden Rotationsachsen. In beiden Fällen wäre die Kurve eine ebene; im zweiten speziell ein Kreis.) Die Bedingung, daß die Hauptnormalen der Kurve durch diese beiden Geraden hindurchgehen, drückt sich durch die beiden Differentialgleichungen aus:

$$(xy'' - yx'') - B(xz'' - zx'') - Ay'' + ABz'' = 0, \tag{2}$$

$$(xy'' - yx'') + B(xz'' - zx'') + Ay'' + ABz'' = 0, \tag{3}$$

wobei die Striche Differentiationen nach der Bogenlänge bedeuten. Durch Addition und Subtraktion erhält man

$$xy'' - yx'' + ABz'' = 0,$$

$$xz'' - zx'' + \frac{A}{B} z'' \quad = 0.$$

Diese beiden zuletzt angeschriebenen Differentialgleichungen sagen aus: Die gesuchte Raumkurve ist zugleich geodätische Linie sowohl auf einer Schraubenfläche mit der X-Achse als auch auf einer mit der Y-Achse als Schraubenachse. Somit kann diese Kurve nach Satz I keine geschlossene sein. Es ergibt sich somit:

Satz II: *Ein und dieselbe geschlossene Raumkurve doppelter Krümmung kann nicht auf zwei verschiedenen Rotationsflächen geodätische Linie sein.*

Will man auch nicht-analytische Flächen berücksichtigen, so ist noch folgender Satz zu beweisen:

Satz III: *Ein und dieselbe geschlossene Raumkurve doppelter Krümmung kann nicht zugleich auf einer Rotationsfläche und auf einer Schraubenfläche geodätische Linie sein.*

Der Beweis dieses Satzes kann ebenso wie bei Satz II geführt werden. Sei die Z-Achse die Schraubenachse, und die Gerade $x = A$, $y = Bz$ sei die Rotationsachse. Dann folgt, wenn man Gleichung (1) differenziert und von Gleichung (2) subtrahiert, wenn $B \neq 0$:

$$z\left(x - A - \frac{h}{B}\right)'' - \left(x - A - \frac{h}{B}\right) z'' = \frac{A}{B} y''. \tag{4}$$

Wenn $A \neq 0$ entnehmen wir hieraus: Die Kurve ist nicht nur geodätische Linie auf einer Schraubenfläche mit der Z-Achse als Schraubenachse, sondern sie ist auch geodätische Linie auf einer Schraubenfläche mit der Geraden $x = A + \frac{h}{B}$ als Schraubenachse. Somit kann nach Satz I die Kurve keine geschlossene Raumkurve von doppelter Krümmung sein. Im Fall $A = 0$ können wir diesen Schluß in ähnlicher Weise aus Satz II ziehen.

Im Fall $B = 0$ erhalten wir statt (4):

$$Ay'' + hz'' = 0. \tag{4*}$$

Da y und z periodische Funktionen der Bogenlänge sein müssen, folgt:

$$Ay + hz = C,$$

d. h. die Kurve wäre eine ebene.

Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen.

Von

F. Hausdorff in Greifswald.

Bekanntlich haben E. Borel und H. Lebesgue das Problem der Inhaltsbestimmung von Punktmengen wenigstens eine Strecke weit *axiomatisch* zu behandeln versucht. Es soll jeder beschränkten Menge A des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n als Inhalt eine nichtnegative Zahl $f(A)$ unter folgenden Bedingungen zugeordnet werden:

(α) Der Einheitswürfel hat den Inhalt 1.

(β) Kongruente Mengen haben denselben Inhalt.

(γ) Es ist $f(A+B) = f(A) + f(B)$.

(δ) Es ist $f(A+B+C+\cdots) = f(A) + f(B) + f(C) + \cdots$ für eine beschränkte Summe von abzählbar vielen Summanden.*)

Die von Lebesgue gegebene *konstruktive* Inhaltsdefinition erfüllt zwar diese vier Forderungen, aber sie ordnet nicht allen (beschränkten) Mengen, sondern nur den „meßbaren" Inhalte zu. Das erste Beispiel einer im Lebesgueschen Sinne nicht meßbaren Menge stammt von G. Vitali**); übrigens hat das System der unmeßbaren Mengen dieselbe Mächtigkeit wie das der meßbaren und das aller Mengen. Die Frage bleibt also offen, ob das durch die Forderungen (α) bis (δ) gestellte Inhaltsproblem, *in der Ausdehnung auf alle beschränkten Mengen*, überhaupt lösbar ist oder nicht.

Man bemerkt sofort, daß eine Lösung des Inhaltsproblems für den E_{n+1} auch eine für den E_n liefern würde (indem man einer n-dimensionalen Menge A_n den $(n+1)$-dimensionalen zylindrischen Körper A_{n+1} mit der Basis A_n und der Höhe 1 zuordnet und $f_n(A_n) = f_{n+1}(A_{n+1})$ setzt);

*) Vgl. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration (Paris 1904), S. 103. Wir bezeichnen eine Summe von Mengen nur dann mit $A+B+\cdots$, wenn diese Mengen paarweise keinen Punkt gemein haben.

**) A. Schoenflies, Entwickelung der Mengenlehre (Leipzig und Berlin 1913), S. 374, wo außer weiteren Beispielen von E. B. van Vleck und Lebesgue auch das im Text folgende von mir mitgeteilt ist.

ebenso auch eine für den n-dimensionalen sphärischen Raum K_n, wobei die Bedingung (α) durch die zu ersetzen ist, daß K_n selber einen positiven Inhalt, etwa 1, haben soll; endlich sind die Inhaltsbestimmungen für die gerade Linie E_1 und den Kreis K_1 identische Probleme.

Wir zeigen zuerst, daß unter den Forderungen (α) bis (δ) eine Inhaltsbestimmung keinesfalls möglich ist; nach dem eben Bemerkten genügt es, dies für den Kreis nachzuweisen. Zu diesem Zweck spalten wir die Kreisperipherie K in *abzählbar viele kongruente* Mengen. Nehmen wir den Radius $= \frac{1}{2\pi}$, also $f(K) = 1$, stellen die Punkte des Kreises durch eine reelle Variable x dar, so daß zwei Werten mit ganzzahliger Differenz derselbe Kreispunkt entspricht, und verstehen unter δ eine irrationale Zahl, so gehört zu jedem Punkt x eine abzählbare Menge

$$P_x = \{\cdots, x - 2\delta, x - \delta, x, x + \delta, x + 2\delta, \cdots\};$$

und zwei Mengen P_x, P_y haben, wenn sie nicht identisch sind, keinen Punkt gemein. Wählen wir jetzt aus jeder Menge P_x genau einen Punkt x aus, so entsteht eine Menge

$$A_0 = \{x, y, z, \cdots\},$$

die durch Drehung um ein beliebiges Vielfaches $m\delta$ von δ in die Menge

$$A_m = \{x + m\delta, y + m\delta, z + m\delta, \cdots\}$$

übergeht; zwei solche Mengen mit verschiedenem Index haben keinen Punkt gemein, und es ist

$$K = \cdots + A_{-2} + A_{-1} + A_0 + A_1 + A_2 + \cdots.$$

Alle diese Mengen sind kongruent, sollen also denselben Inhalt $f(A_m) = a$ haben; da K die Teilmenge $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ enthält, so muß $1 \geq na$ sein für jede natürliche Zahl n, also $a = 0$, und damit ist die Bedingung (δ) verletzt. Es folgt beiläufig, daß diese Mengen A_m im Lebesgueschen Sinne nicht meßbar sind (ihr äußerer Inhalt ist positiv, der innere Null); aber das Wesentliche ist, daß wir gar nicht von der Lebesgueschen Inhaltsdefinition, sondern nur von seinen Postulaten Gebrauch gemacht haben.

Der Widerspruch, auf den wir geführt wurden, bezieht sich auf die Forderung (δ), die allerdings gerade den spezifischen Vorzug der Borel-Lebesgueschen Maßtheorie gegenüber der älteren Peano-Jordanschen Inhaltstheorie ausmacht. Lassen wir aber diese Forderung fallen und fragen nach einer etwaigen Lösung des Inhaltsproblems unter Einschränkung auf die Postulate (α)(β)(γ), die wohl das Minimum dessen darstellen, was vom Inhalt der Punktmengen verlangt werden muß. *Selbst unter diesen Bedingungen ist das Problem unlösbar*, wenigstens für die Kugel und daher

für den drei- oder mehrdimensionalen euklidischen Raum. Zu diesem Zweck zeigen wir, *daß eine Kugelhälfte mit einem Kugeldrittel kongruent sein kann*, oder genauer, daß (von einer abzählbaren Menge abgesehen) die Kugel K in drei Mengen A, B, C gespalten werden kann derart, daß A, B, C und $B+C$ paarweise kongruent sind.

Es sei φ eine Halbdrehung (um π) und ψ eine Dritteldrehung $\left(\text{um } \frac{2\pi}{3}\right)$ um eine von der ersten verschiedene Achse. Diese beiden Drehungen erzeugen, da $\varphi^2 = \psi^3 = 1$, eine zunächst in folgender Weise darstellbare Gruppe

(G) $$1 \mid \varphi, \psi, \psi^2 \mid \varphi\psi, \varphi\psi^2, \psi\varphi, \psi^2\varphi \mid \cdots,$$

in der wir die Produkte verschiedener Faktorenzahl durch Striche getrennt haben; hierbei werden φ, ψ, ψ^2 als einfache Faktoren gerechnet. Die allgemeine Form eines Produktes von zwei oder mehr Faktoren ist eine der folgenden vier:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \varphi\psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\cdots\varphi\psi^{m_n},\\
\beta &= \psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\varphi\cdots\psi^{m_n}\varphi,\\
\gamma &= \varphi\psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\cdots\varphi\psi^{m_n}\varphi,\\
\delta &= \psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\cdots\varphi\psi^{m_n},
\end{aligned}$$

wobei n eine natürliche Zahl und $m_i = 1$ oder 2 ist.

Bei geeigneter Wahl der Drehungsachsen ist kein Produkt aus einem oder mehreren Faktoren gleich der Identität 1, sind also die in der Form (G) angeschriebenen Drehungen paarweise verschieden. Um dies zu zeigen, bemerken wir zuerst, daß ein Produkt, das $=1$ ist, jedenfalls in der Form α angenommen werden kann; denn aus $\beta = 1$ würde $\varphi\beta\varphi = \alpha = 1$ folgen; aus $\gamma = 1$ ebenso $\varphi\gamma\varphi = \delta = 1$, und aus $\delta = 1$ schließlich

$$\psi^{3-m_1}\delta\psi^{m_1} = \alpha' = 1.$$

Die unseren Drehungen entsprechenden orthogonalen Transformationen haben, wenn wir die ψ-Achse in die z-Achse, die φ-Achse in die xz-Ebene legen und den Winkel beider Achsen mit $\frac{1}{2}\vartheta$ bezeichnen, die Gestalt:

(ψ) $$\begin{cases} x' = x\lambda - y\mu,\\ y' = x\mu + y\lambda,\\ z' = z; \end{cases}$$

(φ) $$\begin{cases} x' = -x\cos\vartheta + z\sin\vartheta,\\ y' = -y,\\ z' = x\sin\vartheta + z\cos\vartheta; \end{cases}$$

$$(\varphi\psi)\qquad \begin{cases} x' = -x\lambda\cos\vartheta + y\mu + z\lambda\sin\vartheta, \\ y' = -x\mu\cos\vartheta - y\lambda + z\mu\sin\vartheta, \\ z' = x\sin\vartheta + z\cos\vartheta, \end{cases}$$

wobei

$$\lambda = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \mu = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

gesetzt ist; der Übergang von ψ zu ψ^2 wird durch Vertauschung von μ mit $-\mu$ bewirkt.

Es sei nun α ein Produkt von n Doppelfaktoren $\varphi\psi$ oder $\varphi\psi^2$, α' eines von $n+1$ solchen, also $\alpha' = \alpha\varphi\psi$ oder $\alpha' = \alpha\varphi\psi^2$; α führe den Punkt 0, 0, 1 in den Punkt x, y, z über, α' in x', y', z', so daß zwischen diesen Koordinaten die Gleichungen $(\varphi\psi)$ oder die durch Vertauschung von μ mit $-\mu$ daraus hervorgehenden Gleichungen $(\varphi\psi^2)$ bestehen. Wir behaupten, daß x, y, z von der Form

$$\begin{aligned} x &= \sin\vartheta\,(a\cos\vartheta^{n-1} + \cdots), \\ y &= \sin\vartheta\,(b\cos\vartheta^{n-1} + \cdots), \\ z &= c\cos\vartheta^{n} + \cdots \end{aligned}$$

sind, d. h. x und y Produkte von $\sin\vartheta$ mit einem Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, z ein Polynom n^{ten} Grades in $\cos\vartheta$. In der Tat ist dies für $n = 1$ richtig, da der Punkt 0, 0, 1 durch $\varphi\psi$ oder $\varphi\psi^2$ in $\lambda\sin\vartheta$, $\pm\mu\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ übergeht, und überträgt sich von n auf $n+1$; es ist nämlich

$$\begin{aligned} x' &= \sin\vartheta\,(a'\cos\vartheta^{n} + \cdots), \\ y' &= \sin\vartheta\,(b'\cos\vartheta^{n} + \cdots), \\ z' &= c'\cos\vartheta^{n+1} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei zugleich

$$a' = \lambda(c-a), \quad b' = \pm\mu(c-a), \quad c' = c-a,$$

$$c' - a' = (1-\lambda)(c-a) = \frac{3}{2}(c-a).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformel folgt, daß nach n Drehungen $\varphi\psi$ oder $\varphi\psi^2$ der Punkt 0, 0, 1 in x, y, z übergegangen ist, wo

$$z = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cos\vartheta^{n} + \cdots$$

sich jedenfalls nicht identisch auf 1 reduziert; unser Produkt α kann also nur für endlich viele besondere Werte von $\cos\vartheta$ gleich der Identität 1 sein, und es ist demnach durch Vermeidung von höchstens abzählbar vielen Werten möglich, ϑ so zu wählen, daß kein Produkt α gleich 1 wird.

Nachdem ϑ in dieser Weise gewählt ist, haben die Transformationen von (G), außer der ersten 1, jede nur zwei Fixpunkte, die zusammen eine abzählbare Menge Q bilden; setzen wir die ganze Kugel $K = P + Q$, so muß nach der uns vorschwebenden Inhaltsbestimmung $f(Q) = 0$ und $f(P) = f(K) > 0$ sein. (Durch eine geeignete Drehung, deren Achse durch keinen Punkt von Q hindurchgeht und deren Winkel keiner der abzählbar vielen Längendifferenzen der Punkte von Q gleich ist, geht Q in eine kongruente Teilmenge von P über; durch wiederholte Anwendung erkennt man, daß, für jede natürliche Zahl n, $f(P) \geqq nf(Q)$, also $f(Q) = 0$ sein muß.) Betrachten wir jetzt nur die Menge P, so entspricht jedem ihrer Punkte x die abzählbare Menge P_x der paarweise verschiedenen Punkte

$$x,\ x\varphi,\ x\psi,\ x\psi^2,\ x\varphi\psi,\ \cdots,$$

in die x durch die Transformationen von (G) übergeht; wählen wir aus jeder Menge P_x genau einen Punkt aus, so entsteht eine Menge

$$M = \{x, y, z, \cdots\}$$

und es ist

$$P = M + M\varphi + M\psi + M\psi^2 + M\varphi\psi + \cdots.$$

Wir behaupten jetzt endlich: es ist möglich, diese Mengen oder die entsprechenden Transformationen auf drei Klassen A, B, C so zu verteilen, daß

(1) von zwei Transformationen ϱ, $\varrho\varphi$ die eine zu A und die andere zu $B + C$ gehört;

(2) von drei Transformationen ϱ, $\varrho\psi$, $\varrho\psi^2$ je eine zu A, B, C gehört.

Angenommen nämlich, die Produkte von n oder weniger Faktoren seien bereits so verteilt, daß diese Bedingungen, soweit die fraglichen Transformationen unter den schon verteilten vorkommen, erfüllt sind. Ein Produkt von n Faktoren, deren letzter ψ oder ψ^2 ist, heiße ψ_n; ein solches, dessen letzter Faktor φ ist, heiße φ_n. Jedes Produkt von $n + 1$ Faktoren ist dann von einer der drei Formen $\psi_n\varphi$, $\varphi_n\psi$, $\varphi_n\psi^2$, und wir verteilen sie folgendermaßen:

wenn ψ_n zu A, B, C gehört, so gehöre $\psi_n\varphi$ zu B, A, A;

wenn φ_n zu A, B, C gehört, so gehöre $\varphi_n\psi$ zu B, C, A

und $\varphi_n\psi^2$ zu C, A, B.

Damit sind die Produkte von $n + 1$ oder weniger Faktoren in der gewünschten Weise verteilt; man sieht zugleich, welche Rolle die Unabhängigkeit von φ, ψ spielt, denn wenn ein Produkt $= 1$ oder zwei formal verschiedene Produkte gleich wären, so könnte die verlangte Verteilung auf Widersprüche führen.

Wir deuten, indem wir die Identität in die Klasse A werfen, den Anfang der Verteilung an:

A	1		$\psi\varphi\ \ \varphi\psi^2$ $\psi^2\varphi$	$\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi\varphi\ \ \psi^2\varphi\psi\varphi\ \ \varphi\psi^2\varphi\psi^2$ $\psi\varphi\psi^2\varphi\ \ \psi^2\varphi\psi^2\varphi$	$\cdots$ $\cdots$
B		$\psi\ \ \varphi$		$\psi\varphi\psi\ \ \psi^2\varphi\psi\ \ \varphi\psi^2\varphi$	$\varphi\psi\varphi\psi$	$\cdots$
C		ψ^2	$\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi^2\ \ \psi^2\varphi\psi^2$	$\varphi\psi\varphi\psi^2\ \ \varphi\psi^2\varphi\psi$	$\cdots$

während die beiden folgenden Zusammenstellungen zeigen, wie durch die Bedingung (1) die Klassen A und $B+C$, durch die Bedingung (2) die Klassen A, B, C aufeinander bezogen werden:

A	1	$\psi\varphi$	$\psi^2\varphi$	$\varphi\psi^2$	$\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi^2\varphi$	$\psi^2\varphi\psi\varphi$	$\psi^2\varphi\psi^2\varphi$	$\varphi\psi^2\varphi\psi^2$	$\cdots$
$B+C$	φ	ψ	ψ^2	$\varphi\psi^2\varphi$	$\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi^2$	$\psi^2\varphi\psi$	$\psi^2\varphi\psi^2$	$\varphi\psi^2\varphi\psi^2\varphi$	$\cdots$

A	1	$\psi\varphi$	$\psi^2\varphi$	$\varphi\psi^2$	$\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi^2\varphi$	$\psi^2\varphi\psi\varphi$	$\psi^2\varphi\psi^2\varphi$	$\varphi\psi^2\varphi\psi^2$	$\cdots$
B	ψ	$\psi\varphi\psi$	$\psi^2\varphi\psi$	φ	$\varphi\psi\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi^2\varphi\psi$	$\psi^2\varphi\psi\varphi\psi$	$\psi^2\varphi\psi^2\varphi\psi$	$\varphi\psi^2\varphi$	$\cdots$
C	ψ^2	$\psi\varphi\psi^2$	$\psi^2\varphi\psi^2$	$\varphi\psi$	$\varphi\psi\varphi\psi^2$	$\psi\varphi\psi\varphi\psi^2$	$\psi\varphi\psi^2\varphi\psi^2$	$\psi^2\varphi\psi\varphi\psi^2$	$\psi^2\varphi\psi^2\varphi\psi^2$	$\varphi\psi^2\varphi\psi$	$\cdots$

Bezeichnen wir jetzt mit A, B, C auch die Summen der betreffenden Mengen

$$A = M + M\psi\varphi + M\psi^2\varphi + M\varphi\psi^2 + \cdots,$$
$$B = M\psi + M\varphi + \cdots,$$
$$C = M\psi^2 + M\varphi\psi + \cdots,$$

so ist

$$A\varphi = B + C, \quad A\psi = B, \quad A\psi^2 = C,$$

die Mengen $A, B, C, B+C$ sind kongruent und A müßte gleichzeitig die Hälfte und das Drittel des Kugelinhalts haben.

Das Inhaltsproblem selbst ohne die Lebesguesche Forderung (δ) ist also für die Kugel und für den drei- oder mehrdimensionalen Raum nicht lösbar.

Für den Kreis, die gerade Linie und die Ebene muß die Frage nach einer den Bedingungen $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ genügenden Inhaltsbestimmung offen bleiben, da die Struktur der Bewegungsgruppe in diesen Fällen das obige Verfahren nicht gestattet.

Greifswald, 27. Februar 1914.

Über ganze transzendente Zahlen.

Von

Ernst Zermelo in Zürich.

Das Problem der „ganzen transzendenten Zahlen", wie es neuerdings von Maillet*) u. a. behandelt wurde, kommt darauf hinaus, einen Bereich $\mathfrak{G}$ von reellen oder komplexen Zahlen zu definieren, welcher die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Summe, Differenz und Produkt zweier Zahlen von $\mathfrak{G}$ ist wieder eine Zahl von $\mathfrak{G}$.

II. Jede reelle oder komplexe Zahl ist Quotient zweier Zahlen von $\mathfrak{G}$.

III. Jede ganze rationale (bzw. algebraische) Zahl ist Element von $\mathfrak{G}$.

IV. Keine nicht-ganze rationale (bzw. algebraische) Zahl gehört zu $\mathfrak{G}$.

Da es bisher noch nicht gelungen ist, einen Bereich von dieser Beschaffenheit zu konstruieren, so liegt die Vermutung nahe, als ob es deswegen nicht ginge, weil die vier aufgestellten Postulate miteinander im Widerspruche ständen. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß es sich so nicht verhält, indem die Existenz solcher Bereiche $\mathfrak{G}$ auf die Wohlordnung des Kontinuums zurückgeführt wird.

Zu diesem Zwecke wird nach einem zuerst von G. Hamel**) und H. Lebesgue***) benutzten Verfahren auf Grund einer beliebigen Wohlordnung Ω eine „algebraische Basis" der reellen und komplexen Zahlen definiert, d. h. ein System H von Zahlen η, zwischen denen keine algebraischen Beziehungen bestehen, welche aber alle übrigen Zahlen algebraisch auszudrücken gestatten. Es wird sodann gezeigt, daß jede Zahl einer *eindeutig* bestimmten „Hauptgleichung" genügt, nämlich einer in H irreduziblen und primitiven algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten „ganzzahlige" Polynome der η sind, d. h. solche mit ganzen rationalen Zahlen-

*) Hierüber vgl. H. Blumberg, Arch. Math. Phys. (3) 20, p. 53—57.

**) G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. 60, S. 459, wo es sich aber nur um *ineare* Beziehungen handelt.

***) H. Lebesgue, Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans. Atti Ac. Torino 1906—1907.

koeffizienten. Werden nun zu $\mathfrak{G}_\eta$ alle diejenigen Zahlen gerechnet, für welche der Anfangskoeffizient der Hauptgleichung ± 1 ist, so läßt sich zeigen, daß für diesen Bereich $\mathfrak{G}_\eta$ alle vier Bedingungen erfüllt sind. Jeder Wohlordnung Ω des Kontinuums entspricht also eine Basis H und damit ein System $\mathfrak{G}_\eta$ von „η-ganzen" Zahlen, zu denen (nach III) jedenfalls auch alle ganzen algebraischen Zahlen gehören, zugleich aber auch alle Basiszahlen η selbst sowie alle ganzzahligen Polynome der η, während alle rational-gebrochenen Polynome der η mit ganzzahligen Koeffizienten als „nicht ganz" zu gelten hätten.

§ 1.

Die Basis.

Die Gesamtheit $\mathfrak{C}$ der reellen und komplexen Zahlen sei in beliebiger Weise „wohlgeordnet", d. h. nach G. Cantor so geordnet, daß die Menge $\mathfrak{K}$ wie jede ihrer Teilmengen ein erstes Element enthält. Eine solche Wohlordnung Ω kann stets und zwar auf eindeutige Weise definiert werden, wenn jeder nicht verschwindenden Untermenge von $\mathfrak{C}$ eines ihrer Elemente zugeordnet ist, sie existiert also auf Grund des „Auswahlaxioms"*), und die Gesamtheit aller möglichen Ω ist eine Menge von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{c}}$, sofern $\mathfrak{c}$ die des Kontinuums bezeichnet.

Für das Folgende genügt es, eine *beliebige* Wohlordnung Ω von $\mathfrak{C}$ zugrunde zu legen. Dann entspricht jeder (reellen oder komplexen) Zahl α als „Abschnitt" eine bestimmte Untermenge $\mathfrak{C}(\alpha)$ von $\mathfrak{C}$, nämlich die Gesamtheit der dem Element α in Ω vorangehenden Elemente, sowie der durch diese Zahlen bestimmte Körper $\mathfrak{K}(\alpha)$.

Nun kann es vorkommen, daß eine Zahl α von den *vorangehenden* „algebraisch abhängig" ist, nämlich einer algebraischen Gleichung genügt von der Form

$$f(x, \beta) \equiv f(x, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu) = 0, \tag{1}$$

in welcher alle Koeffizienten dem Körper $\mathfrak{K}_\alpha$ angehören, d. h. ganzzahlige rationale Funktionen von endlich vielen dem α vorangehenden Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu$ sind und der Koeffizient der höchsten Potenz von x nicht verschwindet. Insbesondere erfüllen alle algebraischen Zahlen diese Forderung, weil der natürliche Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ in jedem Körper $\mathfrak{K}(\alpha)$ enthalten ist.

Genügt dagegen eine Zahl η *keiner* Gleichung von der Form (1), ist η „von den vorangehenden unabhängig", so heiße η eine „Basiszahl", und

*) E. Zermelo, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann. 59, S. 514. Derselbe, Neuer Beweis für die Möglichkeit der Wohlordnung. Math. Ann. 65, S. 107.

die Gesamtheit *aller* Basiszahlen H wird als die zu Ω gehörende „Basis" bezeichnet. So ist mindestens die *erste* in Ω vorkommende *transzendente* Zahl eine Basiszahl. Die aus endlich vielen Basiszahlen η gebildeten Polynome mit ganzen rationalen Koeffizienten bilden dann einen Integritätsbereich $\mathfrak{J}_\eta$ und ihre Quotienten den „Basiskörper" $\mathfrak{R}_\eta$. Alle diejenigen Basiszahlen, welche einem gegebenen Elemente α in Ω vorangehen, bilden den „Basisabschnitt" $\mathsf{H}(\alpha)$.

Ist dagegen α keine Basiszahl, sondern von den vorangehenden abhängig, so genügt α, wie wir zeigen wollen, mindestens einer Gleichung der Form

$$g(x, \eta) \equiv g(x, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t) = 0, \tag{2}$$

wo $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ zu $\mathsf{H}(\alpha)$ gehören, d. h. α ist *algebraisch abhängig von endlich vielen (vorangehenden) Basiszahlen.*

Nach dem bekannten, für wohlgeordnete Mengen gültigen Induktionsverfahren genügt es, den Satz zu beweisen für eine Zahl α unter der Voraussetzung, daß seine Gültigkeit für alle etwa vorangehenden Zahlen β bereits gesichert sei; denn unter den Zahlen α, für welche er ungültig wäre, müßte es in Ω eine erste α_0 geben, und für die vorangehenden wäre er gültig, also auch für α_0 gegen die Annahme.

Es genüge also $x = \alpha$ einer algebraischen Gleichung

$$f(x, \beta) \equiv f(x, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu) = 0 \tag{1}$$

und jede der Zahlen β_λ, welche nicht selbst Basiszahl ist, genüge einer Gleichung

$$g_\lambda(x, \eta) \equiv g_\lambda(x, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t) = 0, \tag{2$_\lambda$}$$

wo wieder alle Basiszahlen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$, weil sie den β_λ vorangehen, dem Abschnitte $\mathsf{H}(\alpha)$ angehören. Ist ein β_λ selbst eine Basiszahl, so genügt sie ebenfalls einer solchen Gleichung $(2)_\lambda$, nämlich $x - \beta_\lambda = 0$, wo β_λ gleichfalls zu $\mathsf{H}(\alpha)$ gehört.

Um nun die ν Größen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu$ aus den $\nu + 1$ Gleichungen (1), $(2)_\lambda$ zu eliminieren, kann man etwa folgendermaßen verfahren.

Die Gleichung (1) können wir auf die Form bringen

$$f(x, \beta) \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0, \tag{1a}$$

wo jeder Koeffizient $A_\varrho = A_\varrho(\beta)$ ein ganzzahliges Polynom in $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu$ ist und $A_0(\beta) \neq 0$. Ebenso können wir uns in $(2)_\lambda$ alle Nenner fortgeschafft denken und diese Gleichungen sämtlich als irreduzibel voraussetzen in dem durch $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ bestimmten Körper $\mathfrak{k}_t$. Dann genügt jeder Gleichung $(2)_\lambda$ ein System konjugierter Größen $\beta_\lambda, \beta_\lambda', \beta_\lambda'', \cdots$, deren elementare symmetrische Funktionen (als Koeffizienten von $g_\lambda(x)$ dividiert durch den Anfangskoeffizienten $b_{\lambda 0} \neq 0$) rational sind in $\mathfrak{k}_t$. Ersetzt man

nun in A_ϱ jede der Größen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ durch ihre sämtlichen konjugierten, in allen Kombinationen, so entstehen die Werte $A_\varrho, A_\varrho', A_\varrho'', \cdots$ und genügen sämtlich einer Gleichung

$$G_\varrho(x) \equiv (x - A_\varrho)(x - A_\varrho')(x - A_\varrho'') \cdots = 0,$$

deren Koeffizienten als ganze, ganzzahlige symmetrische Funktionen der Wurzelkombinationen β wieder rational sein müssen in $\mathfrak{k}_t$. Der in $\mathfrak{k}_t$ irreduzible Faktor von $G_\varrho(x)$, welchem $x = A_\varrho$ genügt, sei $\Phi_\varrho(x)$, sodaß wir haben

$$\Phi_\varrho(A_\varrho) = 0.$$

Hier ist in $\Phi_0(x)$, da $A_0 \neq 0$, auch jede andere Wurzel von 0 verschieden, weil sonst das konstante Glied verschwände und die Gleichung reduzibel wäre gegen die Annahme. Ersetzt man also in (1a) jeden Koeffizienten A_ϱ durch seine konjugierten und multipliziert die entstehenden Polynome durch alle Kombinationen, so entsteht eine Gleichung

$$\Phi(x) \equiv (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots)(A_0' x^n + A_1' x^{n-1} + \cdots) \cdots = 0,$$

welche für $x = \alpha$ erfüllt ist, deren Koeffizienten in bezug auf x als symmetrische Funktionen der $A_\varrho, A_\varrho', \cdots$ wieder dem Körper $\mathfrak{k}_t$ angehören, und deren Anfangskoeffizient als eine Potenz der Norm $A_0 A_0' A_0'' \cdots$ sicher von 0 verschieden ist. Es genügt also α in der Tat einer Gleichung von der Form (2), und die behauptete Abhängigkeit ist bewiesen.

Dagegen kann zwischen endlich vielen *Basiszahlen allein niemals* eine algebraische Gleichung der Form

$$F(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t) = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen, ohne daß alle Koeffizienten verschwinden. Denn sonst wäre die in der Wohlordnung *letzte* unter den η_i, z. B. η_t, welche nicht identisch herausfällt, algebraisch abhängig von den vorangehenden, entgegen unserer Definition. Jede solche algebraische Relation zwischen Basiszahlen mit ganzzahligen Koeffizienten muß daher *identisch* bestehen, also auch für *willkürliche* Werte der Veränderlichen $\eta_1, \cdots, \eta_t$.

§ 2.

Die Hauptgleichung.

Jede reelle oder komplexe Zahl α, mag sie zur Basis H gehören oder nicht, genügt nach dem oben Bewiesenen mindestens einer algebraischen Gleichung der Form

$$(2) \qquad g(x, \eta) \equiv g(x, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t) = 0,$$

in welcher g ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ Basiszahlen sind und der Exponent der höchsten vorkommenden Potenz von x mindestens $= 1$ ist.

Unter allen Gleichungen dieser Form (2), denen α genügt, gibt es sicher solche von ***niedrigster Gradzahl*** $n \geqq 1$. Unter allen solchen Gleichungen n^{ten} Grades gibt es wieder solche, in denen die ***Dimension*** des Koeffizienten von x^n in bezug auf die η, d. h. die höchste Exponentensumme eines nicht verschwindenden Gliedes $\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\cdots\eta_t^{\alpha_t}$ möglichst klein ist, nämlich $m \geqq 0$. Unter allen diesen Gleichungen vom Grade n und von der Dimension m des Anfangskoeffizienten muß es endlich eine solche geben, in welcher die Summe der absolut genommenen (ganzzahligen) Zahlenkoeffizienten dieses Anfangskoeffizienten möglichst klein und zwar $s \geqq 1$ ist.

Die so charakterisierte Gleichung n^{ten} Grades

$$\varphi(x, \eta) \equiv C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n = 0, \tag{3}$$

in welcher alle C_ϱ ganzzahlige Polynome in den Basiszahlen η sind und C_0 die kleinste Dimension m in den η und die minimale Koeffizientensumme s besitzt, ist dann, wie wir beweisen wollen, *irreduzibel* im Körper $\mathfrak{R}_\eta$, *primitiv* im entsprechenden Integritätsbereiche $\mathfrak{J}_\eta$ und endlich durch die Zahl α, die ihr genügt, bis auf das Vorzeichen aller Glieder *eindeutig* bestimmt. Sie werde die zu α gehörige „Hauptgleichung" genannt.

Wäre (3) in $\mathfrak{R}_\eta$ *reduzibel*, z. B.

$$\varphi(x, \eta) = \psi(x, \eta)\,\chi(x, \eta),$$

so würde α einer Gleichung derselben Form (2), aber von niedrigerem Grade $n' < n$ genügen gegen die Annahme.

Wären alle Koeffizienten $C_\varrho(\eta)$ *teilbar* durch ein ganzzahliges Polynom $T(\eta)$ von der Dimension $\tau \geqq 1$, also

$$C_\varrho(\eta) = T(\eta)\, C_\varrho'(\eta),$$

so müßten diese $n + 1$ Beziehungen, da die Basiszahlen, wie oben gezeigt, algebraisch unabhängig sind, in den sämtlichen vorkommenden η *identisch* gelten, und α genügte der Gleichung

$$C_0' x^n + C_1' x^{n-1} + \cdots + C_n' = 0, \tag{3'}$$

in welcher die Dimension m' von C_0', wieder gegen die Annahme, den Wert hätte $m' = m - \tau < m$.

Ebensowenig können alle *Zahlenkoeffizienten* der C_ϱ durch eine und dieselbe ganze *Zahl* $r > 1$ teilbar sein, weil durch Division mit r auch die Koeffizientensumme s von C_0 um den Faktor r *verkleinert* würde im Widerspruche mit der Definition von s. Somit ist (3) in der Tat irreduzibel und primitiv im Bereiche der η.

Es sei jetzt (2) eine *beliebige* Gleichung der betrachteten Form, welcher α genügt, und (3) die soeben gewonnene irreduzible, so würde bei der Division von $g(x, \eta)$ durch $\varphi(x, \eta)$ ein Rest $\omega(x, \eta)$ sich ergeben, der

in bezug auf x von niedrigerem als dem n^{ten} Grade wäre und für $x = \alpha$ ebenfalls den Wert 0 annähme, also wieder zu einer Gleichung der Form (2) von niedrigerem Grade führte, entgegen unserer Definition. Der Rest muß also in x identisch verschwinden, aber auch wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Basiszahlen identisch in den η, und wir haben

$$k(\eta)\, g(x, \eta) = \varphi(x, \eta)\, \psi(x, \eta), \tag{4}$$

wo $\psi(x, \eta)$ wieder ein Polynom derselben Form ist und $k(\eta)$ ein nicht verschwindendes ganzzahliges Polynom in den η. Es ist also $g(x, \eta)$ in bezug auf x immer teilbar durch $\varphi(x, \eta)$, und $g(x, \eta)$ kann nur dann irreduzibel in $\mathfrak{R}_\eta$ oder vom Grade n sein, wenn auch $\psi(x, \eta) = l(\eta)$ von x unabhängig ist.

In diesem Falle erhalten wir aus (4) durch Koeffizientenvergleichung das System der Gleichungen

$$k(\eta)\, B_\varrho(\eta) = l(\eta)\, C_\varrho(\eta) \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots, n), \tag{5$_\varrho$}$$

welche ebenfalls in den η wieder *identisch* bestehen müssen. Nun gelten aber auch für Polynome mehrerer Veränderlicher die bekannten Zerlegungsgesetze.*) Setzen wir also, unbeschadet der Allgemeinheit, die Polynome $k(\eta)$ und $l(\eta)$ als teilerfremd voraus (wir könnten sonst durch jeden gemeinsamen Teiler dividieren), so ergibt sich, daß alle B_ϱ durch $l(\eta)$ und alle C_ϱ durch $k(\eta)$ teilbar sein müssen,

$$B_\varrho(\eta) = l(\eta)\, B_\varrho^*(\eta), \quad C_\varrho(\eta) = k(\eta)\, C_\varrho^*(\eta) \quad \text{für} \quad \varrho = 0, 1, \cdots, n.$$

Da aber nach dem oben Bewiesenen $\varphi(x, \eta)$ in $\mathfrak{J}_\eta$ *primitiv* sein muß, so ist $k(\eta)$ jedenfalls $= \pm 1$, und $g(x, \eta)$ kann nur dann ebenfalls primitiv sein, wenn auch $l(\eta) = \pm 1$ ist, d. h. es ist in diesem Falle

$$g(x, \eta) = \pm\, \varphi(x, \eta),$$

und die „Hauptgleichung" ist in der Tat durch die Eigenschaften der Irreduzibilität und Primitivität bis auf das Vorzeichen *eindeutig* bestimmt.

§ 3.

Der Integritätsbereich.

Eine Zahl α wollen wir dann und nur dann als „η-ganz" dem Bereiche $\mathfrak{G}_\eta$ zurechnen, wenn in der zugehörigen (irreduziblen und primitiven) „Hauptgleichung" der Koeffizient der höchsten Potenz von x den Wert ± 1 hat, wenn also diese Gleichung die Form annimmt

$$\varphi(x, \eta) \equiv x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n = 0, \tag{3*}$$

wo die Koeffizienten $C_1, C_2, \cdots, C_n$ sämtlich Polynome der Basiszahlen mit ganzzahligen Koeffizienten sein sollen.

*) Vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, kleine Ausgabe, § 20.

Wir beweisen zunächst, daß diese Bedingung immer dann erfüllt ist, wenn α *irgendeiner* Gleichung der Form genügt

(2)* $$g(x, \eta) \equiv x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m = 0,$$

in welcher der Anfangskoeffizient $= 1$ ist und alle übrigen ganzzahlige Polynome in den η sind.

In der Tat haben wir in diesem Falle, wie im vorigen § 2 bewiesen, die in x und η identische Beziehung

(4) $$k(\eta)\, g(x, \eta) = \varphi(x, \eta)\, \psi(x, \eta),$$

wo $\varphi(x, \eta) = 0$ die zu α gehörende „Hauptgleichung" bedeutet. Es muß also $k(\eta)$ ein *„Teiler"* des rechtsstehenden Produktes sein, und da $\varphi(x, \eta)$ „primitiv" ist, zugleich auch ein Teiler von $\psi(x, \eta)$, auf Grund des verallgemeinerten „Gaußschen Satzes" über primitive Funktionen.*)

Somit haben wir nach Division mit $k(\eta)$

(4)* $$g(x, \eta) = \varphi(x, \eta)\, \overline{\psi}(x, \eta),$$

wo auch $\overline{\psi}(x, \eta)$ ein ganzzahliges Polynom in x und η mit dem Anfangskoeffizienten $\overline{B}_0(\eta)$ ist, und durch Vergleichung der Anfangskoeffizienten

$$1 = C_0(\eta)\, \overline{B}_0(\eta)$$

identisch in den η, also beide Faktoren rechts unabhängig von η und $= \pm 1$, d. h. α genügt in der Tat der gestellten Bedingung (3)*.

Auf Grund dieses Hilfssatzes lassen sich jetzt für den Bereich $\mathfrak{G}_\eta$ alle vier im Eingang aufgestellten Forderungen als erfüllt nachweisen.

I. Es seien α und β irgend zwei η-ganze Zahlen und $\varphi(x, \eta) = 0$, $\chi(x, \eta) = 0$ die entsprechenden „Hauptgleichungen". Ferner sei $\gamma = q(\alpha, \beta)$ ein beliebiges ganzzahliges Polynom von α, β, z. B. $\gamma = \alpha \pm \beta$ oder $\gamma = \alpha\beta$ und $\gamma', \gamma'', \cdots$ die Ausdrücke, welche entstehen, indem man α sowohl wie β durch ihre sämtlichen konjugierten Größen $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots, \beta, \beta', \beta'', \cdots$ ersetzt (nämlich durch die sämtlichen Wurzeln der irreduziblen Gleichungen $\varphi = 0$ und $\chi = 0$). Dann genügen alle diese Werte γ der Gleichung

(5) $$(x - \gamma)(x - \gamma')(x - \gamma'') \cdots = 0$$

mit dem Anfangskoeffizienten 1, während alle übrigen Koeffizienten als ganze, ganzzahlige symmetrische Funktionen der Wurzeln von $\varphi(x, \eta) = 0$ und $\chi(x, \eta) = 0$ wieder ganze, ganzzahlige rationale Funktionen ihrer Koeffizienten und daher ganzzahlige Polynome in den η sein müssen. Also genügt auch γ einer Gleichung (2)* und gehört nach unserem Hilfssatze zu $\mathfrak{G}_\eta$.

II. Ist α eine *beliebige* reelle oder komplexe Zahl und ihre „Hauptgleichung" von der Form

(3) $$\varphi(x, \eta) \equiv C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n = 0,$$

*) H. Weber, a. a. O., § 20, 5.

so genügt $\gamma = C_0 \alpha$ der Gleichung

$$(6) \qquad \gamma^n + C_1 \gamma^{n-1} + \cdots + C_n C_0^{n-1} = 0,$$

welche die Form (2)* hat, während C_0 der Gleichung $x - C_0 = 0$ von der gleichen Beschaffenheit genügt. Somit ist $\alpha = \frac{\gamma}{C_0}$ der Quotient zweier η-ganzen Zahlen.

III. IV. Ist α eine *algebraische Zahl* und die entsprechende in $\mathfrak{R}$ irreduzible und primitive Gleichung

$$(7) \qquad f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, so ist $f(x)$ im Falle $a_0 = 1$ von der Form (2)* und α in der Tat „η-ganz". Um aber auch das Umgekehrte (IV) zu beweisen, zeigen wir, daß $f(x)$ noch im Bereiche der η irreduzibel und primitiv, also (7) mit der „Hauptgleichung" identisch ist.

Nach dem oben Bewiesenen ist nämlich auch hier wie in (4)

$$k(\eta) f(x) = \varphi(x, \eta) \psi(x, \eta),$$

wo $\varphi(x, \eta) = 0$ die Hauptgleichung von α bedeutet. Es ist also wieder $k(\eta)$ Teiler des rechtsstehenden Produktes und, da $\varphi(x, \eta)$ primitiv, auch Teiler von $\psi(x, \eta) = k(\eta) \overline{\psi}(x, \eta)$, d. h. wir haben wie oben

$$f(x) = \varphi(x, \eta) \overline{\psi}(x, \eta).$$

Hier müssen die Koeffizienten von x rechts und links übereinstimmen und zwar, wegen der Unabhängigkeit der Basiszahlen, identisch in den η, also auch dann, wenn man die η sämtlich durch 0 ersetzt. Somit wird

$$f(x) = \varphi(x, \eta) \overline{\psi}(x, \eta) = \varphi(x, 0) \overline{\psi}(x, 0).$$

Es wäre also $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ zerlegbar gegen die Annahme, außer wenn einer der beiden Faktoren rechts konstant und der andere vom m^{ten} Grade ist. Das letztere kann bei $\overline{\psi}(x, 0)$ nicht der Fall sein, weil sonst auch $\overline{\psi}(x, \eta)$ vom m^{ten} Grade in x wäre und dann $\varphi(x, \eta)$ konstant gegen die Definition der Hauptgleichung. Also müssen $\varphi(x, 0)$ und $\varphi(x, \eta)$ vom m^{ten} Grade sein und $\overline{\psi}(x, \eta) = l(\eta)$ konstant. Alle (ganzzahligen) Koeffizienten von $f(x)$ sind durch $l(\eta)$ teilbar, also $l(\eta)$ von den η unabhängig und selbst eine ganze Zahl und zwar, weil $f(x)$ im natürlichen Integritätsbereiche primitiv ist, $= \pm 1$, d. h. $f(x) = \pm \varphi(x, \eta)$. Somit kann der Anfangskoeffizient der Hauptgleichung nur dann ± 1 sein, wenn α eine *ganze* algebraische Zahl ist.

Unser aus der Basis H abgeleiteter Integritätsbereich $\mathfrak{G}_\eta$ besitzt demnach alle im Eingange des Artikels gestellten Eigenschaften. Er enthält

1. alle *Basiszahlen* η,
2. alle *ganzen rationalen* Funktionen der η mit ganzzahligen Koeffizienten, darunter alle *ganzen rationalen* Zahlen,
3. alle *ganzen algebraischen* Funktionen der η mit ganzzahligen Koeffizienten, darunter alle *ganzen algebraischen* Zahlen.

Dagegen schließt er aus
1. alle *rationalen gebrochenen* Funktionen der η mit ganzen rationalen Koeffizienten, darunter die *rational-gebrochenen* Zahlen,
2. alle *algebraisch gebrochenen* Funktionen der η mit ganzen rationalen Koeffizienten, darunter alle *algebraisch gebrochenen* Zahlen.

Jede *beliebige* reelle oder komplexe Zahl ist darstellbar als Quotient zweier η-ganzen Zahlen, ja als Quotient einer η-ganzen Zahl und eines ganzzahligen Polynoms der η.

Ob eine vorgelegte transzendente Zahl zum Integritätsbereiche gehört oder nicht, hängt wesentlich von der zugrunde gelegten Basis H und damit auch von der gewählten Wohlordnung Ω ab. Durch geeignete Wahl der letzteren wird man jede *beliebige transzendente* Zahl ω (z. B. die Zahl e oder π) zu einer „ganzen" machen können, indem man sie z. B. in der Wohlordnung an die Spitze stellt; ebenso auch ein beliebiges *System* transzendenter Zahlen, sofern diese nur unter sich algebraisch unabhängig sind. Desgleichen wird man ω willkürlich auch zu einer „Einheit" machen können, d. h. zu einer Zahl, welche gleichzeitig mit ihrer Reziproken „ganz" ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur die (ebenfalls transzendente) Zahl $\varrho = \omega + \omega^{-1}$ in die Basis aufzunehmen, da in diesem Falle beide Größen ω und ω^{-1} derselben Gleichung genügen

$$x^2 - \varrho x + 1,$$

welche von der Form $(2)^*$ ist.

Unsere Definition der Integrität ist auch nicht bestimmt, die Zahlen ihrer inneren Natur nach zu charakterisieren, sondern soll vorläufig nur die *Widerspruchslosigkeit* der an einen solchen Integritätsbereich zu stellenden Forderungen erhärten.

Zürich, den 28. Dezember 1913.

Nachtrag (April 1914).

Die auf die „Hauptgleichung" bezüglichen Beweise kann man formal etwas abkürzen, wenn man den (hier im Eingang des § 3 eingeführten) „Gaußschen Satz" schon auf die Formel (4) des § 2 anwendet und durch Division mit dem „Teiler" $k(\eta)$ den Satz gewinnt:

Ist $g(x, \eta)$ ein ganzzahliges Polynom, das für $x = \alpha$ verschwindet, und $\varphi(x, \eta) = 0$ die zugehörige Hauptgleichung, so ist stets $g(x, \eta)$ algebraisch teilbar durch $\varphi(x, \eta)$, d. h. identisch in x und η

$$g(x, \eta) = \varphi(x, \eta)\, \overline{\psi}(x, \eta), \tag{4a}$$

wo auch $\overline{\psi}$ ein ganzzahliges Polynom ist.

Zur Theorie der Substitutionsgruppen.

Von

A. Speiser in Straßburg i. E.

Sei G eine endliche irreduzible Substitutionsgruppe von der Ordnung N. Ist A eine ihrer Substitutionen, so bedeute $\chi(A)$ die Summe ihrer charakteristischen Wurzeln, $h(A)$ die Anzahl der mit A in der Gruppe äquivalenten Substitutionen, d. h. die Anzahl der Substitutionen der *Klasse*, zu der A gehört. Der Grad (die Dimension) der Gruppe ist dann $\chi(E) = \chi_1$.

In der Theorie der Gruppencharaktere wird gezeigt, daß stets

$$\frac{h(A)\,\chi(A)}{\chi_1}$$

eine *ganze* algebraische Zahl ist. Ist $\bar{k}$ der größte gemeinsame Teiler von $h(A)$ und χ_1 und setzt man

$$\chi_1 = k \cdot \bar{k},$$

dann muß $\chi(A)$ eine durch k teilbare Zahl sein. Da ferner $h(A^i)$ für jeden ganzzahligen Exponenten i ein Teiler von $h(A)$ ist, so muß auch $\chi(A^i)$ durch k teilbar sein. Wir wollen im folgenden einige Sätze aufstellen, die sich daraus für die charakteristischen Wurzeln von A ergeben.

Für den Fall, wo $h(A)$ und χ_1 relativ prim sind, hat Herr Burnside*) bewiesen, daß dann entweder A mit jeder Substitution vertauschbar ist, oder daß $\chi(A) = 0$ wird. Nehmen wir den Fall an, daß keine Potenz von A, mit Ausnahme von E zum Zentrum der Gruppe gehört, dann muß der Charakter von A und von seinen Potenzen außer E gleich Null sein. Wenn die Ordnung von A mit n bezeichnet wird, so sei:

$$\chi(A) = a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1},$$

wo ω eine primitive n^{te} Einheitswurzel bedeutet. Man erhält hieraus $\chi(A^i)$ indem man ω durch ω^i ersetzt. Insbesondere wird:

$$\chi_1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}.$$

*) Burnside, Theory of groups of finite order p. 322.

Soll nun $\chi(A^i) = 0$ sein für $i = 1, 2, \cdots, n-1$, so erhält man zusammen mit der Gleichung für χ_1 n Gleichungen, die sich ohne weiteres auflösen lassen. Multipliziert man jede Gleichung mit dem inversen Koeffizienten von a_i und addiert die n Gleichungen, so erhält man:

$$n \cdot a_i = \chi_1,$$

daraus folgt:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = \frac{\chi_1}{n}.$$

Daraus ergibt sich der Satz:

Satz I. *Ist in einer Gruppe ohne Zentrum $h(A)$ prim zum Grad der Gruppe, so ist die Ordnung von A ein Teiler des Grades.*

Ist insbesondere die Ordnung von A gleich dem Grad, so ist A ein Element, dessen charakteristische Wurzeln sämtlich voneinander verschieden sind. Daraus folgt, daß zwei beliebige Substitutionen, die mit A vertauschbar sind, auch untereinander vertauschbar sind. Denn die Gesamtheit dieser Substitutionen bildet eine Untergruppe von G, in der A zum Zentrum gehört. Denkt man sich diese Gruppe in ihre irreduzibeln Bestandteile zerlegt, so muß der Grad eines jeden $= 1$ sein, denn in einem solchen Bestandteil darf A keine zwei verschiedenen charakteristischen Wurzeln besitzen. Daraus folgt aber, daß die Gruppe der mit A vertauschbaren Elemente eine Abelsche Gruppe ist.

Ist B ein beliebiges Element dieser Untergruppe, so ist stets $h(B)$ ein Teiler von $h(A)$ und die Untergruppe hat daher die Eigenschaft, daß für alle ihre Elemente $\chi(B) = 0$ ist, mit Ausnahme des Einheitselementes. Genau wie beim Beweis des Satzes I folgt, daß ihre Ordnung ein Teiler des Grades ist. Also sind nur die Potenzen von A und keine weiteren Substitutionen mit A vertauschbar und die Ordnung der ganzen Gruppe G wird:

$$N = \chi_1 \cdot h(A).$$

Insbesondere werden die Sylow-Untergruppen für diejenigen Primzahlen, die in χ_1 aufgehen, zyklisch.

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz II. *Existiert in einer Substitutionsgruppe ohne Zentrum eine Substitution A, deren Ordnung gleich dem Grad der Gruppe ist, und für die $h(A)$ prim zum Grade ist, dann ist die Ordnung der Gruppe gleich dem Produkt aus dem Grad der Gruppe mit $h(A)$.*

Speziell ergibt sich für den Fall, daß der Grad eine Primzahl ist, der Satz*):

Ist die Ordnung einer Gruppe vom Primzahlgrad p durch das Quadrat

---

*) Burnside loc. cit.

von p teilbar, so besitzt die Gruppe ein Zentrum, dessen Ordnung durch p teilbar ist.

Der Satz I läßt sich leicht auf allgemeine irreduzible Gruppen ausdehnen und lautet dann:

Satz Ia. *Ist in einer irreduzibeln Substitutionsgruppe $h(A)$ prim zum Grad der Gruppe, so ist der kleinste Exponent i, für den A^i in das Zentrum der Gruppe fällt, ein Teiler des Grades der Gruppe.*

Nun möge $h(A)$ mit χ_1 einen gemeinsamen Teiler besitzen, ferner sei die in der Einleitung definierte Zahl k prim zur Ordnung n von A.

Da alle n Charaktere $\chi(A^i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ durch k teilbare Größen sind, so erhält man n Bedingungsgleichungen:

$$a_0+a_1\omega^i+\cdots+a_{n-1}\omega^{i(n-1)}=\chi(A^i)\equiv 0 \quad (k) \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

Die Determinante der Koeffizienten der a setzt sich zusammen aus Teilern von Primzahlen, die in n aufgehen, denn sie ist das Produkt der Differenzen:

$$(\omega^k-\omega^l).$$

Löst man die Gleichungen auf, so sind die Determinanten in den Zählern sämtlich durch k teilbar, während die Nenner zu k prim sind. Daraus folgt, daß die Zahlen $a_0,\cdots,a_{n-1}$ sämtlich durch k teilbare ganze rationale Zahlen werden.

Wir haben damit den Satz bewiesen:

Satz III. *Enthält der Quotient $\frac{h(A)}{\chi_1}$ vollständig gekürzt im Nenner die Zahl k, sodaß $\chi_1=\bar{k}\cdot k$, und ist l der größte zur Ordnung von A prime Faktor von k, dann wird die linke Seite der charakteristischen Gleichung von A die l^{te} Potenz einer ganzen Funktion.*

Nun sei p ein Faktor von k, der in der Ordnung von A aufgeht. Wir nehmen an, die Ordnung sei eine Primzahlpotenz $p^m=n$.

Dann wird

$$\chi(A)=a_0+a_1\omega+\cdots+a_{n-1}\omega^{n-1}\equiv 0 \qquad (p).$$

Setzt man $p^{m-1}=n_1$, so läßt sich durch eine leichte Umstellung der Ausdruck für $\chi(A)$ folgendermaßen schreiben:

$$\chi(A)=(a_{00}+a_{01}\vartheta+\cdots+a_{1,p-1}\vartheta^{p-1})+(a_{10}+a_{11}\vartheta+\cdots+a_{1,p-1}\vartheta^{p-1})\omega$$
$$+\cdots+(a_{n_1-1,0}+a_{n_1-1,1}\vartheta+\cdots+a_{n_1-1,p-1}\vartheta^{p-1})\omega^{n_1-1},$$

wo $\vartheta=\omega^{n_1}$ eine p^{te} Einheitswurzel ist.

Infolge der Relation:

$$1+\vartheta+\cdots+\vartheta^{p-1}=0$$

läßt sich in jeder Klammer ϑ^{p-1} eliminieren, und die übrig bleibenden $p^n-p^{n-1}=\varphi(p^n)$ Produkte $\omega^k\vartheta^l$ bilden eine Basis der ganzen Zahlen

von $K(\omega)$. Soll daher $\chi(A)$ durch p teilbar sein, so müssen die Kongruenzen gelten:

$$a_{i,0} \equiv a_{i,1} \equiv \cdots \equiv a_{i,p-1} \quad (p) \qquad (i = 0, 1, \cdots, p-1).$$

Der Charakter von A^p wird dann:

$$b_0 + b_1 \omega^p + b_2 \omega^{2p} + \cdots$$

wo

$$b_i = a_{i,0} + a_{i,1} + \cdots + a_{i,p-1} \equiv 0 \quad (p).$$

Wir erhalten so den Satz:

Satz IV. *Ist in einer Substitutionsgruppe der Charakter $\chi(A)$ einer Substitution von der Ordnung p^m durch p teilbar, so ist die linke Seite der charakteristischen Gleichung von A^p die p^{te} Potenz einer ganzen Funktion und die Charaktere der sämtlichen Potenzen von A sind durch p teilbare Zahlen.*

Sind die sämtlichen Charaktere $\chi(A^i)$ durch p^r teilbar, so folgt zunächst:

$$a_{i,0} \equiv a_{i,1} \equiv \cdots \equiv a_{i,p-1} \quad (p^r).$$

Indem man das Verfahren für die Größen b fortsetzt, folgt:

$$b_{i,0} \equiv b_{i,1} \equiv \cdots \equiv b_{i,p-1} \quad (p^r),$$

und hierbei sind die Zahlen b sämtlich durch p teilbar. Definiert man weiter:

$$c_i = b_{i,0} + b_{i,1} + \cdots + b_{i,p-1} \equiv 0 \quad (p^2),$$

so kann man so fortfahren. Es wird, für $i \leqq r$, die linke Seite der charakteristischen Gleichung von A^{p^i} die $p^{i\text{te}}$ Potenz einer ganzen Funktion. Wenn i größer als r wird, so ist jedenfalls die linke Seite die $p^{r\text{te}}$ Potenz einer ganzen Funktion.

Aus unseren Gleichungen folgen ferner die Kongruenzen

$$c_i \equiv p b_{i,0} \equiv p^2 a_{i,0} \quad (p^r),$$

und an Stelle von $a_{i,0}$ können offenbar die Koeffizienten der sämtlichen Einheitswurzeln stehen, die aus ω^{p^i} durch Multiplikation mit einer $p^{3\text{ten}}$ Einheitswurzel entstehen. Zwei solche Koeffizienten sind daher stets einander kongruent (mod. p^{r-2}).

Eine geeignete Fortsetzung dieser Überlegung ergibt den Satz:

Satz V. *Sind die Charaktere $\chi(A^i)$ $(i \equiv 1, 2, \cdots, n)$ für eine Substitution, deren Ordnung eine Primzahlpotenz $p^m = n$ ist, durch p^r teilbar, so gelten für die Koeffizienten in*

$$\chi(A) = a_0 + a_1 \omega + \cdots + a_{n-1} \omega^{n-1}$$

die folgenden Kongruenzen:

Es ist

$$a_k \equiv a_l \quad (p^i) \quad \textit{für } i \leqq r,$$

wenn $\omega^k\omega^{-l}$ eine primitive $p^{r-i+1\text{te}}$ Einheitswurzel ist. Umgekehrt sind diese Bedingungen auch hinreichend dafür, daß die Charaktere von A und seiner Potenzen sämtlich durch p^r teilbar sind.

Die hier angewendete Methode beruht im wesentlichen auf der Existenz einer Relativbasis der ganzen Zahlen des Körpers der $p^{m\text{ten}}$ Einheitswurzeln gegenüber den Zahlen des Körpers der $p^{r\text{ten}}$ Einheitswurzeln. Ist nämlich ω eine primitive $p^{m\text{te}}$ Einheitswurzel, dann läßt sich jede ganze Zahl aus $K(\omega)$ auf eine und nur eine Weise in der Gestalt darstellen:

$$\vartheta_0 + \vartheta_1\omega + \cdots + \vartheta_{t-1}\omega^{t-1} \qquad (t = p^{m-r}),$$

wo die ϑ die sämtlichen ganzen Zahlen des Körpers der $p^{r\text{ten}}$ Einheitswurzeln durchlaufen. Dies gilt, sobald $r > 0$ ist.

Soll in dieser Darstellung eine Zahl im Körper der $p^{r\text{ten}}$ Einheitswurzeln liegen, so müssen die Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_{t-1}$ sämtlich $= 0$ sein. Ersetzt man nun ω durch ω^p, so bilden die Zahlen $1, \omega^p, \cdots, \omega^{p(t-1)}$ eine Relativbasis des Körpers der $p^{m-1\text{ten}}$ Einheitswurzeln gegenüber demjenigen der $p^{r-1\text{ten}}$. Durch dieselbe Substitution gehen aber die Zahlen $\vartheta_0, \cdots, \vartheta_{t-1}$ in solche des letzteren Körpers über. Das hier skizzierte Verfahren kann dazu dienen, weitere Sätze abzuleiten, die übrigens, wie die Sätze III—V, für allgemeine (reduzible oder irreduzible) Substitutionsgruppen gelten. Wir wollen speziell den Fall betrachten, wo die Charaktere einer Substitution und aller ihrer Potenzen rationale Zahlen sind, also insbesondere den Fall von Substitutionsgruppen mit rationalen Koeffizienten.

Wir setzen $A = A_m$, $A^p = A_{m-1}$, und allgemein $A_i^p = A_{i-1}$, sodaß A_i eine Substitution von der Ordnung p^i wird. Es sei $p^{m-1} = t$, ϑ eine t^{te} Einheitswurzel und

$$\begin{aligned}\chi(A) = {} & a_{00} + a_{01}\vartheta + \cdots + a_{0,t-1}\vartheta^{t-1} \\ & + \omega(a_{10} + a_{11}\vartheta + \cdots + a_{1,t-1}\vartheta^{t-1}) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \omega^{p-1}(a_{p-1,0} + a_{p-1,1}\vartheta + \cdots + a_{p-1,t-1}\vartheta^{t-1}),\end{aligned}$$

dann erhält man den Charakter von A_{m-i}, indem man an Stelle jeder Einheitswurzel die $p^{i\text{te}}$ Potenz setzt. Soll nun der Charakter jeder Potenz von A eine rationale Zahl sein, dann müssen die Ausdrücke in den Klammern verschwinden, wenn man ϑ durch eine beliebige Potenz ersetzt, ausgenommen für die t^{te} Potenz, wo $\vartheta^t = 1$ ist.

Daraus folgt, daß stets

$$a_{i,0} = a_{i,1} = \cdots = a_{i,t-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, p-1).$$

Setzt man noch

$$\sum_{k=0}^{t-1} a_{ik} = b_i,$$

so wird:

$$\chi(A_1) = b_0 + b_1\zeta + \cdots + b_{p-1}\zeta^{p-1},$$

wo ζ eine p^{te} Einheitswurzel ist, und, da $\chi(A_1)$ eine rationale Zahl ist, so folgt:

$$b_0 - \chi(A_1) = b_1 = \cdots = b_{p-1} \equiv 0 \quad (p^{m-1}).$$

Es wird also

$$\chi(A_1) \equiv b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1} = \chi_1 \quad (p^{m-1}).$$

Genau ebenso wird:

$$\chi(A_2) \equiv \chi_1 \quad (p^{m-2}),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\chi(A_i) \equiv \chi_1 \quad (p^{m-i}).$$

Für $\chi(A_2)$ erhält man das Resultat aus der Tatsache, daß

$$a_{00} + a_{01}\vartheta + \cdots + a_{0,t-1}\vartheta^{t-1}$$

eine rationale Zahl ist, wenn man für ϑ eine beliebige Potenz setzt, mit Benutzung einer Relativbasis des Körpers der $p^{m-1\text{ten}}$ Einheitswurzeln gegenüber demjenigen der $p^{m-2\text{ten}}$ Einheitswurzeln.

Wir haben so den Satz:

Satz VI. *Ist in einer (reduzibeln oder irreduzibeln) Substitutionsgruppe der Charakter einer Substitution, deren Ordnung eine Primzahlpotenz p^m ist, und der Charakter jeder ihrer Potenzen eine rationale Zahl, so gelten die Kongruenzen*

$$\chi(A_i) \equiv \chi_1 \quad (p^{m-i}).$$

Straßburg, Juli 1913.

Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle.

Par

Serge Bernstein à Charkow (Russie).

§ 1.

Propriétés des dérivées et des différences successives des fonctions analytiques réelles.

1. On rencontre bien souvent dans les applications de l'analyse, des fonctions analytiques de variables réelles, dont l'étude ne semble pas pouvoir être faite au moyen des méthodes classiques de la théorie des fonctions d'une variable complexe qui font intervenir les singularités complexes de la fonction. Une étude directe des propriétés réelles des fonctions analytiques parait donc nécessaire. Un premier résultat général dans cette voie a été obtenu par M. Pringsheim*) qui a démontré le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ de la variable réelle x soit analytique (holomorphe) dans un intervalle AB est qu'il existe deux nombres R et M, tels que l'on ait dans tout l'intervalle

$$|f^{(n)}(x)| < M \cdot R^n \cdot n! \tag{1}$$

2. Je veux indiquer ici d'autres propositions analogues et je commencerai par la suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit développable en série de Taylor de rayon R suivant les puissances de $(x-a)$ est qu'il soit possible de la représenter comme la différence de deux fonctions qui dans l'intervalle $(a, a+R)$ sont positives ainsi que toutes leurs dérivées.

En effet, la condition est nécessaire, puisque, dans le cas où la fonction est développable en série de Taylor, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k(x-a)^k = \sum_{k=0}^{k=\infty} |A_k|(x-a)^k - \sum_{k=0}^{k=\infty} (|A_k| - A_k)(x-a)^k$$
$$= \varphi(x) - \psi(x),$$

*) Math. Ann. 45.

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ jouissent des propriétés indiquées. Réciproquement, soit $\varphi(x)$ une fonction dont toutes les dérivées sont positives dans l'intervalle considéré. Soit M_n la plus petite valeur de $\varphi^{(n)}(x)$ dans l'intervalle $(a+h, a+R)$, de sorte que $M_n = \varphi^{(n)}(a+h)$, si $h < R$. On aura donc, en posant $h < R' < R$,

$$\varphi^{(n-1)}(R') > (R'-h)M_n,$$

(2)
$$\varphi^{(n-2)}(R') > \frac{(R'-h)^2}{2} M_n,$$

. . . .

et finalement

$$\varphi(R') > \frac{(R'-h)^n}{n!} M_n.$$

Par conséquent, en posant $\varphi(R') = M$, on a

$$M_n = \varphi^{(n)}(a+h) < \frac{M n!}{(R'-h)^n},$$

et, en particulier,

$$\varphi^{(n)}(a) < \frac{M n!}{(R')^n},$$

ce qui prouve, en considérant la série de Taylor avec le reste de Lagrange que la fonction

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(a+h)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

est développable en série de Taylor de rayon R. La même chose étant vraie pour ψ, la proposition est démontrée.

3. Corollaire. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de la variable réelle soit analytique et entière est qu'elle puisse être représentée dans un intervalle aussi grand que l'on veut de l'axe reel comme la différence de deux fonctions positives et à dérivées successives positives.*

On peut utiliser ces propositions pour démontrer presque sans calculs l'analyticité de certaines fonctions ou le fait qu'elles sont entières.

En voici un exemple tiré du cours des équations différentielles que je fais à l'École Supérieure de Femmes de Charkow. Soit un système differentiel

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, \alpha), \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

où f_i sont des fonctions holomorphes de $x, y_1, \cdots, y_n$ et du paramètre α dans le voisinage de $x = x_0$, $y_1 = y_1^0, \cdots, y_n = y_n^0$, $\alpha = \alpha_0$. Il s'agit de montrer que les fonctions y_i qui, pour $x = x_0$, se réduisent à y_i^0, sont holomorphes par rapport à α. Supposons que l'éxistence des solutions y_i soit démontrée d'une façon quelconque. En donnant à α un accroissement fini $\delta\alpha$, on forme les équations auxquelles satisfont les variations δy_i et

on prouve immédiatement l'existence des dérivées $\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} = y_i'$ qui sont les solutions s'annulant pour $x = x_0$ du système linéaire

$$\frac{dy_i'}{dx} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} y_k' + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}, \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

L'existence des dérivées successives se démontre de proche en proche, et l'on a, pour déterminer $\frac{\partial^s y_i}{\partial \alpha^s} = y_i^{(s)}$, des systèmes linéaires de la forme

$$(3) \qquad \frac{dy_i^{(s)}}{dx} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} y_k^{(s)} + A_{s,i}, \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

où $A_{s,i}$ est un polynome obtenu par l'addition et la multiplication des différentes dérivées partielles de f_i d'ordre non supérieur à s et de $y_k^{(h)}$, pour $h < s$ et k quelconque.

Par conséquent, si toutes les dérivées partielles des f_i sont positives, toutes les dérivées $\frac{\partial^s y_i}{\partial \alpha^s}$ sont également positives et, d'après le théorème (2), les fonctions y_i sont analytiques par rapport à α. Dans le cas, où les dérivées partielles des f_i sont quelconques, on remplace, comme dans le procédé classique de Cauchy, les fonctions f_i par des fonctions majorantes quelconques; on remarque ensuite que, si dans les équations (3) tous les coefficients sont remplacés par des quantités positives et plus grandes, les solutions correspondantes $y_i^{(s)}$ seront positives et plus grandes. Il en résulte que, si le système modifié admet des solutions analytiques par rapport à α, il en est de même à fortiori du système donné. La proposition est donc démontrée dans tous les cas.

4. Il est intéressant de remarquer que pour affirmer l'analyticité d'une fonction il n'est pas nécessaire de la savoir dérivable. On peut *remplacer dans l'énoncé* (2) *les dérivées successives par les différences successives.* Pour ce qui concerne la condition nécessaire c'est bien évident.

Mais il est plus important de montrer qu'il en est de même pour la condition suffisante. Pour le voir, il suffira d'établir ceci:

Une fonction $f(x)$ est nécessairement analytique et développable en série de Taylor de rayon R, si, quel que soit δ, toutes les différences telles que

$$\Delta_1^{(\delta)} = f(x+\delta) - f(x), \quad \Delta_2^{(\delta)} = f(x+2\delta) - 2f(x+\delta) + f(x), \text{ etc.}$$

sont positives dans l'intervalle OR.

En effet, soit

$$\Delta_n^{(\delta)} f(h) = M_n,$$

on aura, en supposant

$$h < R_1 < R,$$

et $R_1 - h$ divisible par δ,

$$\Delta_{n-1}^{(\delta)} f(R_1) > M_n \cdot \frac{(R_1 - h)}{\delta},$$

$$\Delta_{n-2}^{(\delta)} f(R_1) > \frac{M_n}{\delta}\,[\delta + 2\delta + \cdots + (R_1 - h - \delta)] = \frac{M_n (R_1 - h)(R_1 - h - \delta)}{1 \cdot 2\delta^2},$$

. . . .

$$f(R_1) > \frac{M_n (R_1 - h)(R_1 - h - \delta) \cdots (R_1 - h - \overline{n-1}\,\delta)}{n!\,\delta^n}.$$

En posant encore $f(R_1) = M$, on conclut que

$$M_n = \Delta_n^{(\delta)} f(h) < \frac{M\delta^n \cdot n!}{(R_1 - h)(R_1 - h - \delta) \cdots (R_1 - h - \overline{n-1}\,\delta)}. \tag{4}$$

Par conséquent, en écrivant la formule d'interpolation de Newton avec un reste analogue à celui de Lagrange*), on a

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{\delta}\,\Delta_1(0) + \cdots + \frac{x(x-\delta)\cdots(x - \overline{n-2}\,\delta)}{(n-1)!\,\delta^{n-1}}\,\Delta_{n-1}(0) + R_n(x),$$

où

$$R_n(x) = \frac{x(x-\delta)\cdots(x-\overline{n-1}\,\delta)}{n!\,\delta_1^n}\,\Delta_n^{(\delta_1)} f(\xi) \quad (\xi < x,\ \xi < n\delta,\ \delta_1 < \delta).$$

Donc,

$$|R_n(x)| < \frac{x(x-\delta)\cdots(x-\overline{n-1}\,\delta)\,M}{(R_1 - \xi)\cdots(R_1 - \xi - \overline{n-1}\,\delta_1)}.$$

Il en résulte que pour des valeurs de x suffisamment petites ce reste tend vers 0 comme ϱ^n, où $\varrho < 1$. En vertu d'un théorème que j'ai

---

*) La forme du reste que nous donnons ici n'est pas tout à fait celle de Lagrange, mais elle s'obtient par un raisonnement analogue, si, à la place du théorème de Rolle, on fait usage du lemme suivant: *si la fonction continue $f(x)$ admet $(n+1)$ racines dans l'intervalle (a, b), l'équation*

$$\Delta_n^{(\delta)} f(x) = f(x + n\delta) - n f(x + \overline{n+1}\,\delta) + \cdots + (-1)^n f(x) = 0$$

admettra au moins une racine dans cet intervalle, δ étant un nombre quelconque suffisamment petit.

Voici la démonstration de ce lemme: en excluant le cas trivial, où $f(x)$ est identiquement nul, on peut sans restreindre la généralité supposer que la fonction $f(x)$ change de signe $(n+1)$ fois, car dans tous les cas l'une au moins des fonctions $f(x) + \varepsilon$ ou $f(x) - \varepsilon$ jouira de cette propriété pour ε assez petit. En subdivisant alors le segment (a, b) en intervalles égaux δ assez petits, on voit qu'aux points de subdivision la fonction présentera au moins $(n+1)$ variations de signe; donc, $\Delta_1^{(\delta)} f(x)$ présentera en ces points au moins n variations, et ainsi de suite; par conséquent, $\Delta_n^{(\delta)} f(x)$ présente au moins une variation de signe et s'annule nécessairement, c. q. f. d.

Remarquons encore que la forme indiquée du reste de la formule de Newton permet de remplacer la condition (1) de M. Pringsheim par la suivante: *pour qu'une fonction réelle $f(x)$ soit analytique il est nécessaire et suffisant qu'on ait*

$$|\Delta_n^{(\delta)} f(x)| < M \cdot \delta^n \cdot R^n \cdot n!$$

pour toute valeur de δ suffisamment petite.

démontré ailleurs et sur lequel nous reviendrons plus loin (§ 2) il en résulte que $f(x)$ est analytique et, a fortiori, dérivable; donc l'inégalité (4) donne

$$|f^{(n)}(h)| < \frac{Mn!}{(R_1-h)^n}$$

ce qui démontre enfin l'exactitude du théorème.

Voici encore une proposition du même genre dans laquelle on pourrait aussi remplacer les dérivées par les différences.

5. *Si la fonction $f(x)$ de la variable réelle x est telle que chaque point de AB peut être entouré d'un petit intervalle déterminé où l'une au moins des dérivées*

$$f^{(n)}(x),\ f^{(n+1)}(x), \cdots, f^{kn}(x)$$

ne s'annule pas, k étant un nombre donné et n étant quelconque, la fonction est holomorphe dans AB.

Pour démontrer le théorème, je rappelerai que, d'après un résultat de mon mémoire „Sur l'ordre de la meilleure approximation d'une fonction continue par des polynomes"*) *la valeur absolue d'une fonction $f(x)$ quelconque dépasse certainement la valeur*

$$\frac{2M_s}{s!}\left(\frac{h}{2}\right)^s$$

en un point de l'intervalle de grandeur $2h$, si dans cet intervalle on a constamment

$$|f^{(s)}(x)| > M_s.$$

Ceci posé, portons de part et d'autre d'un point H des segments de longueur ε, tels que, par hypothèse, l'une des dérivées $f^{(s+1)}(x)$ de la suite reste différente de zéro sur ces segments. Il en résulte que $f^{(s)}(x)$ varie dans le même sens de $H-\varepsilon$ à $H+\varepsilon$; donc, sur un des segments $(H-\varepsilon, H)$ et $(H, H+\varepsilon)$ on aura

$$|f^{(s)}(x)| > |f^{(s)}(H)|,$$

et sur l'autre l'inégalité contraire.

Par conséquent, si l'on a $|f(x)| \leqq M$, nous aurons

$$M > \frac{2\,|f^{(s)}(x)|}{s!}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^s$$

sur l'un au moins des segments considérés, ou bien

$$|f^{(s)}(x)| < \frac{Ms!}{2}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^s.$$

Si cette inégalité avait lieu pour toutes les valeurs de s, la conclusion serait immédiate, mais supposons seulement que s est un certain nombre

*) Mémoires de Ac. des Sciences de Bruxelles § 42, p. 65.

d'une suite $n, n+1, \cdots, kn$. En écrivant la série de Taylor au point H et en groupant les termes de façon à ce qu'ils commencent par les valeurs considérées de s, on obtient une série de polynomes P_n de degré n (on pose $P_s = 0$, si $n \gtrless s-1$)

$$f(x) = P_1(x) + \cdots + P_n(x) + \cdots$$

qui est convergente et jouit en outre de la propriété que pour toute valeur de n

$$\left| f(x) - \sum_1^n P_n(x) \right| < \frac{M}{2} \left(\frac{4\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{k}-1}$$

dans l'intervalle $(H, H-\delta)$ ou $(H, H+\delta)$; donc $f(x)$ est holomorphe dans l'intervalle correspondant (§ 2). C. q. f. d.

6. Remarque. Si dans l'énoncé du théorème on ne suppose plus k fixe, c'est-à-dire, si l'on admet seulement que dans des intervalles fixes suffisamment petits la fonction a une infinité de dérivées qui ne s'annulent pas, la fonction n'est plus nécessairement analytique, mais, en reprenant la démonstration précédente, *on voit qu'elle admet une infinité de dérivées satisfaisant à la condition*

$$|f^{(n)}(x)| < MR^n n!.$$

Ces fonctions appartiennent elles-mêmes, comme nous le verrons plus loin, à une classe plus générale de fonctions qui doivent être considérées, au point de vue de la théorie générale des fonctions réelles, comme des individus analytiques parfaitement déterminés dans tout leur domaine d'existence par leurs valeurs sur un segment aussi petit que l'on veut. Ces fonctions *quasi-analytiques*, dont le rôle dans l'analyse n'est certainement pas comparable à celui des fonctions analytiques, se présentent naturellement dans une classification complète des fonctions réelles, qui aurait pour base la notion de polynomes.

§ 2.

Prolongement analytique et quasi-analytique des fonctions réelles.

7. Dans mon Mémoire, «Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues» (p. 36 et 94) j'ai montré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ de la variable réelle x soit analytique (holomorphe) dans un intervalle donné AB est qu'il soit possible de la représenter approximativement par des polynomes de degré n, de telle sorte que l'approximation $E_n[f(x)]$ diminue plus rapidement que les termes d'une progression géométrique $M\varrho^n$. Par conséquent, en se plaçant au point de vue réel, et en considérant les puissances entières de x, ou les polynomes, comme les éléments naturels de la théorie des fonctions,

on peut adopter cette propriété comme définition des fonctions analytiques.*) Nous disons *qu'une fonction de la variable réelle $f(x)$ est analytique (holomorphe) sur le segment AB, si quel que soit n, elle est susceptible d'approximation de l'ordre ϱ^n ($\varrho < 1$) par des polynomes de degrés n.*

Il est évident que cette définition est équivalente à la suivante: une fonction $f(x)$ est analytique sur le segment AB, si elle est susceptible d'être développée en une série de polynomes

$$f(x) = P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_n(x) + \cdots, \tag{5}$$

où $P_n(x)$ est un polynome de degré non supérieur à n tel que

$$|P_n(x)| < M\varrho^n,$$

dans l'intervalle AB.

Il est aisé de déduire directement de cette définition la notion de prolongement analytique comme conséquence d'une propriété fondamentale des polynomes (que j'énonce seulement pour les valeurs réelles de x):

*Si $P_n(x)$ est un polynome de degré n inférieur, en valeur absolue, à L sur le segment AB, il reste inférieur**) à LR^n sur le prolongement BB_1 du segment AB, où $R > 1$ tend vers 1, lorsque B_1 tend vers B.*

Par conséquent, si la série (5) converge sur AB comme une progression géométrique, elle convergera également comme une progression géométrique sur un segment déterminé A_1B_1 un peu supérieur à AB et définira ainsi un prolongement de la fonction $f(x)$. De plus, si deux fonctions de la nature indiquée sont égales sur une partie de AB, elles sont identiques; en d'autres termes, *une fonction $f(x)$, pour laquelle la meilleure approximation $E_n[f(x)] < M\varrho^n$ sur AB, est identiquement nulle sur AB, si elle est égale à zéro sur une partie de AB.*

En effet, soit

$$|f(x) - Q_n(x)| < M\varrho^n;$$

si, en particulier, sur une partie CD de AB on a $f(x) = 0$, donc

$$|Q_n(x)| < M\varrho^n$$

sur CD; par conséquent, on pourra fixer un segment C_1D_1 supérieur à CD d'une grandeur déterminée, tel que l'on ait sur ce segment

$$|Q_n(x)| < M\varrho_1^n,$$

*) Pour faire une théorie complète des fonctions analytiques admettant des singularités réelles, il serait indispensable d'adjoindre aux puissances entières de $(x-a)$ les puissances négatives et non entières.

**) Si on pose $AB = 2a$, $BB_1 = h$, on a $R = 1 + \frac{h}{a} + \sqrt{\frac{2h}{a} + \frac{h^2}{a^2}}$. Voir Tchebyscheff, „Sur les fonctions qui s'écartent peu de zéro pour certaines valeurs de la variable" (Oeuvres, t. II) et mon mémoire cité (chapitre I) ainsi que ma note „Sur une propriété des polynomes" (Communic. de la Soc. Math. de Charkow, t. XIV).

où $\varrho < \varrho_1 < 1$. Il en résultera que sur $C_1 D_1$ on a

$$|f(x)| < M\varrho_1^n + M\varrho^n$$

ce qui prouve que $f(x) = 0$ sur ce segment; en répetant un nombre limité de fois le même raisonnement on voit que $f(x) = 0$ sur tout le segment AB.

8. Pour établir que la condition $E_n[f(x)] < M\varrho^n$ exprime que la fonction $f(x)$ est holomorphe sur le segment considéré, j'ai eu recours dans le mémoire cité aux variables complexes. Mais il convient d'établir, sans sortir du domaine réel, que $f(x)$ est développable en chaque point de AB en série de Taylor convergente dans le voisinage de ce point. Pour cela, je remarque d'abord que la série (5), dans laquelle

$$|P_n(x)| < M\varrho^n,$$

est certainement indéfiniment dérivable (l. c. § 23). Par conséquent, pour avoir la valeur de

$$\frac{1}{\varkappa!} f^{(\varkappa)}(a)$$

il suffira de prendre la somme $\frac{1}{\varkappa!} \sum P_n^{(\varkappa)}(a)$ ou bien de développer chaque terme $P_n(x)$ suivant les puissances de $x - a$ et faire la somme des coefficients de $(x-a)^\varkappa$. Or, en se reportant au § 34 de mon mémoire cité, on reconnaît que, si $|P_n(x)| < L$ dans l'intervalle $(a-h, a+h)$, le coefficient considéré, ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{\varkappa!} P_n^{(\varkappa)}(a)$ doit être inférieur*), en valeur absolue, à

$$n \frac{(\varkappa+1) \cdots \left(\frac{n+\varkappa}{2}\right)}{\left(\frac{n-\varkappa}{2}\right)!} \cdot \frac{2^{\varkappa-1} L}{h^\varkappa},$$

en supposant, pour fixer les idées, n et $\varkappa$ de même parité. Mais, en vertu d'une remarque faite plus haut, on peut fixer un même nombre h, quel que soit a sur le segment AB, tel que l'on ait

$$|P_n(x)| < M\varrho'^n \qquad (\varrho < \varrho' < 1)$$

dans l'intervalle $(a-h, a+h)$. Nous en concluons que

$$\left|\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)\right| < \frac{2^{\varkappa-1} M}{h^\varkappa k!} \sum_{n=1}^{n=\infty} n \frac{\left(\frac{n+\varkappa}{2}\right)!}{\left(\frac{n-\varkappa}{2}\right)!} \varrho'^n < \frac{2^{\varkappa-1} M \varkappa}{h^\varkappa (1-\varrho')^{\varkappa+2}},$$

ce qui prouve que $f(x)$ est développable en chaque point de AB en série de Taylor de rayon de convergence non inférieur à $\frac{h(1-\varrho')}{2}$.

*) Ce résultat a été donné, dès 1892, par Wladimir Markoff dans un mémoire „Sur les fonctions qui s'écartent le moins de zéro" écrit en russe et peu connu, dont la traduction paraîtra prochainement dans ce journal.

On sait que la condition $E_n[f(x)] < M\varrho^n$ (quel que soit n) est aussi une conséquence nécessaire de ce que la fonction est développable en chaque point, en série de Taylor convergente. Nous retrouverons d'ailleurs ce résultat comme conséquence d'une propriété plus générale (10).

9. On peut se poser la question suivante: n'est-il pas possible, au point de vue où nous nous plaçons ici, d'étendre le procédé de prolongement à une classe de fonctions plus étendue que les fonctions développables en série de Taylor. En d'autres termes, soit $f(x)$ une fonction non analytique telle que dans un intervalle donné on ait

$$E_n[f(x)] < \alpha_n; \tag{6}$$

est-il possible de choisir la suite de nombres non croissants α_n de la sorte que la condition (6) suffise pour déterminer complètement la fonction $f(x)$ dans l'intervalle entier, si elle est donnée seulement dans une partie quelconque de cet intervalle?

La réponse est affirmative. En effet, admettons que parmi les nombres

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$$

il en existe une infinité qui satisfont à l'inégalité

$$\alpha_n \leqq \varrho^n,$$

où ϱ est un nombre donné inférieur à 1, tandis qu'il existe également une infinité de α_n tels que

$$\alpha_n > \varrho_1^n,$$

quel que soit le nombre donné $\varrho_1 < 1$. Une telle suite sera fournie, par exemple, par les nombres

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n},$$

lorsque $n = 2^{2^\nu}$, et

$$\alpha_n = \frac{1}{2^{n_1}},$$

lorsque

$$n = 2^{2^\nu} + k = n_1 + k < 2^{2^\nu+1}.$$

Ainsi

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n_1}}} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2^{2^\nu}}{2^{2^\nu+1}}} = 1,$$

pour $n = 2^{2^\nu+1} - 1$, et

$$\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = \frac{1}{2},$$

pour

$$n = 2^{2^\nu}.$$

On pourra donc construire des fonctions $f(x)$ telles que $E_n[f(x)] < \alpha_n$ qui ne seront pas analytiques.

Cependant en reprenant le raisonnement fait plus haut, nous voyons que *si deux fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ de cette nature sont égales dans une partie de l'intervalle, elles sont identiques.* En effet, en posant

$$f - f_1 = \varphi,$$

nous voyons qu'il y a des polynomes de degré n, $Q_n(x)$, tels que

$$|\varphi(x) - Q_n(x)| < 2\alpha_n.$$

Sur la partie du segment, où $\varphi(x) = 0$, on aura donc

$$|Q_n(x)| < 2\alpha_n;$$

en prenant les valeurs de n, pour lesquelles $\alpha_n \leqq \varrho^n$, on constate que $Q_n(x)$ tendra encore vers 0 à l'extérieur de la partie considérée; donc $\varphi(x) = 0$ également à l'extérieur de cette partie, et finalement $\varphi(x)$ est identiquement nul sur tout l'intervalle, où l'on a $E_n[\varphi(x)] < 2\alpha_n$.

Les fonctions $f(x)$ qui, comme on le voit, sont à certains égards, comparables aux fonctions analytiques peuvent être appelées fonctions *quasi-analytiques*) relativement à la suite des nombres $n_1, n_2, \cdots, n_\varkappa$ représentant les degrés des polynomes qui s'approchent autant de ces fonctions, comme si elles étaient analytiques.*

10. Théorème. *Si une fonction est quasi-analytique sur deux segments ABC et BCD admettant une partie commune BC, elle est quasi-analytique dans tout l'intervalle $ABCD$.*

Il s'agit de montrer que si l'on a

$$(7)\quad \begin{cases} & |f(x) - P_n(x)| < M\varrho^n \quad \text{sur} \quad ABC \\ \text{et} & |f(x) - Q_n(x)| < M\varrho^n \quad \text{sur} \quad BCD, \end{cases}$$

$P_n(x)$ et $Q_n(x)$ étant des polynomes de degré n, on pourra construire un polynome $R_{2n}(x)$ de degré $2n$ tel que

$$|f(x) - R_{2n}(x)| < M_1\varrho_1^{2n} \quad \text{sur} \quad ABCD.$$

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, réduire à $(-1, h)$ et à $(-h, 1)$ les segments BCD et ABC $(h < 1)$. Donc, l'intervalle total se réduit à l'intervalle $(-1, +1)$.

Considérons le développement de M. Lebesgue

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)} = 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=\infty} \frac{1\cdot 3 \cdots (2\varkappa-3)}{2^\varkappa \cdot k!}(1-x^2)^\varkappa.$$

Pour $|x| > h$, ce développement peut être differentié, de sorte que l'on a

$$\pm 1 = x + x\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2\varkappa-3)}{2^{\varkappa-1}\cdot(\varkappa-1)!}(1-x^2)^{\varkappa-1},$$

*) Il serait intéressant de rechercher, s'il n'existe pas de rapports entre ces fonctions et les généralisations dues à M. Borel.

suivant que x est positif ou négatif. De plus, le reste

$$x\sum_{\varkappa=\varkappa_0+1}^{\varkappa=\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2\varkappa-3)}{2^{\varkappa-1}\cdot(\varkappa-1)!}(1-x^2)^{\varkappa-1}$$

est (pour $|x|\geqq h$) en valeur absolue inférieur à

$$\frac{1}{h}(1-h^2)^{\varkappa_0}.$$

Par conséquent, le polynome de degré $2\varkappa_0-1$,

$$H_{2\varkappa_0-1}(x)=\frac{1}{2}\left[1+x+x\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=\varkappa_0}\frac{1\cdot 3\cdots(2\varkappa-3)}{2^{\varkappa-1}\cdot(\varkappa-1)!}(1-x^2)^{\varkappa-1}\right],$$

représente 0 sur le segment $(-1, -h)$ et 1 sur le segment $(h, 1)$ avec une erreur moindre que

$$\frac{1}{2h}(1-h^2)^{\varkappa_0}.$$

D'autre part, on a, pour $|x|<h$,

$$|H_{2\varkappa_0-1}(x)|<\frac{1}{2}(1+\varkappa_0 h)<\varkappa_0.$$

Cela étant, posons $H_{2\varkappa_0}(x)=H_{2\varkappa_0-1}(x)$, et formons le polynome de degré non supérieur à $2n$,

$$R_{2n}(x)=P_n(x)\cdot H_n(x)+Q_n(x)\cdot(1-H_n(x)).$$

Les inégalités (7) étant vérifiées toutes les deux sur le segment $(-h, +h)$, on en déduit par addition, après les avoir multipliées respectivement par $H_n(x)$ et $(1-H_n(x))$, que

$$|f(x)-R_{2n}(x)|<Mn\varrho^n \tag{8}$$

sur ce segment. D'autre part, en vertu de la propriété des polynomes rappelée au début de ce §, on a sur le segment $(-1, -h)$

$$|P_n(x)|<L_1\left[\frac{(3-h)+2\sqrt{2(1-h)}}{1+h}\right]^n,\quad |Q_n(x)|<L_1,$$

et sur le segment $(h, 1)$

$$|P_n(x)|<L_1,\quad |Q_n(x)|<L_1\left[\frac{(3-h)+2\sqrt{2(1-h)}}{1+h}\right]^n,$$

où $L_1=L+M\varrho^n$, L étant le maximum de $|f(x)|$. Par conséquent, sur $(-h, -1)$,

$$|P_n(x)\cdot H_n(x)|<\frac{L_1}{2h}\left[(3-h+2\sqrt{2(1-h)})\left(\sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\right)\right]^n.$$

Il suffit donc de poser $h=\frac{12}{13}$ pour avoir

$$|P_n(x)\cdot H_n(x)|<\frac{13L_1}{24}\left[\left(3-\frac{12}{13}+2\sqrt{\frac{2}{13}}\right)\frac{1}{5}\right]^n<\frac{13L_1}{24}\left(\frac{3}{5}\right)^n,$$

et de même, sur $(h, 1)$,

$$|Q_n(x)\cdot(1-H_n(x))| < \frac{13L_1}{24}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Par conséquent, sur $(h, 1)$,

$$|R_{2n}(x) - P_n(x)| < k\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

et, sur $(-h, -1)$,

$$|R_{2n}(x) - Q_n(x)| < k\left(\frac{3}{5}\right)^n,$$

k étant une constante.

Donc, en rapprochant ces inégalités des inégalités (7), et en tenant compte de (8), on a dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ une inégalité de la forme

$$|f(x) - R_{2n}(x)| < M_1 \varrho_1^{2n}.$$

En répétant un nombre suffisant de fois la même opération, on démontre le théorème dans toute sa généralité.

11. Le procédé que nous venons d'indiquer pour obtenir un polynome approché sur $ABCD$, lorsqu'on connaît les polynomes approchés relatifs à ABC et à BCD séparément, peut être remplacé par un autre qui n'utilise que les polynomes relatifs à l'un des intervalles et qui ressemble beaucoup à celui du prolongement analytique.

Supposons que dans un certain intervalle situé à gauche d'un point a, nous ayons une fonction quasi-analytique $f(x)$ de telle nature que ses polynomes approchés $P_n(x)$ ne contiennent que des puissances paires de $x - a$. Si nous formons la série

$$f(x) = P_1(x) + (P_2(x) - P_1(x)) + \cdots + (P_n(x) - P_{n-1}(x)) + \cdots,$$

elle sera également convergente à droite de a et elle définira à droite de a une fonction quasi-analytique qui sera le prolongement unique, d'après ce qui précède, de $f(x)$.

Il en sera de même, si les polynomes $P_n(x)$ ne contiennent que des puissances impaires de $x - a$. Enfin, si en mettant les polynomes $P_n(x)$ sous la forme

$$P_n(x) = P_n^{(1)}(x) + P_n^{(2)}(x),$$

où $P_n^{(1)}(x)$ et $P_n^{(2)}(x)$ ne contiennent respectivement que des puissances paires et des puissances impaires de $x-a$, on reconnaît que les polynomes $P_n^{(1)}(x)$ et $P_n^{(2)}(x)$ définissent respectivement deux fonctions quasi-analytiques $f_1(x)$ et $f_2(x)$, relatives à la même suite de nombres, on aura

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

et le prolongement de $f(x)$ sera représenté par la même somme (et, d'après ce qui précède, sans ambiguité).

Nous allons démontrer que cette dernière circonstance se présente

nécessairement, si le prolongement quasi-analytique d'une fonction $f(x)$, définie à gauche de a, est possible.

En effet, soit $f(x)$ une fonction quasi-analytique définie à gauche et à droite du point a dans l'intervalle $(-\delta+a,\ a+\delta)$.

Soit

$$|f(x)-P_n(x)|<M\varrho^n$$

dans cet intervalle. Or, la fonction

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(2a-x)}{2}$$

est paire et la fonction

$$f_2(x)=\frac{f(x)-f(2a-x)}{2}$$

est impaire par rapport à $(x-a)$, et elles sont toutes les deux quasi-analytiques. Notre fonction $f(x)$ peut donc, si elle existe des deux cotés de a, se mettre sous la forme indiquée

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x).$$

On a donc la règle suivante pour décider, si une fonction quasi-analytique définie dans un intervalle ab est prolongeable en déhors de cet intervalle, et pour effectuer ce prolongement dans tous les cas, où il est possible.

(On peut sans restreindre la généralité réduire le point a à l'origine.)

Si $f(x)$ est une fonction quasi-analytique dans l'intervalle $(-b,\ 0)$, il faut rechercher, si parmi les polynomes $P_n(x)$, tels que

$$|P_n(x)-f(x)|<M\varrho^n$$

dans l'intervalle $(-\delta,\ 0)$, où $\delta\leqq b$, il y en a qui, étant mis sous la forme

$$P_n(x)=P_n^{(1)}(x^2)+xP_n^{(2)}(x^2),$$

conduisent à des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, telles que

$$|f_1(x)-\ P_n^{(1)}(x^2)|<M_1\varrho_1^n,$$
$$|f_2(x)-xP_n^{(2)}(x^2)|<M_1\varrho_1^n,$$

dans l'intervalle $(-\delta,\ 0)$.

Si c'est possible, les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont indépendentes du choix des polynomes $P_n(x)$, et la fonction quasi-analytique

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

sera prolongée sans ambiguité et représentée avec une approximation $M\varrho^n$ dans l'intervalle $(-\delta,\ +\delta)$ par tous les polynomes $P_n(x)$ jouissant de la propriété indiquee. Si ce n'est pas possible la fonction considerée ne peut pas être prolongée quasi-analytiquement à droite de 0.

12. On aura en particulier une fonction $f(x)$ quasi-analytique, si sur un segment donné la condition de *M.* Pringsheim

$$(1)\qquad |f^{(n)}(x)|<MR^n\cdot n!,$$

sans être vérifiée pour toute valeur de n, est vérifiée pour une infinité de valeurs de n. Ce sont alors les développements de Taylor qui, devenant convergents dans des intervalles finis après un groupement convenable des termes, donnent la représentation de la fonction quasi-analytique correspondante.

Soit, par exemple, la série

$$f(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}x^{2^{2^s}}(1-x^2)^{2^{2^s+1}-2}=\sum_{s=0}^{s=\infty}R_s(x)$$

qui devient une sèrie de Taylor, si on développe chaqu'un de ses termes suivant les puissances de x. Cette série de Taylor sera certainement divergente quel que petit que soit x, car, en posant $x=\frac{\sqrt{-1}}{s}$, on voit que l'ensemble des termes contenus dans $R_s(x)$ devient égal à

$$\frac{\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{2^{2^s+1}-2}}{s^{2^{2^s}}},$$

c'est à dire infiniment grand avec s. Cependant, sur le segment réel $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ la série donnée converge et réprésente une fonction quasi-analytique (elle est d'ailleurs analytique sur tout ce segment, excepté l'origine). En effet, en désignant par n_s le degré de

$$R_s(x)=x^{2^{2^s}}(1-x^2)^{2^{2^s+1}-2},$$

on a

$$n_s=2^{2^s+1}-1+2^{2^s}<2^{2^s+1},$$

et, par conséquent, en posant

$$P_s(x)=\sum_{m=0}^{m=s}R_m(x),$$

on aura

$$|f(x)-P_s(x)|<2\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{2^s+1}}<2\left(\frac{1}{2}\right)^{n_s},$$

dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

On vérifie sans difficulté que la fonction $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle C de rayon 1, ayant le point 1 pour centre; la circonférence de C est une coupure naturelle. Nous avons donc là un exemple de prolongement quasi-analytique au delà d'une frontière naturelle d'une fonction analytique.

La fonction quasi-analytique $f(x)$ que nous venons de considérer est régulièrement analytique à l'exception d'un point singulier. Mais on peut facilement construire des exemples de fonctions quasi-analytiques qui ne sont nulle part analytiques et même ne sont pas dérivables.

Soit d'abord la fonction

$$\varphi(x) = \sum \frac{\cos n!\ \mathrm{arc}\cos x}{a^{(n-1)!}} \qquad (a > 1)$$

sur le segment $(-1, +1)$.

On a manifestement

$$E_m[\varphi(x)] = \frac{1}{a^{n!}} + \frac{1}{a^{(n+1)!}} + \cdots < \frac{2}{a^{n!}},$$

si $(n+1)! > m \geqq n!$. Ainsi, il y a une infinité de valeurs de m, pour lesquelles

$$E_m < \frac{2}{a^m},$$

et il y en a également qui ne satisfont à aucune relation déterminée

$$E_m < \varrho^m \qquad (\varrho < 1).$$

La fonction $\varphi(x)$ sans être analytique est infiniment dérivable; mais voici une autre fonction quasi-analytique

$$\psi(x) = \sum \frac{\cos F(n)\ \mathrm{arc}\cos x}{F(n)}$$

qui n'est pas dérivable*), si l'on définit $F(n)$ par la condition que

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(n+1) = 2^{F(n)}.$$

D'après ce qui précède, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ seraient entièrement déterminées sur tout le segment $(-1, +1)$, si on se donnait leurs valeurs dans une partie quelconque de ce segment, en ajoutant la propriété que la fonction doit être quasi-analytique.

On voit que les fonctions quasi-analytiques se présentent sous des formes simples; cependant ces fonctions, dont la meilleure approximation E_m décroît d'une façon très irregulière ne se sont pas rencontrées jusqu'à présent dans les applications et c'est pour cela qu'actuellement elles ne présentent qu'un interêt purement théorique.

---

*) Toutes les fonctions quasi-analytiques satisfont naturellement à des conditions généralisées de Lipschitz dont le degré diffère de l'ordre aussi peu que l'on veut. (Voir ma communication «Sur les recherches récentes etc.» International Congress of Mathematicians. Cambridge 1912.)

§ 3.

Conditions nécessaires pour le prolongement univoque des fonctions réelles.

13. Nous venons de voir, qu'il suffit qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $E_n f(x) < \varrho^n$, où $\varrho < 1$, pour que la fonction $f(x)$ puisse être considérée comme un élément analytique parfaitement déterminé partout, où l'inégalité indiquée est conservée, du moment que $f(x)$ est donnée dans un intervalle aussi petit que l'on veut.

Cette propriété est essentiellement liée à l'inégalité $E_n[f(x)] < \varrho^n$, car on peut démontrer que, *si cette inégalité est remplacée par une autre un peu plus large*

$$E_n f(x) < \varrho^{n^{1-\varepsilon}}, \qquad (\varepsilon > 0) \tag{9}$$

le prolongement de la fonction $f(x)$ *peut être effectué d'une infinité de façons*, de sorte que la fonction $f(x)$ cesse d'être un individu analytique determiné par cette propriété, quoiqu'elle possède naturellement des dérivées de tous les ordres (si l'inégalité a lieu, quel que soit n).

Il suffira, évidemment, de démontrer qu'une fonction $f(x)$, satisfaisant à l'inégalité (9) dans un intervalle AB, peut être nulle sur une partie de AB sans être nulle identiquement. Notre affirmation sera donc démontrée, si nous construisons une fonction s'annulant sur une partie du segment $(-1, +1)$

$$f(x) = f(\cos\theta) = \varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta,$$

telle que

$$|A_n| < \varrho^{n^{1-\varepsilon}},$$

car alors on aura aussi, à partir d'une valeur assez grande de n,

$$E_n[f(x)] < \varrho_1^{n^{1-\varepsilon}},$$

ϱ_1 étant un nombre fixe ($\varrho < \varrho_1 < 1$).

Nous sommes ainsi amenés à former une fonction $\varphi(\theta)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ qui satisfasse aux inégalités

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\theta) \cos n\theta \, d\theta \right| < \varrho^{n^{1-\varepsilon}} \tag{10}$$

et qui, sans être identiquement nulle, s'annule sur une partie de l'intervalle. D'après ce que nous avons vu plus haut, ceci serait impossible, si on posait $\varepsilon = 0$. Or, si nous prenons une fonction $\varphi(\theta)$ indéfiniment

dérivable et asymptotiquement nulle pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, nous constatons que

$$\left| \int_0^\pi \varphi(\theta) \cos n\theta \, d\theta \right| < \frac{M_\varkappa \pi}{n^\varkappa},$$

où $M_\varkappa \geqq |\varphi^{(\varkappa)}(\theta)|$ dans l'intervalle $(0, \pi)$.

Par conséquent, la fonction $\varphi(\theta)$ satisfera aux inégalités (10), pourvu que, en choisissant convenablement $\varkappa$, on ait

$$M_\varkappa < n^\varkappa \varrho^{n^{1-\varepsilon}}.$$

Or, on pourra bien satisfaire à cette dernière inégalité avec une valeur déterminée de $\varrho < 1$, si la fonction $\varphi(\theta)$ est telle que ses dérivées successives satisfont aux conditions

$$(11) \qquad |\varphi^{(k)}(\theta)| < (R\varkappa)^{\frac{\varkappa}{1-\varepsilon}} = M_\varkappa$$

(qui se réduisent aux inégalités de M. Pringsheim, lorsque $\varepsilon = 0$). En effet, il faut déterminer ϱ de sorte que

$$n^\varkappa \varrho^{n^{1-\varepsilon}} > (R\varkappa)^{\frac{\varkappa}{1-\varepsilon}},$$

ou bien

$$n \varrho^{\frac{n^{1-\varepsilon}}{\varkappa}} > (R\varkappa)^{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

ou, enfin, en posant $\lambda = \frac{n^{1-\varepsilon}}{\varkappa}$,

$$\varrho^\lambda > \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

Donc, en attribuant à λ une valeur déterminée supérieure à R, on obtient une valeur fixe < 1 pour ϱ.

Il est facile de voir, d'autre part, que, si $\varphi_1(\theta)$ et $\varphi_2(\theta)$ satisfont aux conditions (11), leur produit

$$\varphi(\theta) = \varphi_1(\theta) \cdot \varphi_2(\theta)$$

satisfera à des conditions de la même nature, puisque

$$\varphi^{(\varkappa)}(\theta) = \sum_{i=0}^{i=k} C_\varkappa^i \varphi_1^{(i)}(\theta) \varphi_2^{(\varkappa-i)}(\theta).$$

Ainsi finalement, grâce à cette remarque, nous aurons une fonction $f(x)$, nulle sur une partie d'un segment, sans être nulle identiquement, et telle que $E_n f(x) < \varrho^{n^{1-\varepsilon}}$, si nous savons construire une fonction $\varphi(\theta)$, asymptotiquement nulle pour $\theta = 0$, satisfaisant aux conditions

$$(11) \qquad |\varphi^{(\varkappa)}(\theta)| < (\varkappa R)^{\frac{\varkappa}{1-\varepsilon}}$$

dans un intervalle comprenant l'origine, et nulle seulement d'un coté de l'origine.

14. Pour la construction de la fonction $\varphi(\theta)$, asymptotiquement nulle à l'origine et satisfaisant à (11) on pourra utiliser les équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples. Je me bornerai à construire cette fonction en supposant $s \geqq \frac{1}{2}$.

D'une façon générale, pour $s \geqq \frac{1}{\varkappa}$, il faudrait envisager l'équation

$$\frac{\partial^\varkappa z}{\partial x^\varkappa} = \frac{\partial^{\varkappa-1} z}{\partial y^{\varkappa-1}} \tag{12}$$

et construire une solution z qui sur une partie de l'axe des x s'annule ainsi que $\frac{\partial z}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^{\varkappa-2} z}{\partial y^{\varkappa-2}}$. Pour une valeur déterminée de x, cette solution, considérée comme fonction de y, sera justement une fonction de la nature voulue.

Examinons donc de plus près le cas de $\varkappa = 2$.

La solution de l'équation (12)

$$z = \sum e^{-n^2 y}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

qui pour $y = 0$ se réduit à une fonction quelconque

$$\sum A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

nulle sur un segment AB comprenant l'origine, donne lieu, pour $x = 0$, à une fonction de y

$$z = \varphi(y) = \sum A_n e^{-n^2 y}, \tag{13}$$

asymptotiquement nulle à l'origine. Pour démontrer que les dérivées successives de $\varphi(y)$ satisfont à des inégalités de la forme

$$|\varphi^{(\varkappa)}(y)| < (\varkappa R)^{2\varkappa}, \tag{11 bis}$$

si on pose $\varphi(y) = 0$, pour $y < 0$, je rappellerai un résultat relatif aux équations du type parabolique que j'ai donné il y a plusieurs années*) sous une forme plus générale: *il existe à l'intérieur d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes une et une seule solution de l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ *qui prend des valeurs données sur les deux côtés latéraux et le côté inférieur du rectangle.*

Par conséquent, si nous construisons une solution z_1 qui se confond avec z pour $x = \pm h$, $|y| \leqq \Pi$ (on remplace bien entendu, z par 0, si

*) Comptes Rendus 140, Janvier 1905. Les résultats de cette Note ont été retrouvés et complétés par d'autres géomètres et, en particulier, par M. M. Holmgren et Block dans une série d'articles de l'*Arkiv för Matematik* (1910—1912).

$y < 0$, pourvu que l'intervalle $(+h, -h)$ soit intérieur à AB), et pour $y = -\Pi$: on aura identiquement $z = z_1$ à l'intérieur du rectangle formé par les droites $x = \pm h$, $y = \pm \Pi$. On en conclut que z est susceptible d'être mis sous la forme d'une série convergente à l'intérieur de ce rectangle

$$z = \sum e^{-x\sqrt{n}} (c_n \cos ny + d_n \sin ny)$$
$$+ e^{x\sqrt{n}} (c_n' \cos ny + d_n' \sin ny) + a_n e^{-n^2 y} \sin \frac{n(x-h)}{2h} \pi$$

où c_n, d_n, c_n', d_n' ne sont pas tous nuls. A cause de la convergence à l'intérieur du rectangle considéré, on a

$$|a_n| < Me^{-n^2\Pi}, \quad |c_n| < Me^{-h\sqrt{n}}, \quad |d_n| < Me^{-h\sqrt{n}},$$
$$|c_n'| < Me^{-h\sqrt{n}}, \quad |d_n'| < Me^{-h\sqrt{n}},$$

M étant une constante fixe. Notre fonction $\varphi(y)$ qu'on obtient en faisant $x = 0$, se mettra donc sous la forme

$$(14) \qquad z = \sum a_n' e^{-n^2 y} + (c_n + c_n') \cos ny + (d_n + d_n') \sin ny \qquad (|a_n'| \leqq |a_n|).$$

La somme $\sum a_n' e^{-n^2 y}$ est une fonction analytique, dont le rayon de convergence, pour $y \geqq 0$, est supérieur ou égal à Π; elle satisfait donc non seulement à l'inégalité (11^{bis}), mais même à la condition de M. Pringsheim. Quant à la somme

$$u = \sum (c_n' + c_n) \cos ny + (d_n + d_n') \sin ny,$$

on a manifestement

$$|u^{(x)}(y)| < 4M \sum_{n=1}^{\infty} n^x e^{-h\sqrt{n}}.$$

Or cette dérnière somme est du même ordre de grandeur que

$$\int_0^\infty x^x e^{-h\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^\infty x^{2x+1} e^{-hx} dx = \frac{2(2x+1)!}{h^{2x+2}}.$$

On en conclut, en tenant compte de la formule de Stirling, que la fonction z donnée par la formule (14) ou (13) satisfait bien à l'inégalité (11^{bis}) et jouit, par conséquent, de toutes les propriétés voulues.

Les reflexions qui précèdent tendent à montrer que les fonctions analytiques occupent une place tout à fait à part parmi les fonctions réelles: ce sont les seules fonctions susceptibles d'un prolongement, pour ainsi dire, organique (si on neglige les fonctions quasi-analytiques). On peut, en effet, présenter encore de la façon suivante la propriété caractéristique des fonctions analytiques. *Si une fonction $f(x)$ donnée dans un intervalle AB jouit de la propriété qu'une variation quelconque de $f(x)$ sur une partie seulement de AB a pour effet d'augmenter l'ordre de grandeur de la meilleure approximation*

$E_n[f(x)]$ pour toutes les valeurs de n assez grandes, elle est analytique; réciproquement, si $f(x)$ est une fonction analytique quelconque, elle réalise le minimum de $E_n[f(x)]$ pour n assez grand, c'est à dire qu'une variation partielle quelconque de $f(x)$ fera augmenter tous les $E_n[f(x)]$ pour n assez grand.

Je rappellerai, en terminant, qu'à un tout autre point de vue, on retrouve également le prolongement analytique, comme le seul prolongement naturel des fonctions réelles. Je fais allusion au principe énoncé dans ma Note*) „Sur la déformation des surfaces" qui, ayant été démontré dans des cas étendus, n'a jamais été mis en défaut: *Si une fonction réelle et dérivable un certain nombre de fois, $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$, assujettie à vérifier une équation analytique aux dérivées partielles, peut être, à cause de cette équation, prolongée sans ambiguité par rapport à une de ces variables, ce prolongement est analytique.*

---

*) Math. Ann. 1905.

Über die analytische Natur der Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten.*)

Von

Richard Fuchs in Berlin-Halensee.

Herr Painlevé hat zuerst (Acta Math. 25, S. 1 ff.) gezeigt, daß sich alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten auf eine Anzahl von Typen zurückführen lassen. Bei meinen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit vier wesentlich singulären Stellen (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris 141 (1905), p. 555; Math. Ann. 63 (1906), S. 301 ff.; Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft IX (1910), S. 77) habe ich dann auf einen eigentümlichen Zusammenhang aufmerksam gemacht, der zwischen den Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten und der Theorie der linearen Differentialgleichungen besteht. Dabei bin ich auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten

$$
\text{(A)}\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right]\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{2}\,\frac{y(y-1)}{x(x-1)(y-x)}
$$
$$
=\frac{1}{2}\,\frac{y(y-1)(y-x)}{x(x-1)}\left[a-b\frac{x}{y^2}+c\frac{x-1}{(y-1)^2}-d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right]
$$

geführt worden, die in den Tabellen des Herrn Painlevé nur in dem Falle $a=b=c=d=0$ vorhanden war, und die dann auch Herr Gambier (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris 142 (1906), p. 268; Acta Math. 33 (1910), S. 1 ff.) bei einer Revision der Painlevéschen Methoden zur Aufstellung dieser Tabelle aufgefunden hat. Herr Painlevé hat dann (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris 143 (1906), p. 1111) gezeigt, daß sich alle übrigen Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten aus (A) durch einen eigentümlichen Grenzübergang erhalten lassen.

Auf den Zusammenhang zwischen der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der Theorie der Differentialgleichungen mit festen

*) Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in den Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 20. Dez. 1913, erschienen. Vgl. dazu die Fußnote auf S. 489 der vorliegenden Arbeit.

kritischen Punkten hat in einer Reihe von Untersuchungen auch Herr Schlesinger hingewiesen, die in seiner Arbeit (Journal f. d. r. u. a. Mathematik 141 (1912), S. 96ff.) zusammengefaßt sind. Er findet in expliziter Form die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Fundamentalsubstitutionen eines linearen Differentialsystems von einem der singulären Punkte unabhängig sind, in der Form eines Differentialsystems. Es zeigt sich, daß die Lösungen dieses Systems feste kritische Punkte und bewegliche Pole besitzen, und daß darin alle bisher bekannten Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten als Spezialfälle enthalten sind.

Meine Untersuchungen über Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten sollen die Grundlage zur Aufstellung der Substitutionsgruppe für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung bilden, wie ich sie für die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit vier wesentlich singulären Stellen in dem Falle, wo an jeder singulären Stelle die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung einander gleich sind, bereits (Gött. Nachr. 30. April 1910; Math. Ann. Bd. 70, S. 525ff.) durchgeführt habe. Es werden darum alle Betrachtungen an die Differentialgleichung selbst, mit Vermeidung der Theorie der linearen Differentialgleichungen, angeschlossen.

Im folgenden entwickele ich die Theorie der Gleichung (A), die den allgemeinsten Typus von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten darstellt. Ich gebe zunächst eine analytische Darstellung ihres allgemeinen Integrals in der Umgebung eines der festen kritischen Punkte 0, 1, ∞. Es zeigt sich, daß dieses allgemeine Integral z. B. in der Umgebung von $x = 0$ in der Form

$$y = xy_0 + x^2y_1 + \cdots$$

erscheint, wo $y_0, y_1, \cdots$ einfache rationale Funktionen von αx^γ sind, wenn α und γ die beiden Integrationskonstanten sind, und zwar so, daß y für $x = 0$ verschwindet. Wenn $\gamma = 0$ gewählt wird, tritt an Stelle von x^γ der Wert $\log x$. Das allgemeine Integral erhält für $x = 1$ den Wert 1 und wird für $x = \infty$ von endlicher Ordnung unendlich. Da neben den kritischen Punkten nur noch Pole vorhanden sind, für die das allgemeine Integral von erster Ordnung unendlich wird, so erkennt man, daß das allgemeine Integral überhaupt keine Unbestimmtheitsstellen, an denen es von unendlich hoher Ordnung unendlich werden könnte, besitzen kann. Die analytische Natur der Lösungen unserer Differentialgleichung steht somit der Natur der Lösungen von linearen Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse sehr nahe, mit dem Unterschiede allerdings, daß die vorkommenden Exponenten sich nicht aus den Koeffizienten der Differen-

tialgleichung ergeben, sondern die Integrationskonstanten enthalten, d. h. also mit den Anfangswerten „verschiebbar" sind.

Es folgt eine eigentümliche Darstellung, bei der das allgemeine Integral nach positiven ganzen Potenzen von a, b, c, d entwickelt wird. Bei dieser Darstellung werden die Koeffizienten der Entwicklung durch das allgemeine Integral derjenigen Differentialgleichung berechnet, die aus (A) durch $a = b = c = d = 0$ hervorgeht, und die sich durch elliptische Funktionen integrieren läßt. Mit Hilfe dieser Darstellung wird dann der Zusammenhang zwischen den Konstanten der verschiedenen Entwicklungen in der Umgebung der drei Verzweigungsstellen $0, 1, \infty$ festgestellt. Ferner lassen sich daraus einige Folgerungen über die Natur derjenigen Stellen ziehen, an denen die Lösungen unserer Differentialgleichung die Werte $0, 1, x, \infty$ annehmen, die mit den Integrationskonstanten verschiebbar sind.

Wie ich mich überzeugt habe, läßt sich die angewendete Methode zur Darstellung des allgemeinen Integrals in der Umgebung der Verzweigungsstellen noch in vielen anderen Fällen anwenden, worauf ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen werde. Die Anwendungen auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen sollen den Gegenstand einer nachfolgenden Arbeit bilden.

I.

Ansatz zur Herstellung einer Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$.

Wir legen unseren Betrachtungen den allgemeinsten der Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten

$$\text{(A)}\quad \frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right]\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{y(y-1)}{x(x-1)(y-x)}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a - b\,\frac{x}{y^2} + c\,\frac{x-1}{(y-1)^2} - d\,\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right]$$

zugrunde, wo a, b, c, d Konstanten bedeuten. Die Lösungen dieser Differentialgleichung können sich*) nur in der Umgebung der festen Stellen $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ verzweigen oder daselbst unbestimmt werden. Im übrigen besitzen die Lösungen von (A) noch unendlich viele mit der Wahl der Integrationskonstanten veränderliche Pole, an denen sie den Charakter rationaler Funktionen haben. Legt man also in der Ebene der komplexen Variablen x von $x = 0$ und $x = 1$ je einen Verzweigungsschnitt nach $x = \infty$, so ist in der so zerschnittenen Fläche T' jedes Integral von (A) eine eindeutige Funktion von x.

---

*) Vgl. Painlevé, C. R. de l'Ac. des Sc. Paris 143 (1906), S. 1114, und auch meine Arbeit: Sitzungsber. der Berl. Math. Gesellsch. 9, 4. Stück, S. 77 ff.

Wir wollen nun zunächst eine Lösung von (A) suchen, von der Art, daß

(1) $$\lim_{x=0} y = 0, \quad \lim_{x=0} x\frac{dy}{dx} = 0.$$

Zu dem Zwecke machen wir den folgenden Ansatz:

(2) $$y = y_0 x + y_1 x^2 + y_2 x^3 + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten $y_0, y_1, y_2, \cdots$ geeignet zu wählende Funktionen von x bedeuten sollen und setzen die Entwicklung (2) in (A) ein.

Die Übersicht wird dabei erhöht, wenn man zuvor

(3) $$y = ux, \quad u = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \cdots$$

setzt. Dann genügt u der Gleichung

(A′) $$u(u-1)(1-ux)x^2u'' + u(u-1)xu'\left[\frac{1}{1-x}(1-ux)+ux\right]$$
$$-\frac{1}{2}[(2u-1)(1-ux)-xu(u-1)]x^2u'^2$$
$$=\frac{1}{2}\left[-a\frac{x}{(x-1)^2}u^2(u-1)^2(1-ux)^2+\frac{b}{(x-1)^2}(u-1)^2(1-ux)^2\right.$$
$$\left.+\frac{d}{x-1}u^2(1-ux)^2-(c-1)\frac{x}{x-1}u^2(u-1)^2\right].$$

Die jetzt noch vorkommenden Ausdrücke $\frac{1}{x-1}$ und $\frac{1}{(1-x)^2}$ denken wir uns in der Umgebung von $x=0$ nach Potenzen von x entwickelt. Indem wir nun die Entwicklung (3) für u in (A′) einsetzen, fassen wir alle Glieder, die formal mit x^κ multipliziert sind zusammen und setzen dabei fest, daß $x\frac{d}{dx}(x^\lambda y_\lambda)$ und $x^2\frac{d^2}{dx^2}(x^\lambda y_\lambda)$ zu den Gliedern mit dem Exponenten λ hinzuzuzählen sind. Die Möglichkeit der gliedweisen Differentiation und der später noch zu brauchenden Integration der Reihe (3) wird natürlich nachher zu erweisen sein.

Bei dem angegebenen Ansatz wird sich (A′) in eine Gleichung

(4) $$W_0 + W_1 x + W_2 x^2 + \cdots = 0$$

verwandeln und diese Gleichung wird offenbar erfüllt sein, wenn wir einzeln

(5) $$W_i = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, \infty$$

setzen. Dabei zeigt es sich nun, daß $W_0 = 0$ eine Gleichung zur Bestimmung von y_0 und allgemein $W_i = 0$ eine Gleichung zur Bestimmung von y_i liefert. Zur Bestimmung von y_0 findet man aus $W_0 = 0$

(6) $$y_0(y_0-1)x^2y_0'' + y_0(y_0-1)xy_0' - \frac{1}{2}(2y_0-1)x^2y_0'^2$$
$$= \frac{1}{2}b(y_0-1)^2 - \frac{1}{2}dy_0^2.$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall eines anderen Typus von Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten*) und kann leicht in expliziter Form integriert werden. Sie besitzt nämlich ein erstes Integral

$$\text{(6a)} \qquad \frac{x^2 y_0'^2}{y_0(y_0-1)} + \frac{b}{y_0} - \frac{d}{y_0-1} = \gamma^2,$$

wo γ^2 eine willkürliche Konstante bedeutet.

Die Gleichung (6a) hat dann die Lösung:

$$\text{(7)} \qquad y_0 = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{\gamma^2} + \frac{b}{\gamma^2}\right) + \frac{D}{16}\xi,$$

wenn

$$\text{(8)} \qquad \xi = \alpha x^{\gamma},$$

wo α eine neue Integrationskonstante ist, und

$$\text{(9)} \quad D = \left(1 + \frac{\sqrt{b}}{\gamma} + \frac{\sqrt{d}}{\gamma}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{b}}{\gamma} - \frac{\sqrt{d}}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{b}}{\gamma} + \frac{\sqrt{d}}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{b}}{\gamma} - \frac{\sqrt{d}}{\gamma}\right)$$

gesetzt wird. Wir können dabei annehmen, daß der reelle Teil von γ positiv ist; sollte er nämlich negativ sein, so setze man $\gamma_1 = -\gamma$, $D\alpha = \frac{1}{\alpha_1}$, $\xi_1 = \alpha_1 x^{\gamma_1}$, wodurch y_0 in einen Ausdruck genau derselben Form mit ξ_1 übergeht, worin dann der reelle Teil von γ_1 positiv ist. Im Hinblick auf das Folgende und auf die Aufgabe (1) wollen wir aber überdies festsetzen, daß der reelle Teil von γ der Ungleichung

$$\text{(10)} \qquad 0 \leqq \Re(\gamma) \leqq 1$$

genügt und wollen die Werte $\gamma = 0$ und $\gamma = 1$ zunächst ausschließen.

Die Gleichungen $W_i = 0$ geben dann zur Bestimmung von y_i lineare nicht homogene Differentialgleichungen, die aber in dieser Form wenig übersichtlich werden. Wir wollen daher die Gleichung (A') zunächst in einer für alles Folgende wichtigen Form schreiben.

II.

Umformung der Differentialgleichung. Genaue Berechnung der Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$.

Setzt man

$$\text{(1)} \qquad \frac{x^2 u'^2}{u(u-1)} + \frac{b}{u(x-1)^2} - \frac{d}{u-1} = Y,$$

so kann die Gleichung (A') I auch so geschrieben werden:

$$\text{(B)} \qquad \frac{dY}{dx} = PY + Q,$$

*) Vgl. z. B. Gambier, Acta Math. 33, S. 4, Nr. V der dort angegebenen Tabelle, in der unsere Gleichung (A) als Nr. VI auftritt.

wenn

$$P = \frac{1}{x-1}[xu'(1-x+ux)+2(u-1)],$$

$$(2)\qquad Q = \frac{xu'}{(x-1)^2}\left[-a(1-ux) - \frac{c(x-1)}{1-ux} + \frac{(x-1)(1+x^2u')^2}{1-ux}\right] + \frac{x^2u'+2}{x-1}\left[d - \frac{b}{(x-1)^2}\right]$$

gesetzt wird. Denken wir uns $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{(1-x)^2}$, $\frac{1}{1-ux}$, was für hinreichend kleine Werte von x und u möglich ist, nach Potenzen von x entwickelt und dann für u die Reihe (3) I

$$(3)\qquad u = y_0 + y_1 x + \cdots$$

eingesetzt, so werden sich beim Zusammenfassen aller Glieder, die formal mit gleicher Potenz von x multipliziert sind, für P und Q Entwicklungen der Form:

$$(4)\qquad \begin{aligned} P &= p_0 + p_1 x + \cdots, \\ Q &= q_0 + q_1 x + \cdots \end{aligned}$$

ergeben, wo sich die Größen p_i und q_i aus $y_0, y_1, \cdots, y_i$ und xy_0', $xy_1', \cdots, xy_i'$ durch die Operationen der Addition und Multiplikation berechnen.

Aus (B) folgt dann für y eine Entwicklung

$$(5)\qquad Y = Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2 + \cdots$$

und zwar muß für Y_0 nach (6a) I der Wert γ^2 genommen werden. Wir lassen dabei den Exponenten eines Gliedes bei der Integration um 1 größer werden. Die Berechnung der Größen $Y_\varkappa$ erfolgt dann aus

$$(6)\qquad Y = \gamma^2 + \int_0^x(\gamma^2 P + Q)dx + \int_0^x P\,dx\int_0^x(\gamma^2 P + Q)dx + \int_0^x P\,dx\int_0^x P\,dx\int_0^x(\gamma^2 P + Q)dx + \cdots,$$

wobei hier, wie im folgenden stets, alle Integrationen in der Ebene T auszuführen sind.

Bei der Berechnung von $Y_\varkappa$ hat man auf der rechten Seite im einfachen Integral nur $p_0, p_1, \cdots, p_{\varkappa-1}, q_0, q_1, \cdots, q_{\varkappa-1}$, im zweifachen $p_0, p_1, \cdots, p_{\varkappa-2}, q_0, q_1, \cdots, q_{\varkappa-2}$, usw. im $(\varkappa-1)$-fachen p_0, p_1, q_0, q_1 und im $\varkappa$-fachen nur p_0, q_0 zu berücksichtigen, während das $(\varkappa+1)$-fache und die noch mehrfachen Integrale überhaupt keinen Beitrag mehr geben. Es berechnet sich also $Y_\varkappa$ aus $y_0, y_1, \cdots, y_{\varkappa-1}, xy_0', xy_1', \cdots, xy_{\varkappa-1}'$.

Wir wollen übrigens Y noch in der Form

$$(7)\qquad Y = \gamma^2 + xZ, \quad Z = Y_1 + Y_2 x + \cdots$$

schreiben und wollen dann diesen Wert in (1) einsetzen:

$$x^2 u'^2 + b \frac{u-1}{(x-1)^2} - du = \gamma^2 u(u-1) + xZu(u-1). \tag{8}$$

Differentiiert man nun (8) nach x, so heben sich alle Glieder ohne den Faktor u' heraus und man erhält:

$$x^2 u'' + xu' - \gamma^2 u = \frac{1}{2}(-b + d - \gamma^2) + \frac{1}{2} xM, \tag{9}$$

wenn

$$\begin{aligned} M = (2u-1)Z &+ \frac{xu'}{x-1}[xu'(1-x+ux) + 2(u-1)] \\ &+ \frac{u(u-1)}{(x-1)^2}\left[-a(1-xu) - \frac{c(x-1)}{1-xu} + \frac{(x-1)(1+x^2u')}{1-xu}\right] \\ &+ \frac{b}{x-1}\left[1 + \frac{u(1-xu)}{(x-1)^2} - \frac{d}{x-1}\right][xu + u(1-xu)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus (9) folgt durch Integration:

$$u = y_0 + \frac{1}{2}\xi \int_0^x \frac{dx}{x\xi^2} \int_0^x M\xi\, dx + c_1 \xi + c_2 \xi^{-1}, \tag{11}$$

wo wieder $\xi = ax^\gamma$ gesetzt ist und c_1 und c_2 zwei beliebige Konstanten sind. Wenn aber dieser Wert u zugleich (8) oder (1) d. h. (A′) I genügen soll, so müssen c_1 und c_2 gleich Null gesetzt werden. Wir erhalten also als Lösung von (A) I für $y = ux$

$$y = xy_0 + \frac{1}{2} x\xi \int_0^x \frac{dx}{x\xi^2} \int_0^x M\xi\, dx. \tag{C}$$

Aus (C) folgt nun sukzessive die Berechnung von $y_1, y_2, \cdots$ in folgender Weise. Setzt man in M für u die Reihe $y_0 + y_1 x + \cdots$ und für Z die Reihe (7) und entwickelt $\frac{1}{x-1}, \frac{1}{(x-1)^2}, \frac{1}{(x-1)^3}$ nach Potenzen von x, so erhält man einen Ausdruck

$$M = M_0 + M_1 x + \cdots, \tag{12}$$

wobei sich $M_\varkappa$ aus $y_0, y_1, \cdots, y_\varkappa$ und Ausdrücken, die daraus durch Addition, Multiplikation, Differentiation und Integration erhalten werden. Um also aus (C) $y_k x^{\varkappa+1}$ zu erhalten, hat man auf der rechten Seite für M den Wert $M_{\varkappa-1} x^{\varkappa-1}$ zu setzen, da sich bei jeder Integration der Exponent um 1 erhöht.

Es berechnet sich also $y_\varkappa$ aus $y_0, y_1, \cdots, y_{\varkappa-1}$ und Ausdrücken, die daraus durch die Operationen: Addition, Multiplikation, Differentiation und Integration hervorgehen.

Die Ausrechnung gestaltet sich in folgender Weise:

Gesetzt es sei gezeigt, daß

$$(13)\quad y_i = \frac{\alpha_{i,i+1}}{\xi^{i+1}} + \frac{\alpha_{ii}}{\xi^i} + \cdots + \alpha_{i0} + \beta_{i1}\xi + \cdots + \beta_{i,i+1}\xi^{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, \varkappa - 1,$$

wo $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$ von x unabhängig sind, was ja für $i = 0$ nach (7) I der Fall ist, so ist

$$(14)\quad x\frac{d}{dx}(y_i x^i) = x^i \Big\{[i-\gamma(i+1)]\frac{\alpha_{i,i+1}}{\xi^{i+1}} + [i-\gamma i]\frac{\alpha_{ii}}{\xi^i} + \cdots + i\alpha_{i0}$$
$$+ (i+\gamma)\beta_{i1}\xi + \cdots + [i+\gamma(i+1)]\xi^{i+1}\Big\},$$

also haben p_i, q_i in den Entwicklungen (4) nach (2) die Form:

$$(15)\qquad \varphi_i = \frac{m_{i,i+1}}{\xi^{i+1}} + \frac{m_{ii}}{\xi^i} + \cdots + m_{i0} + n_{i1}\xi + \cdots + n_{i,i+1}\xi^{i+1}.$$

Wenn also der reelle Teil von γ positiv und zwischen 0 und 1 gelegen angenommen wird, so erhält man

$$(16)\qquad \int_0^x \varphi_i x^i dx = x^{i+1}\left[\frac{m_{i,i+1}}{i+1-\gamma(i+1)}\frac{1}{\xi^{i+1}} + \frac{m_{i,i}}{i+1-\gamma i}\frac{1}{\xi^i} + \cdots + \frac{m_{i0}}{i+1}\right.$$
$$\left. + \frac{n_{i1}}{i+1+\gamma}\xi + \cdots + \frac{n_{i,i+1}}{i+1+\gamma(i+1)}\xi^{i+1}\right].$$

Diese Form haben also die Faktoren Y_i der Entwicklung (7) zufolge der Gleichung (6); sie berechnen sich demnach aus $y_0, y_1, \cdots, y_i$, xy_0', xy_1', $\cdots$, xy_i' durch die Operationen der Addition und Multiplikation, wobei noch rationale Faktoren der Form $\frac{\lambda+\gamma\mu}{i+\gamma\varkappa}$ hinzutreten. Dann lehrt aber die Gleichung (10), daß sich die Größen M_i der Entwicklung (12) gleichfalls aus $y_0, y_1, \cdots, y_i$ durch die Operationen der Addition und Multiplikation mit den angegebenen rationalen Faktoren, die für beliebiges γ nicht unendlich werden können, berechnen. Und zwar hat $M_{\varkappa-1}$ die Form:

$$(17)\quad M_{\varkappa-1} = \frac{\gamma_{\varkappa,\varkappa+1}}{\xi^{\varkappa+1}} + \frac{\gamma_{\varkappa,\varkappa}}{\xi^\varkappa} + \cdots + \gamma_{\varkappa 0} + \delta_{\varkappa 1}\xi + \cdots + \delta_{\varkappa,\varkappa+1}\xi^{\varkappa+1}.$$

Der Gleichung (C) entsprechend ist dann weiter:

$$(18)\int_0^x M_{\varkappa-1}x^{\varkappa-1}\xi\, dx = x^\varkappa\left[\frac{\gamma_{\varkappa,\varkappa+1}}{\varkappa-\gamma\varkappa}\frac{1}{\xi^\varkappa} + \frac{\gamma_{\varkappa,\varkappa}}{\varkappa-\gamma(\varkappa-1)}\frac{1}{\xi^{\varkappa-1}} + \cdots + \frac{\delta_{\varkappa,\varkappa+1}}{\varkappa+\gamma(\varkappa+2)}\xi^{\varkappa+2}\right]$$

und also

$$(19)\qquad \frac{x\xi}{2}\int\limits_0^x \frac{dx}{x\xi^2}\int\limits_0^x M_{\varkappa-1}x^{\varkappa-1}\xi\,dx$$

$$= \frac{x^{\varkappa+1}}{2}\Bigg[\frac{\gamma_{\varkappa,\varkappa+1}}{[\varkappa-\gamma\varkappa][\varkappa-\gamma(\varkappa+2)]}\frac{1}{\xi^{\varkappa+1}}+\frac{\gamma_{\varkappa\varkappa}}{[\varkappa-\gamma(\varkappa-1)][\varkappa-\gamma(\varkappa+1)]}\frac{1}{\xi^{\varkappa}}$$

$$+\cdots+\frac{\delta_{\varkappa,\varkappa+1}}{[\varkappa+\gamma(\varkappa+2)][\gamma+\gamma\varkappa]}\xi^{\varkappa+1}\Bigg].$$

Wir erhalten also endlich:

$$(20)\qquad y_\varkappa = \frac{\alpha_{\varkappa,\varkappa+1}}{\xi^{\varkappa+1}}+\frac{\alpha_{\varkappa,\varkappa}}{\xi^{\varkappa}}+\cdots+\alpha_{\varkappa 0}+\beta_{\varkappa 1}\xi+\cdots+\beta_{\varkappa,\varkappa+1}\xi^{\varkappa+1},$$

womit die Form von $y_\varkappa$ festgestellt ist. Und zwar berechnen sich die Größen $\alpha_{\varkappa\lambda}$, $\beta_{\varkappa\lambda}$ aus $\alpha_{i\lambda}$, $\beta_{i\lambda}$ $(i=0,1,\cdots,\varkappa-1)$ durch die Operationen der Addition und Multiplikation. Dabei treten rationale Faktoren der Form $\frac{\lambda+\gamma\mu}{\sigma+\gamma\tau}$, wo λ, μ, σ, τ ganze Zahlen bedeuten, auf, die für allgemeine γ nicht unendlich werden können. Wir werden in der Nr. IV sehen, daß sie auch für rationale γ nicht unendlich werden, vorausgesetzt, daß der reelle Teil von γ zwischen -1 und $+1$ liegt, und die Werte $-1, 0, 1$ ausgeschlossen werden.

Für y_1 erhält man:

$$(21)\qquad y_1 = -\frac{1}{2}(a-c)v_0(v_0-1)-\frac{1}{2}y_0(y_0-1)+\frac{1}{2}w_0$$

$$+\frac{1}{8}\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\left[\frac{D}{1-\gamma^2}+E\right](a-c),$$

wo

$$(22)\qquad v_0=\frac{1}{x}\int\limits_0^x y_0\,dx = \frac{1}{1-\gamma}\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{d}{\gamma^2}+\frac{b}{\gamma^2}\right)+\frac{D}{16}\frac{\xi}{1+\gamma},$$

$$(23)\qquad w_0 = x\frac{dy_0}{dx} = -\frac{\gamma}{\xi}+\frac{D}{16}\gamma\xi,$$

$$(24)\qquad E=\left(1+\frac{d}{\gamma^2}-\frac{b}{\gamma^2}\right)\left(1-\frac{d}{\gamma^2}+\frac{b}{\gamma^2}\right)$$

gesetzt ist, während D wieder die Bedeutung (9) I hat.

Wir werden in Nr. VI sehen, daß die Bedingung, die wir dem reellen Teil von γ, $-1\leqq\Re(\gamma)\leqq+1$, auferlegt haben, keine Beschränkung des Charakters als allgemeiner Lösung unserer Differentialgleichung gibt und können daher unter der Voraussetzung der Konvergenz und der Möglichkeit der gliedweisen Differentiation und Integration, wofür wir den Nachweis in der folgenden Nummer erbringen werden, das erhaltene Resultat in folgender Weise aussprechen:

Die Differentialgleichung (A) *besitzt die allgemeine Lösung:*

$$y=\sum_{\varkappa=0}^{\infty} x^{\varkappa+1}\left\{\frac{\alpha_{\varkappa,\varkappa+1}}{\xi^{\varkappa+1}}+\frac{\alpha_{\varkappa\varkappa}}{\xi^{\varkappa}}+\cdots+\alpha_{\varkappa 0}+\beta_{\varkappa 1}\xi+\cdots+\beta_{\varkappa,\varkappa+1}\xi^{\varkappa+1}\right\},$$

wo $\xi=ax^{\gamma}$ *bedeutet.* a *und* γ *sind die beiden willkürlichen Integrationskonstanten, wobei der reelle Teil von* γ *die Bedingung* $-1\leqq\Re(\gamma)\leqq+1$ *zu erfüllen hat. Diese allgemeine Lösung* y *und* $x\frac{dy}{dx}$ *verschwinden für* $x=0$.

III.

Der Konvergenzbeweis für die erhaltene Reihe.

Um zu beweisen, daß die Reihe

(1) $$y=\sum_{\varkappa=0}^{\infty} x^{\varkappa+1}y_{\varkappa}$$

unbedingt konvergent ist und gliedweise differentiiert und integriert werden darf, gehen wir auf die Gleichung (C) II zurück:

(C) $$y=xy_0+\frac{1}{2}x\xi\int_0^x\frac{dx}{x\xi^2}\int_0^x M\xi\,dx,$$

also:

(C') $$x\frac{dy}{dx}=x\frac{d}{dx}(xy_0)+(1+\gamma)(y-xy_0)+\frac{1}{2}\frac{x}{\xi}\int_0^x M\xi\,dx.$$

Bei der Berechnung der Größen M_i waren die Integrationen (6) II auszuführen, dabei treten aber nach (16) II nur Integrale der Form

(2) $$a\int_0^x x^{i-\gamma\lambda}dx$$

auf, wo λ die Werte $i+1, i,\cdots,0,-1,\cdots,-(i+1)$ haben kann. Die in der Ebene T — mit den von $x=0$ und $x=1$ ins Unendliche gezeichneten Schnitten — ausgeführte Integration ergibt, wenn der reelle Teil von γ zwischen -1 und $+1$ liegt

$$\frac{a}{i+1-\gamma\lambda}x^{i+1-\gamma\lambda}.$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß der imaginäre Teil von γ nicht Null ist und wollen die Gesamtheit der Werte $i+1-\gamma\lambda$ betrachten.

Man erkennt (Fig. 1, wenn der imaginäre Teil von γ positiv, Fig. 2, wenn der imaginäre Teil negativ ist), daß alle Werte $|i + 1 - \gamma\lambda|$ größer sind als $OA = |\sin\varphi|$, wenn $\gamma = r\,e^{i\varphi}$ gesetzt wird.

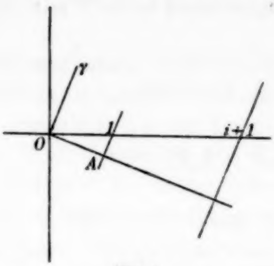


Fig. 1.

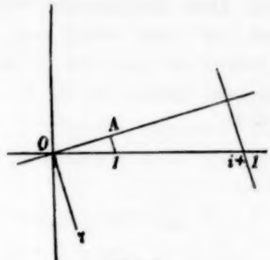


Fig. 2.

Wenn also $\varepsilon = \dfrac{1}{|\sin\varphi|}$ gesetzt wird, so ist

$$\left| a\int_0^x x^{i-\gamma\lambda}\,dx \right| < |a|\,|x|\,\varepsilon\,|x^{i-\gamma\lambda}|. \tag{3}$$

Die Gleichungen (6) II zeigen also:

$$|Y| < |\gamma^2| + \varepsilon|x|\,|\gamma^2P+Q| + \varepsilon^2|x|^2|P|\,|\gamma^2P+Q| \tag{4}$$
$$+ \varepsilon^3|x|^3|P|^2|\gamma^2P+Q| + \cdots.$$

$$|Y| < |\gamma^2| + |\gamma^2P+Q|\,\varepsilon|x|\{1 + \varepsilon|Px| + \varepsilon^2|Px|^2 + \cdots\}, \tag{5}$$

also nach (7)

$$|Z| < \varepsilon|\gamma^2P+Q|\{1 + \varepsilon|Px| + \varepsilon^2|Px|^2 + \cdots\}. \tag{6}$$

Die Gleichungen (C) und (C′) ergeben dann:

$$|y| < |xy_0| + \frac{1}{2}\varepsilon^2|M|\,|x|^2, \tag{7}$$

$$\left|x\frac{dy}{dx}\right| < \left|x\frac{dy_0}{dx}\right| + |1+\gamma|\,|y - xy_0| + \frac{1}{2}\varepsilon|M|\,|x|^2. \tag{8}$$

Wir wollen nun in dem Ausdrucke für M (10) II statt u und xu' wieder y und xy' einführen: $xu = y$, $x^2u' = xy' - y$. Dann erkennt man mit Berücksichtigung von (6), daß $|x|^2|M|$ unterhalb eines Ausdruckes liegt, der nach positiven ganzen Potenzen von $|x|$, $|y|$ und $|xy'|$ fortschreitet. Diese Entwicklung von M beginnt mit den Gliedern zweiter Dimension und ist konvergent, so lange die drei Variablen $|x|$, $|y|$, $|xy'|$ die Bedingungen

$$|x| < 1,\ |y| < 1 \quad \text{und wegen (6)} \quad \varepsilon|Px| < 1, \tag{9}$$

d. h.

$$\frac{\varepsilon}{|1-x|}[(|xy'|+|y|)(1+|x|+|y|)+2(|y|+|x|)]<1$$

erfüllen. Diese Bedingungen werden für hinreichend kleine Werte für $|x|$, $|y|$ und $|xy'|$ stets erfüllt sein.

Denken wir uns nun in der Ebene T mit einem hinreichend kleinen Radius (der kleiner ist als 1) einen Kreis beschrieben, so werden die Ausdrücke

$$|xy_0| < \left|\frac{x}{\xi}\right| |\alpha_{01} + \alpha_{00}\xi + \beta_{01}\xi^2|,$$

$$|x|\left|\frac{d}{dx}(xy_0)\right| < \left|\frac{x}{\xi}\right| |(1-\gamma)\alpha_{01} + \alpha_{00}\xi + (1+\gamma)\beta_{01}\xi^2|$$

für das Innere dieses Kreises kleiner bleiben als $\varrho_1\left|\frac{x}{\xi}\right|$ und $\varrho_2\left|\frac{x}{\xi}\right|$, wo ϱ_1 und ϱ_2 konstante endliche Werte bedeuten.

Bei der sukzessiven Berechnung der Koeffizienten von $y = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} x^{\varkappa+1} y_\varkappa$ und von $x\frac{dy}{dx} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} x\frac{d}{dx}(x^{\varkappa+1}y_\varkappa)$ werden also die Moduln dieser Koeffizienten unterhalb der Koeffizienten von Reihen:

$$(10)\quad \begin{aligned} u &= \varrho_1\left|\frac{x}{\xi}\right| + x^2u_1 + x^3u_2 + \cdots, \\ v &= \varrho_2\left|\frac{x}{\xi}\right| + x^2v_1 + x^3v_2 + \cdots \end{aligned}$$

bleiben, die sich aus Gleichungen der Form:

$$(11)\quad \begin{aligned} u &= \varrho_1\left|\frac{x}{\xi}\right| + \mathfrak{P}_1(|x|, u, v), \\ v &= \varrho_2\left|\frac{x}{\xi}\right| + \mathfrak{P}_2(|x|, u, v) \end{aligned}$$

ergeben. Die Reihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind konvergente Potenzreihen der positiven reellen Größen $|x|$, u, v, die mit den Gliedern zweiter Dimension beginnen und die Konvergenz dieser Reihen ist gesichert, so lange die Bedingungen

$$(12)\quad |x|<1,\quad u<1,\quad \frac{\varepsilon}{|1-x|}[(v+u)(1+|x|+u)+2(u+|x|)]<1$$

erfüllt sind. Setzen wir nun

$$(13)\qquad u = p\cdot s,\quad v = q\cdot t,\quad |x| = mz,$$

wo die Größen p, q, m die größten Werte für bzw. u, v, $|x|$ bedeuten

mögen, für die $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ noch konvergieren, dann treten an die Stelle der Gleichungen (11) die Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{aligned} s &= \frac{\varrho_1}{p}\left|\frac{x}{\xi}\right| + \Pi_1(z, s, t),\\ t &= \frac{\varrho_2}{q}\left|\frac{x}{\xi}\right| + \Pi_2(z, s, t),\end{aligned}$$

wo nunmehr Π_1 und Π_2 auch noch für $z = 1$, $s = 1$, $t = 1$ konvergieren und gleichfalls mit den Gliedern zweiter Dimension beginnen. Wenn Π_1 und Π_2 auch noch für den Wert 1 ihrer Argumente konvergieren, dürfen die Koeffizienten dieser Reihen alle eine obere Grenze A nicht überschreiten. Wenn überdies ϱ der größere der beiden Werte $\frac{\varrho_1}{p}$, $\frac{\varrho_2}{q}$ ist, so sieht man, daß die Koeffizienten der Entwicklungen vergrößert werden, wenn man an Stelle von (14) die Gleichungen

$$(15)\quad \sigma = \tau = \varrho\left|\frac{x}{\xi}\right| + A\left[\left|\frac{x}{m}\right|^2 + \sigma^2 + \tau^2 + \sigma\left|\frac{x}{m}\right| + \tau\left|\frac{x}{m}\right| + \sigma\tau + \left|\frac{x}{m}\right|^3 + \cdots\right]$$

setzt, woraus $\sigma = \tau$ durch den Ansatz:

$$(16)\qquad \sigma = \tau = \varrho\frac{x}{\xi} + \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x^3 + \cdots$$

zu berechnen ist.

Die Koeffizienten dieser Entwicklung werden offenbar noch weiter vergrößert, wenn man an Stelle der Gleichung (15) die Gleichung

$$(17)\quad \sigma = \tau = \varrho\left|\frac{x}{\xi}\right| + A\left[\left(\left|\frac{x}{m}\right| + \sigma + \tau\right)^2 + \left(\left|\frac{x}{m}\right| + \sigma + \tau\right)^3 + \cdots\right]$$

verbunden mit dem Ansatz (16) treten läßt oder endlich

$$(18)\qquad \sigma = \varrho\left|\frac{x}{\xi}\right| + A\left[\left(\left|\frac{x}{m}\right| + 2\sigma\right)^2 + \left(\left|\frac{x}{m}\right| + 2\sigma\right)^3 + \cdots\right].$$

Aus (18) folgt

$$(19)\quad \left(2\varrho + \frac{\xi}{m}\right)\frac{x}{\xi} = 2\sigma + \frac{x}{m} - 2A\left[\left(\left|\frac{x}{m}\right| + 2\sigma\right)^2 + \left(\left|\frac{x}{m}\right| + 2\sigma\right)^3 + \cdots\right].$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht eine Reihe, die für $\left|\frac{x}{m}\right| + 2\sigma < 1$ konvergiert. Nach dem Prinzip der Umkehrung einer Potenzreihe wird sich daraus für $2\sigma + \left|\frac{x}{m}\right|$ eine Reihe, die nach Potenzen von $\left(2\varrho + \frac{\xi}{m}\right)\frac{x}{\xi}$ fortschreitet und die für hinreichend kleine Werte von x konvergiert, ergeben. In einem Kreise mit hinlänglich kleinem Radius um $x = 0$ wird $2\varrho + \frac{\xi}{m}$ einen Wert 2ν nicht überschreiten können. Also ergibt sich aus (19) die Entwicklung

$$(20)\qquad \sigma = \varrho\left|\frac{x}{\xi}\right| + \alpha_1\nu^2\left|\frac{x}{\xi}\right|^2 + \alpha_2\nu^3\left|\frac{x}{\xi}\right|^3 + \cdots,$$

die für hinreichend kleine Werte von $|x|$ konvergiert. Nun sind die Koeffizienten der Reihe für s (14) kleiner als die von σ und die Koeffizienten von $|y|$ sind kleiner als die von $u = ps$. Daraus folgt:

$$|y_\varkappa x|^{\varkappa+1} < p\,\alpha_\varkappa \left|\frac{v}{\xi}\right|^{\varkappa+1} \cdot |x|^{\varkappa+1}. \tag{21}$$

Damit ist gezeigt, daß die Reihe der Moduln von

$$y = y_0 x + y_1 x^2 + \cdots$$

für hinreichend kleine Werte von $|x|$ konvergiert und unterhalb der konvergenten Entwicklung

$$p \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \alpha_\varkappa \left|\frac{v x}{\xi}\right|^{\varkappa+1}$$

liegt. Die Reihe für y konvergiert also *unbedingt* und *gleichmäßig.* Daraus folgt sofort die Möglichkeit der gliedweisen Integration. Da wir weiter gesehen haben, daß die Reihe für $x\frac{dy}{dx}$ unterhalb der Reihe für v liegt, aber $v = qt$ ist, und die Reihe für t ebenfalls unter der für σ liegt, so sieht man, daß die Reihe der Moduln von $\left|x\frac{dy}{dx}\right|$ unter

$$q \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \alpha_\varkappa \left|\frac{v x}{\xi}\right|^{\varkappa+1}$$

liegt, daß also $x\frac{dy}{dx}$ ebenfalls durch eine unbedingt und gleichmäßig konvergente Reihe dargestellt ist. Daraus folgt aber, daß diese Reihe wirklich die mit x multiplizierte Ableitung von y darstellt, und wir haben somit auch die Möglichkeit der gliedweisen Differentiation erkannt.

Allerdings haben wir bisher angenommen, daß der imaginäre Teil von γ nicht Null ist. Wir werden diese Beschränkung in der folgenden Nummer fallen lassen.

IV.

Koeffizientenberechnung; Konvergenzbeweis für reelle γ.

Bei dem in der vorigen Nummer geführten Konvergenzbeweise haben wir davon Gebrauch gemacht, daß die bei den Integrationen (16), (18), (19) II auftretenden Nenner $\varkappa - \gamma\lambda$ in ihrem Modul größer sind als ein von Null verschiedener Wert ε. Nun könnte bei der Integration (19) II im Nenner von $\alpha_{\varkappa,\varkappa+1}$ der Faktor $\varkappa - \gamma(\varkappa+2)$ und in dem von $\alpha_{\varkappa,\varkappa}$ der Faktor $\varkappa - \gamma(\varkappa+1)$ auftreten. Diese Werte könnten also für rationale zwischen 0 und 1 gelegene Werte γ verschwinden. Wenn es aber ge-

lingt zu zeigen, daß diese beiden Koeffizienten tatsächlich die Faktoren $\varkappa - \gamma(\varkappa+2)$ und $\varkappa - \gamma(\varkappa+1)$ im Nenner nicht enthalten, so ist bewiesen, daß die Größen $\varkappa - \gamma\lambda$, die dann bei den Integrationen noch vorkommen können, auch für reelle γ nicht verschwinden können, sondern vielmehr größer sein müssen als $1-\gamma$.

Bezeichnen wir also für reelle γ den Wert $1-\gamma$ mit ε, so ist auch jetzt wieder für alle in Betracht kommenden Werte

$$\varkappa - \gamma\lambda > \varepsilon,$$

wo $\varepsilon > 0$ ist, wenn nur $\gamma = 0$ und $\gamma = 1$ ausgeschlossen werden. Dann bleiben aber alle Schlüsse des Konvergenzbeweises bestehen. Es kommt also alles darauf an zu zeigen, daß $\alpha_{\varkappa\varkappa+1}$ und $\alpha_{\varkappa\varkappa}$ für $\varkappa - \gamma(\varkappa+2) = 0$ und $\varkappa - \gamma(\varkappa+1) = 0$ nicht unendlich werden.

Zu dem Zwecke berechnen wir diese beiden Koeffizienten vollständig nach einem Verfahren, das auch für die Berechnung der übrigen $\alpha_{\varkappa i}$, $\beta_{\varkappa i}$ von großem Nutzen ist.

Da die Reihe

$$(1)\qquad y = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} x^{\varkappa+1}\left\{\frac{\alpha_{\varkappa\varkappa+1}}{\xi^{\varkappa+1}} + \frac{\alpha_{\varkappa\varkappa}}{\xi^{\varkappa}} + \cdots + \alpha_{\varkappa 0} + \beta_{\varkappa 1}\xi + \cdots + \beta_{\varkappa\varkappa+1}\xi^{\varkappa+1}\right\}$$

unbedingt konvergiert, können wir ihre Elemente in anderer Weise gruppieren:

$$(2)\qquad \begin{aligned} y = &\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \alpha_{\varkappa,\varkappa+1}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\varkappa+1} + x\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\alpha_{\varkappa\varkappa}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\varkappa} \\ &+ x^2\left(\beta_{01}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{-1} + \sum_{\varkappa=1}^{\infty}\alpha_{\varkappa,\varkappa-1}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\varkappa-1}\right) \\ &+ x^3\left(\beta_{11}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{-1} + \sum_{\varkappa=2}^{\infty}\alpha_{\varkappa,\varkappa-2}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\varkappa-2}\right) \\ &+ x^4\left(\beta_{12}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{-2} + \beta_{21}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{-1} + \sum_{\varkappa=3}^{\infty}\alpha_{\varkappa,\varkappa-3}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\varkappa-3}\right) + \cdots. \end{aligned}$$

So geschrieben erscheint y als eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$(3)\qquad y = y_0' + y_1'x + y_2'x^2 + \cdots,$$

deren Koeffizienten Funktionen von $\xi_1 = \frac{x}{\xi} = \frac{1}{\alpha}x^{1-\gamma}$ sind, und zwar werden $y'_{2\varkappa}$ und $y'_{2\varkappa+1}$ für $x=0$ unendlich wie $\xi_1^{-2\varkappa}$.

Setzt man andererseits in der Gleichung (A) I $y = \frac{x}{\eta}$, so erhält man

für η eine Differentialgleichung genau derselben Form, wenn man nur a, b, c, d bzw. durch b, a, d, c ersetzt. Da nun aber $\eta = \frac{x}{y}$ für $x = 0$ von der Ordnung

$$\frac{1}{\alpha} x^{\gamma} = \frac{x\alpha}{x^{1-\gamma}} = \frac{x}{\xi_1}$$

verschwindet, so sieht man, daß sich entsprechend (1) für η eine konvergente Reihe

$$\eta = \eta_0 x + \eta_1 x^2 + \cdots \tag{4}$$

ergeben wird, wo $\eta_\varkappa$ aus $y_\varkappa$ durch Vertauschung von $\xi = \alpha x^{\gamma}$ mit $\xi_1 = \frac{1}{\alpha} x^{1-\gamma}$, b mit a und d mit c hervorgeht.

Bei der Multiplikation der beiden unbedingt konvergenten Reihen (3) und (4) erhält man dann wegen $y \cdot \eta = x$:

$$-1 + y_0'\eta_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} x^{\varkappa}(y_0'\eta_\varkappa + y_1'\eta_{\varkappa-1} + \cdots + y_\varkappa'\eta_0) = 0. \tag{5}$$

Da diese Gleichung eine identische für beliebige Exponenten $1-\gamma$ von $\xi_1 = x^{1-\gamma}$ sein muß, so müssen die Koeffizienten von $x^{\varkappa}$ einzeln verschwinden. Daraus folgt:

$$y_0' = \frac{1}{\eta_0}, \quad y_1' = -\frac{\eta_1}{\eta_0^2}, \quad \cdots, \tag{6}$$

d. h. aber:

$$y = \frac{x}{\eta} = \frac{1}{\eta_0 + \eta_1 x + \cdots} \tag{7}$$

läßt sich ebenso nach positiven ganzen Potenzen von x entwickeln, als wenn die $\eta_0, \eta_1, \cdots$ Konstanten wären.

Nun ist nach (7) I mit Berücksichtigung der Vertauschungen ξ mit ξ_1, b mit a, d mit c

$$\frac{1}{\eta_0} = \frac{\xi_1}{m-n}\left[\frac{m}{1-m\xi_1} - \frac{n}{1-n\xi_1}\right], \tag{8}$$

wenn

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{4}\left[1 + \frac{\sqrt{c}}{1-\gamma} + \frac{\sqrt{a}}{1-\gamma}\right]\left[1 - \frac{\sqrt{c}}{1-\gamma} + \frac{\sqrt{a}}{1-\gamma}\right], \\ n &= -\frac{1}{4}\left[1 + \frac{\sqrt{c}}{1-\gamma} - \frac{\sqrt{a}}{1-\gamma}\right]\left[1 - \frac{\sqrt{c}}{1-\gamma} - \frac{\sqrt{a}}{1-\gamma}\right] \end{aligned} \tag{9}$$

gesetzt wird. Daraus folgt

$$\alpha_{\varkappa,\varkappa+1} = \frac{m^{\varkappa+1} - n^{\varkappa+1}}{m-n}. \tag{10}$$

Aus $\alpha_{\varkappa,\varkappa+1}$ folgt $\beta_{\varkappa,\varkappa+1}$ durch Vertauschung von γ mit $-\gamma$ und Multiplikation mit $\left(\frac{D}{16}\right)^{\varkappa+1}$, wie überhaupt $\beta_{\varkappa i}$ aus $\alpha_{\varkappa i}$ durch Vertauschung von $+\gamma$ mit $-\gamma$ und Multiplikation mit $\left(\frac{D}{16}\right)^{i}$ hervorgeht.

Die Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\varkappa}$ erhält man nach (6) durch Entwicklung von $\frac{-\eta_1}{\eta_0^2}$.

Da nach (21) II y_1 nur die Nenner γ, $1-\gamma$, $1+\gamma$ hat, so kommen entsprechend in η_1 die Nenner $1-\gamma$, γ, $2-\gamma$ vor. Daraus folgt also, daß die $\alpha_{\varkappa\varkappa}$ nur für $\gamma=0$, $\gamma=1$, $\gamma=2$ unendlich werden können. Aus der Darstellung, die wir dem allgemeinen Integral in Nr. VI geben werden, folgt übrigens, daß die Koeffizienten von y nur für ganzzahlige Werte von γ unendlich werden.

Die Gleichungen (6) zeigen, daß man in gleicher Weise bei Kenntnis von y_i die Koeffizienten $\alpha_{\varkappa,\varkappa+1-i}$ $(\varkappa=0,1,\cdots,\infty)$ berechnen kann.

V.

$\gamma=0$ und $\gamma=1$.

Wir haben bisher $\gamma=0$ und $\gamma=1$ (oder -1) ausschließen müssen, da schon der Wert y_0 nach (7) I für $\gamma=0$, y_1 nach (21) II für $\gamma=\pm 1$ keinen Sinn mehr hat.

Wir wollen aber jetzt zeigen, daß die Ausdrücke $y_\varkappa$ so geschrieben werden können, daß sie für $\gamma=0$ in wohlbestimmte Werte übergehen.

Nehmen wir zunächst (7) I

(1) $$y_0=\frac{1}{\xi}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{d}{\gamma^2}+\frac{b}{\gamma^2}\right)+\frac{D}{16}\xi,$$

wo

(2) $$\xi=\alpha x^\gamma,$$
$$D=\frac{1}{\gamma^4}(\gamma+\sqrt{b}+\sqrt{d})(\gamma+\sqrt{b}-\sqrt{d})(\gamma-\sqrt{b}+\sqrt{d})(\gamma-\sqrt{b}-\sqrt{d})=\frac{\Delta}{\gamma^4},$$

und setzen statt der willkürlichen Konstanten α den Wert

(3) $$\alpha=4\frac{\beta^\gamma}{\sqrt{D}},$$

wo also jetzt β die willkürliche Konstante darstellt, so geht y_0, wenn jetzt wieder α statt β geschrieben wird, über in:

(4) $$y_0=\frac{1}{4}\sqrt{D}\left[\frac{1}{(\alpha x)^\gamma}+(\alpha x)^\gamma+\frac{2}{\sqrt{\Delta}}(\gamma^2-d+b)\right]$$

oder

(5) $$y_0=\frac{1}{4}\sqrt{\Delta}\left[\frac{1}{(\alpha x)^\gamma}\left(\frac{(\alpha x)^\gamma-1}{\gamma}\right)^2+\frac{2}{\gamma^2}\left(1+\frac{\gamma^2-d+b}{\sqrt{\Delta}}\right)\right].$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von γ, so ergibt sich

(6) $$y_0=\frac{1}{4}(d-b)\log^2\alpha x-\frac{b}{d-b}+\gamma\,\mathfrak{P}_0(x,\gamma),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach positiven ganzen Potenzen von γ fortschreitende Reihe

bedeutet, die für $\gamma = 0$ nicht unendlich wird und für hinlänglich kleine Werte von γ konvergiert.

Bei dieser Bezeichnung der zweiten Integrationskonstanten läßt sich also y_0 nach positiven ganzen Potenzen von γ entwickeln und geht für $\gamma = 0$ über in

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{4}(d-b)\log^2 \alpha x - \frac{b}{d-b}. \tag{7}$$

Dieser Ausdruck genügt in der Tat der Gleichung (6a) I für $\gamma = 0$. Bei anderer Schreibweise der zweiten Integrationskonstanten kann er auch so umgeformt werden:

$$\bar{y}_0 = \alpha_1 + \sqrt{\alpha_1 d + (1-\alpha_1)b} + \frac{1}{4}(d-b)\log^2 x, \tag{7a}$$

$$\bar{y}_0 = \sqrt{b}\log(\alpha_2 x) + \frac{1}{4}(d-b)\log^2(\alpha_2 x), \tag{7b}$$

$$\bar{y}_0 = 1 + \sqrt{d}\log(\alpha_3 x) + \frac{1}{4}(d-b)\log^2(\alpha_3 x). \tag{7c}$$

Da bei den Integrationen (16), (18), (19) II bei der Berechnung der Werte $y_1, y_2, \cdots$ der Faktor $\frac{1}{\gamma}$ nicht mehr auftreten kann, so folgt, daß bei dieser Bezeichnung der zweiten Integrationskonstanten alle $y_\varkappa$ und also auch die unbedingt konvergente Reihe y nach positiven ganzen Potenzen von γ entwickelbar sein muß, und daß diese Entwicklung für hinreichend kleine Werte von γ konvergent ist. Setzen wir also

$$y_\varkappa = \bar{y}_\varkappa + \gamma\,\mathfrak{P}_\varkappa(x, \gamma), \tag{8}$$

$$y = \bar{y} + \gamma\,\mathfrak{P}(x, \gamma), \tag{9}$$

wo $\mathfrak{P}_\varkappa$ und $\mathfrak{P}$ für $\gamma = 0$ nicht unendlich werden.

Um die Werte $\bar{y}_\varkappa$ und $\bar{y}$ zu berechnen, hat man einen der Werte (7) zugrunde zu legen und bei den Integrationen (16), (18), (19) II wiederholt die Formel

$$\int_0^x \log^m x \cdot x^n\,dx \tag{10}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\log^m x - \frac{m}{n+1}\log^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{(n+1)^2}\log^{m-2} x + \cdots + (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^m}\right]$$

anzuwenden.

Man erhält

$$\bar{y}_\varkappa = \bar{\alpha}_{\varkappa 0} + \bar{\alpha}_{\varkappa 1}\log x + \cdots + \bar{\alpha}_{\varkappa, 2\varkappa+2}\log^{2\varkappa+2} x, \tag{11}$$

woraus dann die Entwicklung

$$\bar{y} = \bar{y}_0 x + \bar{y}_1 x^2 + \cdots \tag{12}$$

folgt, die wieder für $x = 0$ verschwindet.

Da aber y für beliebiges γ der vorgelegten Differentialgleichung genügt, so muß auch $\bar{y}$ eine Lösung von (A) I sein.

Insbesondere hat $\alpha_{\varkappa,2\varkappa+2}$ den Wert:

$$\left[\frac{1}{4}(d-b)\right]^{\varkappa+1}\cdot\frac{m^{\varkappa+1}-n^{\varkappa+1}}{m-n},$$

wo

$$m=-\frac{1}{4}(1+\sqrt{c}+\sqrt{a})(1-\sqrt{c}+\sqrt{a}),$$

$$n=-\frac{1}{4}(1+\sqrt{c}-\sqrt{a})(1-\sqrt{c}-\sqrt{a})$$

bedeutet.

Den Fall $\gamma=1$ erledigt man am einfachsten durch folgende Betrachtung: Setzt man, wie in der vorigen Nummer, $y=\frac{x}{\eta}$, so entspricht, wie dort erörtert, dem Werte γ bei y der Wert $1-\gamma$ bei x. Auf diese Weise sieht man, daß dem Werte $\gamma=1$ für y eine Entwicklung

$$y=y_0'+y_1'x+\cdots,$$

wo y_0' y_1', $\cdots$ rationale Funktionen von $\log x$ sind, entspricht.

VI.

Die Entwicklungen in der Umgebung von $x=1$ und $x=\infty$. Neue Darstellung des allgemeinen Integrals.

Die Differentialgleichung, der y als Funktion von x genügt,

$$\text{(A)}\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{2}\,\frac{y(y-1)}{x(x-1)(y-x)}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a-b\frac{x}{y}+c\frac{x-1}{(y-1)^2}-d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right]$$

geht bei den Transformationen

$$\text{(1)}\qquad x=1-z,\quad y=1-u,$$

$$\text{(2)}\qquad x=\frac{1}{t},\qquad y=\frac{w}{t}$$

in Gleichungen genau derselben Form über. Man hat nur bei (1) b mit c und bei (2) c mit d zu vertauschen.

Setzt man also, entsprechend

$$\text{(3)}\qquad \xi=\alpha x^{\gamma},$$

$$\text{(4)}\qquad \xi_1=\alpha_1(1-x)^{\delta},$$

$$\text{(5)}\qquad \xi_2=\alpha_2\left(\frac{1}{x}\right)^{\varepsilon},$$

so tritt neben die Entwicklung in der Umgebung von $x=0$

$$(6)\quad y=\sum_{\varkappa=0}^{\infty} x^{\varkappa+1}\left\{\frac{\alpha_{\varkappa,\varkappa+1}}{\xi^{\varkappa+1}}+\frac{\alpha_{\varkappa,\varkappa}}{\xi^{\varkappa}}+\cdots+\alpha_{\varkappa 0}+\beta_{\varkappa 1}\xi+\cdots+\beta_{\varkappa,\varkappa+1}\xi^{\varkappa+1}\right\},$$

in der Umgebung von $x=1$

$$(7)\quad y=1-\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(1-x)^{\varkappa+1}\left\{\frac{\alpha^{(1)}_{\varkappa,\varkappa+1}}{\xi_1^{\varkappa+1}}+\frac{\alpha^{(1)}_{\varkappa,\varkappa}}{\xi_1^{\varkappa}}+\cdots+\alpha^{(1)}_{\varkappa 0}+\beta^{(1)}_{\varkappa 1}\xi_1+\cdots+\beta^{(1)}_{\varkappa,\varkappa+1}\xi_1^{\varkappa+1}\right\},$$

und in der Umgebung von $x=\infty$

$$(8)\quad y=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\varkappa}\left\{\frac{\alpha^{(2)}_{\varkappa,\varkappa+1}}{\xi_2^{\varkappa+1}}+\frac{\alpha^{(2)}_{\varkappa,\varkappa}}{\xi_2^{\varkappa}}+\cdots+\alpha^{(2)}_{\varkappa 0}+\beta^{(2)}_{\varkappa 1}\xi_2+\cdots+\beta^{(2)}_{\varkappa,\varkappa+1}\xi_2^{\varkappa+1}\right\},$$

wobei die reellen Teile von δ und ε wiederum die Bedingung

$$(9)\qquad -1\leqq\Re(\delta)\leqq+1,\quad -1\leqq\Re(\varepsilon)\leqq+1$$

zu erfüllen haben.

Im Falle $\delta=0$ oder 1, $\varepsilon=0$ oder 1, treten an die Stelle dieser Entwicklungen solche, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $\log(1-x)$ bzw. $\log\left(\frac{1}{x}\right)$ sind.

Das allgemeine Integral hat also für $x=0$ den Wert 0, für $x=1$ den Wert 1 und wird für $x=\infty$ unendlich wie x^{ε}.

Da aber außerdem die Integrale nur noch Pole besitzen können, so ergibt sich das Resultat:

Das allgemeine Integral kann an keiner Stelle von unendlich hoher Ordnung unendlich werden, es besitzt also überhaupt keine Unbestimmtheitsstellen.

Von den sechs Konstanten α, γ in (3), α_1, δ in (4) und α_2, ε in (5) können aber offenbar nur zwei willkürlich gewählt werden; es entsteht daher die Frage, welche Zusammenhänge zwischen diesen sechs Größen bestehen. Diese Frage wird von Wichtigkeit, wenn man mit einem bestimmt gewählten Integral von (A) den Übergang von einer singulären Stelle zu einer anderen ausführen will.

Um diese Frage beantworten zu können, entwickeln wir jetzt noch eine andere Darstellung des allgemeinen Integrals.

Wir gehen aus von der Entwicklung in der Umgebung von $x=0$

$$y=y_0x+y_1x^2+\cdots.$$

y_0 ist nach (7) I eine ganze rationale Funktion von a, b, c, d. Daraus folgt aber nach den Entwicklungen der Nr. II, daß überhaupt alle $y_\varkappa$ ganze rationale Funktionen dieser vier Größen sind. Die für y aufgestellte Reihe enthält also nur positive ganze Potenzen von a, b, c, d, und da sie

für hinlänglich kleine x bei beliebiger endlicher Wahl dieser vier Größen unbedingt konvergent ist, so erhalten wir das Resultat:

Das allgemeine Integral von (A) *läßt sich für beliebige Werte von* a, b, c, d *nach positiven ganzen Potenzen von* a, b, c, d *entwickeln, wenn* $|x|$ *hinlänglich klein genommen wird.**)

In derselben Weise kann man für die Umgebung von $x = 1$ und von $x = \infty$ Entwicklungen nach positiven ganzen Potenzen von $x = a$, b, c, d ansetzen.

Um die Koeffizienten der Entwicklung nach positiven ganzen Potenzen von a, b, c, d zu berechnen, können wir uns der Taylorschen Reihenentwicklung bedienen:

$$(10) \qquad y = f_{0000} + f_{1000}a + f_{0100}b + f_{0010}c + f_{0001}d + \frac{1}{2!}[f_{2000}a^2 + 2f_{1100}ab + \cdots] + \cdots,$$

wo

$$(11) \qquad f_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} y}{\partial a^\alpha \partial b^\beta \partial c^\gamma \partial d^\delta}\right)_{a=b=c=d=0}.$$

Setzt man: **)

$$(11) \qquad u = \int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}},$$

wenn

$$(12) \qquad \psi(y) = y(y-1)(y-x),$$

so erhält man für u

$$(13) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2x-1}{x(x-1)}\frac{du}{dx} + \frac{1}{4}\frac{1}{x(x-1)}u = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\psi(y)}}{x^2(x-1)^2}\left[a - b\frac{x}{y^2} + c\frac{x-1}{(y-1)^2} - d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right].$$

Bedeutet nun $f(u)$ die durch Umkehrung von (11) entstandene elliptische Funktion, sind ω_1 und ω_2 zwei primitive halbe Perioden:

$$(14) \qquad \omega_1 = \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}, \quad \omega_2 = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}},$$

und wird endlich

$$(15) \qquad y_1 = f(u + \omega_1), \quad y_2 = f(u + \omega_2), \quad y_3 = f(u + \omega_1 + \omega_2)$$

---

*) Die in der Voranzeige, Gött. Nachr. 1914, Sitzung vom 20. Dezember 1913, aufgestellte Behauptung, daß die Entwicklung für beliebige Werte von x bestehen bleibt, beruht ebenso wie die daraus gefolgerte Angabe, daß die Lage der Pole für die Lösungen unserer Differentialgleichung von a, b, c, d unabhängig sei, auf einem Irrtum.

**) Vgl. meine Arbeit, Math. Ann. 63, S. 310.

gesetzt, so kann (13) auch so geschrieben werden:

$$(13a)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2x-1}{x(x-1)}\frac{du}{dx}+\frac{1}{4}\frac{1}{x(x-1)}u$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2(x-1)^2}\left\{a\sqrt{\psi(y)}+b\sqrt{\psi(y_1)}+c\sqrt{\psi(y_2)}+d\sqrt{\psi(y_3)}\right\}.$$

Wenn $a=b=c=d=0$, so ist

$$c_1\omega_1+c_2\omega_2$$

eine Lösung von (13a), wobei c_1, c_2 zwei willkürliche Konstanten bedeuten, also ist

$$(16)\qquad f_{0000}=\eta=f(c_1\omega_1+c_2\omega_2).$$

Im allgemeinen folgt aus (13a)

$$(17)\qquad u=-\frac{\omega_1}{2\pi i}\int_0^x P\omega_2\,dx+\frac{\omega_2}{2\pi i}\int_0^x P\omega_1\,dx+c_1\omega_1+c_2\omega_2,$$

wenn die Integrale wieder in der Ebene T ausgeführt werden und:

$$(18)\qquad P=\frac{1}{x(x-1)}\left[a\sqrt{\psi(y)}+b\sqrt{\psi(y_2)}+c\sqrt{\psi(y_1)}+d\sqrt{\psi(y_3)}\right]$$

gesetzt ist. Die unteren Grenzen der Integrale in (17) könnten natürlich auch andere Werte haben, dann hätten auch c_1, c_2 entsprechend andere Werte.

Den Gleichungen (15) nach ist:

$$(15a)\qquad y_1=\frac{y-x}{y-1},\quad y_2=\frac{x}{y},\quad y_3=\frac{x(y-1)}{y-x}.$$

Die Funktionen y_1, y_2, y_3 genügen jede einer Differentialgleichung, die aus (A) dadurch hervorgeht, daß man

	a,	b,	c,	d
bei y_1 durch	c,	d,	a,	b,
bei y_2 durch	b,	a,	d,	c,
bei y_3 durch	d,	c,	b,	a

ersetzt. Die Entwicklung (6) des allgemeinen Integrals von (A), die ja für beliebige Werte a, b, c, d gilt, zeigt daher in der Umgebung von $x=0$, daß die Integrale (17) für $x=0$ nicht unendlich werden, sondern daß $\int_0^x P\omega_1\,dx$ und $\int_0^x P\omega_2\,dx$ für $x=0$ verschwinden; dabei sind überdies die bekannten*) Reihenentwicklungen in der Umgebung von $x=0$ für ω_1 und ω_2 zu berücksichtigen.

*) Vgl. L. Fuchs, J. f. Math. 71, Nr. 21, Ges. math. Werke I, S. 274—281. Vgl. zu diesen und den folgenden Betrachtungen auch meine Arbeit, Math. Ann. 70, S. 525 ff.

Man erhält nunmehr mit Berücksichtigung von (16)

$$(19)\qquad f_{1000} = \left(\frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial a}\right)_{a=b=c=d=0}$$

$$= \frac{\sqrt{\psi(\eta)}}{2\pi i}\left[-\omega_1\int_0^x \frac{\sqrt{\psi(\eta)}}{x(x-1)}\omega_2\,dx + \omega_2\int_0^x \frac{\sqrt{\psi(\eta)}}{x(x-1)}\omega_1\,dx\right],$$

und analog, wenn man entsprechend (15) und (15a)

$$(20)\qquad \eta_1 = \frac{\eta - x}{\eta - 1} = f((c_1+1)\omega_1 + c_2\omega_2),\qquad \eta_2 = \frac{x}{\eta} = f(c_1\omega_1 + (c_2+1)\omega_2),$$

$$\eta_3 = \frac{x(\eta-1)}{\eta - x} = f((c_1+1)\omega_1 + (c_2+1)\omega_2)$$

setzt,

$$(21)\qquad f_{0100} = \frac{\sqrt{\psi(\eta)}}{2\pi i}\left[-\omega_1\int_0^x \frac{\sqrt{\psi(\eta_2)}}{x(x-1)}\omega_2\,dx + \omega_2\int_0^x \frac{\sqrt{\psi(\eta_2)}}{x(x-1)}\omega_1\,dx\right],$$

$$(22)\qquad f_{0010} = \frac{\sqrt{\psi(\eta)}}{2\pi i}\left[-\omega_1\int_0^x \frac{\sqrt{\psi(\eta_1)}}{x(x-1)}\omega_2\,dx + \omega_2\int_0^x \frac{\sqrt{\psi(\eta_1)}}{x(x-1)}\omega_1\,dx\right],$$

$$(23)\qquad f_{0001} = \frac{\sqrt{\psi(\eta)}}{2\pi i}\left[-\omega_1\int_0^x \frac{\sqrt{\psi(\eta_3)}}{x(x-1)}\omega_2\,dx + \omega_2\int_0^x \frac{\sqrt{\psi(\eta_3)}}{x(x-1)}\omega_1\,dx\right].$$

In derselben Weise lassen sich nun alle folgenden $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ berechnen. Es kommen in diesen Ausdrücken $\left[\frac{d^i}{du^i}f(u)\right]_{u=c_1\omega_1+c_2\omega_2}$ d. h. ganze rationale Funktionen von η vor, die bei ungeradem i noch mit $\sqrt{\psi(\eta)}$ multipliziert sind und vielfache Integrale zwischen den Grenzen 0 und x, wobei sich die Integranden aus η_i, $\sqrt{\psi(\eta_i)}$ sowie ω_1, ω_2, x zusammensetzen. D. h. also, diese Größen enthalten nur algebraische Ausdrücke von x, ω_1, ω_2,

$$f(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)$$

sowie Integrale, deren Integranden wiederum nur algebraische Ausdrücke dieser Größen sind.

Die Koeffizienten der Entwicklung nach positiven ganzen Potenzen von a, b, c, d, berechnen sich also durch das allgemeine Integral η der Gleichung (A), *wenn darin $a = b = c = d = 0$ gesetzt wird.*

Wir werden in der folgenden Nummer sehen, daß der Exponent γ der Entwicklung (6) in der Umgebung von $x = 0$ mit $1 - c_2$ übereinstimmt. Da man es aber in $\eta = f(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)$ durch Hinzufügung eines beliebigen Vielfachen von $2\omega_2$, wodurch ja η ungeändert bleibt, stets erreichen kann, daß der reelle Teil von c_2 absolut kleiner als 1 ist, so kann dasselbe von

vorneherein für γ angenommen werden. *Daraus folgt dann, daß der Charakter als allgemeines Integral durch die dem γ auferlegte Bedingung, daß sein reeller Teil zwischen -1 und $+1$ liegen muß, nicht beeinträchtigt ist.*

VII.

Vergleich der drei Darstellungen von y in der Umgebung von $x = 0, 1, \infty$.

Um nun die in den Entwicklungen (6), (7), (8) VI auftretenden Konstanten $\alpha, \gamma, \alpha_1, \delta, \alpha_2, \varepsilon$ miteinander zu vergleichen, stützen wir uns auf (17) voriger Nummer

$$y = f(u), \tag{1}$$

$$u = -\frac{\omega_1}{2\pi i}\int_1^x P\omega_2\, dx + \frac{\omega_2}{2\pi i}\int_0^x P\omega_1\, dx + c_1\omega_1 + c_2\omega_2, \tag{2}$$

$$P = \frac{1}{x(x-1)}\left[a\sqrt{\psi(\eta)} + b\sqrt{\psi(y_2)} + c\sqrt{\psi(y_1)} + d\sqrt{\psi(y_3)}\right]; \tag{3}$$

wir haben hier die untere Grenze des ersten Integrals in u gegen (17) voriger Nummer abgeändert, wodurch c_1 einen anderen Wert wie dort erhält.

Benutzt man für $f(u)$ die Darstellung*)

$$f(u) = x + 2x(x-1)\frac{1}{\omega_1}\frac{d\omega_1}{dx} \tag{4}$$

$$+\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega_1}\right)} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega_1}(u-2\nu\omega_2)} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega_1}(u+2\nu\omega_2)}\right\},$$

so ist**)

$$\frac{u\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{2}c_1 + \frac{1}{4i}\int_0^1 P\omega_2\, dx + 2ic_2\log 2 - \frac{1}{2}c_2\log x + A_1, \tag{5}$$

wo A_1 für $x = 0$ verschwindet, da wie in der vorigen Nummer erörtert wurde,

$$\int_0^x P\omega_1\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^x P\omega_2\, dx$$

für $x = 0$ veschwinden. Man kann es nun stets so einrichten, daß der reelle Teil von c_2 zwischen Null und Eins liegt, da ja

$$f(c_1\omega_1 + c_2\omega_2 \pm 2g\omega_2) = f(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)$$

*) Vgl. Weierstraß-Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, zweite Ausgabe S. 10.

**) Vgl. dazu Math. Ann. 70, S. 533.

ist, wenn g eine ganze Zahl bedeutet, und $f(-u) = f(u)$ ist. Bei Betrachtung der einzelnen Glieder von (4) findet man dann, daß $y - f(u)$ für $x = 0$ wie

$$(6) \qquad -x^{c_2} \cdot 4 \frac{e^{\pi i c_2 + \frac{1}{2}\int_0^1 P\omega_2 dx}}{2^{4c_2}}$$

verschwindet. Vergleicht man dies mit der Entwicklung (6) voriger Nr., so sieht man, daß

$$(7) \qquad c_2 = 1 - \gamma, \quad \alpha = -\frac{2^{4c_2}}{4e^{\pi i c_2 + \frac{1}{2}\int_0^1 P\omega_2 dx}}.$$

Analog erhält man bei der Betrachtung der Umgebung von $x = 1$

$$(8) \qquad c_1 = 1 - \delta, \quad \alpha_1 = -\frac{2^{4c_1}}{4e^{\pi i c_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 P\omega_1 dx}}.$$

Da $\int P\omega_1 dx$ und $\int P\omega_2 dx$ auch für $x = \infty$ nicht unendlich werden, so erhält man weiter für die Umgebung von $x = \infty$:

$$(9) \qquad c_2 - c_1 + \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^\infty P\omega_1 dx + \int_1^\infty P\omega_2 dx\right] = 1 - \varepsilon,$$

$$(10) \qquad \alpha_2 = -\frac{2^{4(1-\varepsilon)}}{4e^{\pi i c_1 - \frac{1}{2}\int_1^\infty P\omega_2 dx}}.$$

Wenn wir also z. B. die beiden Exponenten, die bei der Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$ und $x = 1$ auftreten, als willkürliche Integrationskonstanten ansehen, so erhalten wir das folgende Resultat: In der Reihe (6) VI ist:

$$(11) \qquad \alpha = -\frac{1}{4}\frac{e^{4(1-\gamma)}}{e^{\pi i(1-\delta) + \frac{1}{2}\int_0^1 P\omega_2 dx}},$$

in der Reihe (7) VI ist:

$$(12) \qquad \alpha_1 = -\frac{1}{4}\frac{e^{4(1-\delta)}}{e^{\pi i(1-\gamma) + \frac{1}{2}\int_0^1 P\omega_1 dx}},$$

in der Reihe (8) VI ist:

$$\varepsilon = 1 - (\delta - \gamma) - \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^\infty P\omega_1\,dx + \int_1^\infty P\omega_2\,dx\right], \tag{13}$$

$$\alpha_2 = \frac{2^{4(1-\varepsilon)}}{e^{\pi i(1-\delta) - \frac{1}{2}\int_1^\infty P\omega_2\,dx}}. \tag{14}$$

Bei der Berechnung der Integrale

$$\int_0^1 P\omega_2\,dx,\quad \int_0^1 P\omega_1\,dx,\quad \int_0^\infty P\omega_1\,dx,\quad \int_1^\infty P\omega_2\,dx$$

lassen sich die Entwicklungen nach Potenzen von a, b, c, d, die wir in der vorigen Nummer entwickelt haben, mit Vorteil verwenden.

VIII.

Betrachtung über die mit den Anfangswerten verschiebbaren Pole der Differentialgleichung.

Betrachten wir nebeneinander die vier Funktionen

$$y,\quad y_1 = f(u+\omega_1) = \frac{y-x}{y-1},\quad y_2 = f(u+\omega_2) = \frac{x}{y}, \tag{1}$$
$$y_3 = f(u+\omega_1+\omega_2) = \frac{x(y-1)}{y-x},$$

die jede einer Differentialgleichung (A), (A_1), (A_2), (A_3) genügen.

Wir haben schon in der vorigen Nummer gesehen, durch welche Vertauschungen der a, b, c, d (A_1), (A_2), (A_3) aus (A) hervorgehen. Man sieht, daß da, wo

$$\begin{array}{llcccc} y & \text{die Werte} & \infty, & 0, & 1, & x \quad \text{erhält,} \\ y_1 & \text{die Werte} & 1, & x, & \infty, & 0, \\ y_2 & \text{die Werte} & 0, & \infty, & x, & 1, \\ y_3 & \text{die Werte} & x, & 1, & 0, & \infty \end{array} \tag{2}$$

annimmt.

Setzt man für y in (A) eine nach positiven ganzen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreitende Reihe, die für $x = \alpha$ verschwindet, so sieht man, daß diese Reihe die Form haben muß

$$y = \frac{\sqrt{b}}{\alpha - 1}(x-\alpha) + m(x-\alpha)^2 + m_3(x-\alpha)^3 + \cdots, \tag{3}$$

wo m eine unbestimmte Konstante ist. Aus (1) und (2) folgt dann so-

gleich, daß die Entwicklung in der Umgebung einer Stelle, an der $y=1$, $y=x$ oder $y=\infty$ wird, die Form haben muß:

$$y = 1 - \frac{\sqrt{c}}{\alpha}(x-\alpha) + m(x-\alpha)^2 + m_3(x-\alpha)^3 + \cdots, \tag{4}$$

$$y = \alpha + (1+\sqrt{d})(x-\alpha) + m(x-\alpha)^2 + m_3(x-\alpha)^3, \tag{5}$$

$$y = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{x-\alpha} + m + m_1(x-\alpha) + \cdots, \tag{6}$$

wo jedes Mal die Konstante m unbestimmt bleibt. Wenn $a=0$ ist, tritt an Stelle von (6)

$$y = \frac{m}{(x-\alpha)^2} + \frac{m_{-1}}{x-\alpha} + m_0 + m_1(x-\alpha) + \cdots, \tag{6a}$$

nur in diesem Falle wird also y von zweiter Ordnung unendlich. Betrachten wir nun wieder $y=f(u)$

$$u = -\frac{\omega_1}{2\pi i}\int_1^x P\omega_2\,dx + \frac{\omega_2}{2\pi i}\int_0^x P\omega_1\,dx + (1-\delta)\omega_1 + (1-\gamma)\omega_2, \tag{7}$$

$$P = \frac{1}{x(x-1)}\left[a\sqrt{\psi(y)} + b\sqrt{\psi(y_2)} + c\sqrt{\psi(y_1)} + d\sqrt{\psi(y_3)}\right]. \tag{8}$$

Wenn x in eine Stelle α einrückt, in der y den Wert 0, 1 oder x annimmt, so wird einer der Werte y_1, y_2, y_3 daselbst unendlich. Man sieht also, daß sich P an allen den Stellen, an denen y, y_1, y_2, y_3 einen der Werte $0, 1, x, \infty$ annimmt, ganz gleichmäßig verhält.

Wenn man also für eine der vier Funktionen z. B. die Stellen angeben kann, an denen sie den Wert Null erhält, so kann man daraus leicht für alle vier Funktionen die Stellen finden, an denen sie gleich $0, 1, x$ oder ∞ werden. Nehmen wir jetzt eine Stelle α, in der y unendlich wird, dann werden daselbst y_1, y_2, y_3 nicht unendlich; wir brauchen nur den Fall (6) ins Auge zu fassen, da im Falle (6a) das Glied mit $\sqrt{\psi(y)}$ fehlt.

Setzt man nun die Entwicklung (6) ein, so sieht man, daß P für $x=\alpha$ von der Ordnung $(x-\alpha)^{-\frac{3}{2}}$ unendlich wird. Jedes der Glieder $\frac{\omega_1}{2\pi i}\int_1^x P\omega_2\,dx$ und $\frac{\omega_2}{2\pi i}\int_0^x P\omega_1\,dx$ wird also, da sich ω_1 und ω_2 an jeder von $0, 1, \infty$ verschiedenen Stelle nach positiven ganzen Potenzen entwickeln lassen, von der Ordnung $(x-\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ unendlich. Da aber die beiden Faktoren der unendlich werdenden Glieder in u entgegengesetzt gleich sind, so wird u für $x=\alpha$ nicht unendlich.

Also wird u *an den Stellen, an denen* y, y_1, y_2, y_3 *die Werte* 0, 1, x, ∞ *annehmen, nicht unendlich*, es wird sich an einer solchen Stelle, $x = \alpha$, nach positiven ganzen Potenzen von $\sqrt{x - \alpha}$ entwickeln lassen.

Aus (7) und (8) folgt weiter Folgendes: Betrachtet man die Stellen, an denen

1. $y = 0, \quad y_1 = x, \quad y_2 = \infty, \quad y_3 = 1$

wird, als Funktion von a, b, c, d, so reduzieren sich diese für $a = b = c = d = 0$ auf die Lösungen der Gleichung:

$$(1 - \delta)\omega_1 + (1 - \gamma)\omega_2 = 2g_1\omega_1 + (2g_2 + 1)\omega_2,$$

wenn g_1 und g_2 positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, da $f(\omega_2) = 0$ ist. Die Lösungen dieser Gleichung erhält man, wenn mit M die Modulfunktion bezeichnet wird, die x als Funktion von $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ darstellt, durch

$$x = M\left(\frac{-\delta + 1 - 2g_1}{\gamma + 2g_2}\right). \tag{9}$$

2. Ebenso findet man, daß sich die Stellen, an denen

$$y = 1, \quad y_1 = \infty, \quad y_2 = x, \quad y_3 = 0$$

wird, für $a = b = c = d = 0$ auf die Werte

$$x = M\left(\frac{\delta + 2g_1}{-\gamma + 1 - 2g_2}\right); \tag{10}$$

3. die Stellen, an denen

$$y = x, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = \infty$$

wird, sich für $a = b = c = d = 0$ auf die Werte

$$x = M\left(\frac{-\delta - 2g_1}{\gamma + 2g_2}\right); \tag{11}$$

4. die Stellen, an denen

$$y = \infty, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = x$$

wird, sich für $a = b = c = d = 0$ auf die Werte

$$x = M\left(\frac{-\delta + 1 - 2g_1}{\gamma + 2g_2 - 1}\right) \tag{12}$$

reduzieren, wo jedes Mal g_1 und g_2 positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Von jeder der Stellen (9) bis (12) muß es bei beliebiger Wahl von γ und δ stets unzählig viele geben, da man unzählig viele positive oder negative ganze Zahlen angeben kann, für die der imaginäre Teil des Argumentes der Modulfunktion, wie es die Theorie dieser Funktionen verlangt, positiv ist.

Berlin-Halensee, am 6. Dezember 1913.

Über die Lösung des Grundproblemes der Elastizitätstheorie.

Von

Arthur Korn in Charlottenburg.

Die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie habe ich mit Hilfe der Methode der sukzessiven Näherungen zum ersten Male im Jahre 1906*) gegeben; ich habe seitdem die bei dieser Lösung benützten Hilfsmittel teils zum Zwecke einfacherer und eleganterer Behandlung der Probleme der Elastizitätstheorie, teils zum Zwecke der Lösung neuer Aufgaben erweitert und für den Gebrauch geeigneter gemacht.**) Ich will in dieser Abhandlung zeigen, wie einfach (mit Rücksicht auf die Schwierigkeit des Problems) sich nunmehr — nach der Zurechtlegung jener Hilfsmittel — die Lösung des „Grundproblemes der Elastizitätstheorie" gestaltet.

Ich bezeichne dabei als „Grundproblem der Elastizitätstheorie", auf welches sich nicht bloß die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, sondern auch z. B. das biharmonische Problem und das erste Randwertproblem in der Theorie der stationären Strömungen mit Reibung begabter Flüssigkeiten zurückführen läßt, die folgende Aufgabe:

Wir suchen drei Potentialfunktionen***) u, v, w eines Raumgebietes τ†), welche bei Benützung der Abkürzungen:

---

*) A. Korn, Abhandlungen zur Elastizitätstheorie I. Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche. Münch. Ber. 36, S. 37, 1906.

**) Man vgl. z. B. Ann. Ec. Norm. (3) 24, S. 9, 1907; 25, S. 529, 1908; Krakauer Anz. 1907, S. 837; Rend. Circ. Mat. Palermo 25, S. 253, 1908; 30, S. 138, 336, 1910; Acta Math. 32, S. 26, 1909; Compt. Rend. 151, S. 50, 299, 1910; 155, S. 1605, 1912.

***) Wir verstehen unter Potentialfunktionen des Gebietes τ solche Funktionen der Stelle (x, y, z) des Gebietes, welche in demselben *mit ihren ersten Ableitungen* eindeutig und stetig sind und der Laplaceschen Differentialgleichung genügen. Man vgl. Anm. * S. 536.

†) Wir setzen die Oberfläche ω von τ als im Endlichen geschlossen und stetig

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\mathfrak{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \mathfrak{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

an der Oberfläche ω die folgenden Grenzbedingungen erfüllen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} u(x,y,z) &= \frac{\varkappa}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\,\frac{d\tau}{r}\right\} + F_1(x,y,z), \\ v(x,y,z) &= \frac{\varkappa}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{u}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \mathfrak{w}\,\frac{d\tau}{r}\right\} + F_2(x,y,z), \\ w(x,y,z) &= \frac{\varkappa}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \mathfrak{v}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{u}\,\frac{d\tau}{r}\right\} + F_3(x,y,z). \end{aligned} \right.$$

Dabei bezeichne $\varkappa$ eine gegebene Zahl, F_1, F_2, F_3 drei gegebene Funktionen der Stelle (x, y, z) der Oberfläche ω, welche mit ihren ersten Ableitungen stetig sind und (im allgemeinen) stetige zweite Ableitungen besitzen.

An Stelle der Voraussetzungen über die zweiten Ableitungen genügt es für die Zwecke der vorliegenden Abhandlung, über die Stetigkeit der ersten Ableitungen eine Höldersche Bedingung vorauszusetzen, die Bedingung, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Oberfläche im Abstande r_{12}:

$$|D_1 F_j(x_2, y_2, z_2) - D_1 F_j(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr A r_{12}^{\varpi}, \qquad (j = 1, 2, 3),$$

wenn A eine endliche Konstante, ϖ eine positive Zahl > 0 bezeichnet, und wenn wir unter $D_1 F_j$ irgend eine der ersten Ableitungen von F_j $(j = 1, 2, 3)$ verstehen.

Mit r bezeichnen wir stets die Entfernung und Richtung:

$d\tau \longrightarrow$ einem variablen Punkte (x, y, z)

bzw. bei Integralen über die Oberfläche ω die Entfernung und Richtung:

$d\omega \longrightarrow$ einem variablen Punkte (x, y, z).

In den Raumintegralen der Formeln (1) sind unter

$$\mathfrak{u}, \ \mathfrak{v}, \ \mathfrak{w}$$

die Werte dieser Funktionen an den Stellen der Raumelemente $d\tau$ zu verstehen.

---

gekrümmt voraus, d. h. wir setzen voraus, daß die Richtungskosinus der inneren Normalen

$$\cos(\nu x), \quad \cos(\nu y), \quad \cos(\nu z),$$

als Funktionen der Stelle (ξ, η, ζ) der Oberfläche ω betrachtet, eindeutig und stetig sind und (im allgemeinen) eindeutige und stetige erste Ableitungen besitzen.

Diese Aufgabe, welche wir auch in der Form:

$$(1')\quad \begin{cases} u(x,y,z)=\lambda\left\{-u(x,y,z)+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\tau}\mathfrak{w}\frac{d\tau}{r}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\tau}\mathfrak{v}\frac{d\tau}{r}\right\}+f_1(x,y,z),\\ v(x,y,z)=\lambda\left\{-v(x,y,z)+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\tau}\mathfrak{u}\frac{d\tau}{r}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\tau}\mathfrak{w}\frac{d\tau}{r}\right\}+f_2(x,y,z),\\ w(x,y,z)=\lambda\left\{-w(x,y,z)+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\tau}\mathfrak{v}\frac{d\tau}{r}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\tau}\mathfrak{u}\frac{d\tau}{r}\right\}+f_3(x,y,z) \end{cases}$$

(an ω) schreiben können, wenn wir

$$(1'')\quad \begin{cases} \varkappa=\frac{2\lambda}{1+\lambda},\\ F_1=\frac{f_1}{1+\lambda},\quad F_2=\frac{f_2}{1+\lambda},\quad F_3=\frac{f_3}{1+\lambda} \end{cases}$$

setzen*), soll in dieser Abhandlung vollständig gelöst werden; die aus der Lösung sich ergebenden Resultate stelle ich in dem letzten Abschnitte übersichtlich zusammen.

I. Abschnitt.

Die zu benützenden Hilfssätze aus der Potentialtheorie.

§ 1.

Hilfssatz 1. Es sei $\bar{\theta}$ eine gegebene, eindeutige und stetige Funktion der Stelle (x, y, z) der Oberfläche ω, und zwar genüge ihre Stetigkeit einer Hölderschen Bedingung:

$$(2)\qquad |\bar{\theta}(x_2, y_2, z_2)-\bar{\theta}(x_1, y_1, z_1)| \leqq A r_{12}^{\varpi}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}, wenn A eine endliche Konstante und ϖ einen echten Bruch darstellt; es sei θ die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für das Innengebiet τ der Fläche ω mit den Randwerten $\bar{\theta}$ an ω; dann genügt die Stetigkeit der Funktion $\theta(x, y, z)$ in ganzer Erstreckung des Innengebietes τ der Bedingung:

$$(3)\qquad |\theta(x_2, y_2, z_2)-\theta(x_1, y_1, z_1)| \leqq cA r_{12}^{\varpi}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstande r_{12}, wenn c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängt.

---

*) Der Fall $\lambda=-1$, bzw. $\lim\lambda=-1$ bedarf dabei natürlich einer besonderen Behandlung.

Hilfssatz 2. Besitzen die Randwerte $\bar{\theta}$ einer Potentialfunktion θ des Gebietes τ an der Oberfläche derart stetige erste Ableitungen $D_1\bar{\theta}$, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}:

(4) $$|D_1\bar{\theta}(x_2, y_2, z_2) - D_1\bar{\theta}(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr A r_{12}^{\varpi},$$

wo A eine endliche Konstante und ϖ einen echten Bruch vorstellt, dann gilt in ganzer Erstreckung des Gebietes τ für die Stetigkeit der ersten Ableitungen $D_1\theta$ der Potentialfunktion θ die Beziehung:

(5) $$|D_1\theta(x_2, y_2, z_2) - D_1\theta(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr c(A+M) r_{12}^{\varpi}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstande r_{12}, wenn M eine obere Grenze der $|D_1 F|$ und c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängt.

Hilfssatz 3. Das Potential einer Doppelbelegung der Fläche ω:

(6) $$W(x, y, z) = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,$$

über deren Dichtigkeit $\varkappa$ wir lediglich voraussetzen, daß sie eine (im allgemeinen) stetige Funktion der Stelle der Fläche ω ist, besitzt auf der Fläche ω Werte:

(7) $$W_\omega = \frac{1}{2}(W_a + W_i)^{*)},$$

deren Stetigkeit für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12} der Bedingung genügt:

(8) $$|W_\omega(x_2, y_2, z_2) - W_\omega(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr cM|\varkappa|\, r_{12}^{\Pi},$$

wo Π einen beliebigen echten Bruch, c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Π abhängt; mit $M|\varkappa|$ bezeichnen wir eine obere Grenze der absoluten Werte von $\varkappa$, sodaß

(8') $$|\varkappa| \lesseqgtr M|\varkappa|, \quad |W_\omega| \lesseqgtr cM|\varkappa|.$$

Hilfssatz 4. Das Potential einer Doppelbelegung der Fläche ω:

(9) $$W(x, y, z) = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,$$

über deren Dichtigkeit $\varkappa$ wir die Stetigkeitsvoraussetzung:

(10) $$|\varkappa(x_2, y_2, z_2) - \varkappa(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr A r_{12}^{\varpi}$$

---

*) Indem wir unter W_a bzw. W_i die Randwerte von W an der äußeren bzw. inneren Seite von ω verstehen.

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12} machen, wobei wir unter A eine endliche Konstante, unter ϖ einen echten Bruch verstehen, besitzt auf der Oberfläche ω Werte

$$W_\omega = \frac{1}{2}(W_a + W_i), \tag{11}$$

deren erste Ableitungen $D_1 W_\omega$ derart auf der Fläche stetig sind, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}:

$$|D_1 W_\omega(x_2, y_2, z_2) - D_1 W_\omega(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr c A r_{12}^{\varpi}, \tag{12}$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängt.

Hilfssatz 5. Das Raumpotential:

$$V(x, y, z) = \int_\tau \mathsf{E} \frac{d\tau}{r}, \tag{13}$$

von dessen Dichtigkeit E man lediglich voraussetzt, daß sie in dem Gebiete eine (im allgemeinen) stetige Funktion der Stelle sei, besitzt in ganzer Erstreckung des Gebietes τ erste Ableitungen $D_1 V$, welche derart stetig sind, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstande r_{12}:

$$|D_1 V(x_2, y_2, z_2) - D_1 V(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr c M|\mathsf{E}| r_{12}^{\Pi}, \tag{14}$$

wo Π einen beliebigen echten Bruch, c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Π abhängt. Mit $M|\mathsf{E}|$ bezeichnen wir eine obere Grenze der absoluten Werte von E, sodaß

$$|\mathsf{E}| \lesseqgtr M|\mathsf{E}|, \quad |D_1 V| \lesseqgtr c M|\mathsf{E}|. \tag{14'}$$

Hilfssatz 6. Das Raumpotential:

$$V(x, y, z) = \int_\tau \mathsf{E} \frac{d\tau}{r}, \tag{15}$$

über dessen Dichtigkeit E man die Stetigkeitsvoraussetzung macht, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstande r_{12}:

$$|\mathsf{E}(x_2, y_2, z_2) - \mathsf{E}(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr A r_{12}^{\varpi}, \tag{16}$$

wo A eine endliche Konstante und ϖ einen echten Bruch vorstellt, besitzt in ganzer Erstreckung des Gebietes τ derart stetige zweite Ab-

leitungen $D_2 V$, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstande r_{12}:

$$(17)\qquad |D_2 V(x_2, y_2, z_2) - D_2 V(x_1, y_1, z_1)| \gtrless c(A + M|\mathsf{E}|) r_{12}^{\varpi},$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und ϖ abhängt.

Für die absoluten Werte der zweiten Ableitungen von V gilt bei den Voraussetzungen dieses Hilfssatzes die Ungleichheitsbedingung:

$$(17')\qquad |D_2 V| \gtrless \varepsilon A + \frac{c}{\varepsilon} M |\mathsf{E}|,$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängt, ε eine beliebige, im übrigen beliebig kleine, positive Zahl.

In bezug auf diese Hilfssätze verweise ich auf die beiden ersten Kapitel (S. 12—30) meiner Abhandlung „Sur les équations de l'élasticité", Ann. Ec. Norm. (3) 24, 1907.

§ 2.

Hilfssatz 7a. Es sei $\bar{\theta}$ eine gegebene, eindeutige und stetige Funktion der Stelle der Fläche ω, und zwar genüge ihre Stetigkeit einer Hölderschen Bedingung:

$$(18)\qquad |\bar{\theta}(x_2, y_2, z_2) - \bar{\theta}(x_1, y_1, z_1)| \gtrless A r_{12}^{\varpi}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}, wo A eine endliche Konstante und ϖ einen echten Bruch vorstellt; es sei θ die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für das Innengebiet τ von ω bei den Randwerten $\bar{\theta}$ an ω. Wir bilden das Raumpotential:

$$(19)\qquad V(x, y, z) = \int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}$$

und an der Oberfläche ω die Werte:

$$(20)\qquad \psi = \bar{\theta} + \frac{1}{2\pi}\left\{\left|\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right|_i {}^{*)} + \left|\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right|_a\right\} \equiv \bar{\theta} + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right|_{i+a},$$

*) Unter n verstehen wir die innere Normale in einem Punkte (x, y, z) der Oberfläche und schreiben zur Abkürzung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cos^2(nx) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cos^2(ny) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\cos^2(nz) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\cos(ny)\cos(nz)$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\cos(nz)\cos(nx) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\cos(nx)\cos(ny).$$

dann ist:

$$|\psi| \lesseqgtr a M |\bar{\theta}|, \tag{21}$$

wo a eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängt, $M|\bar{\theta}|$ eine obere Grenze der absoluten Werte von $\bar{\theta}$, sodaß:

$$|\bar{\theta}| \lesseqgtr M|\bar{\theta}|,$$

und die Funktion ψ ist auf der Oberfläche ω derart stetig, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}:

$$|\psi(x_2, y_2, z_2) - \psi(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr \left\{\varepsilon A + \frac{c}{\varepsilon} M|\bar{\theta}|\right\} r_{12}^{\varpi}, \tag{22}$$

wenn c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängt, ε eine beliebige, im übrigen beliebig kleine positive Zahl.

Hilfssatz 7b. Es seien $\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}, \bar{\mathfrak{w}}$ drei gegebene, eindeutige und stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω, und zwar genüge ihre Stetigkeit Hölderschen Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{\mathfrak{u}}(x_2, y_2, z_2) - \bar{\mathfrak{u}}(x_1, y_1, z_1)| \\ |\bar{\mathfrak{v}}(x_2, y_2, z_2) - \bar{\mathfrak{v}}(x_1, y_1, z_1)| \\ |\bar{\mathfrak{w}}(x_2, y_2, z_2) - \bar{\mathfrak{w}}(x_1, y_1, z_1)| \end{array}\right\} \lesseqgtr A r_{12}^{\varpi} \tag{23}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}, wo A eine endliche Konstante und ϖ einen echten Bruch vorstellt; es seien $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die Lösungen der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für das Innengebiet τ von ω bei den Randwerten $\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}, \bar{\mathfrak{w}}$ an ω. Wir bilden die Raumpotentiale:

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = \displaystyle\int_\tau \mathfrak{u} \frac{d\tau}{r}, \\ V_2 = \displaystyle\int_\tau \mathfrak{v} \frac{d\tau}{r}, \\ V_3 = \displaystyle\int_\tau \mathfrak{w} \frac{d\tau}{r} \end{array}\right. \tag{24}$$

und an der Oberfläche ω die Werte:

$$\mathfrak{u}_\nu = \bar{\mathfrak{u}} \cos(\nu x) + \bar{\mathfrak{v}} \cos(\nu y) + \bar{\mathfrak{w}} \cos(\nu z), \tag{25}$$

$$
(26)\quad\left\{\begin{aligned}
\psi_1(x,y,z) &= \left|\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \mathfrak{u}_\nu \frac{d\omega}{r}\right|_i\\
&- \left\{\cos(nx)\left|\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\,\partial n}\right|_{i+a} + \cos(ny)\left|\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial n}\right|_{i+a} + \cos(nz)\left|\frac{\partial^2 V_3}{\partial x\,\partial n}\right|_{i+a}\right\},\\
\psi_2(x,y,z) &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \mathfrak{u}_\nu \frac{d\omega}{r}\right|_i\\
&- \left\{\cos(nx)\left|\frac{\partial^2 V_1}{\partial y\,\partial n}\right|_{i+a} + \cos(ny)\left|\frac{\partial^2 V_2}{\partial y\,\partial n}\right|_{i+a} + \cos(nz)\left|\frac{\partial^2 V_3}{\partial y\,\partial n}\right|_{i+a}\right\},\\
\psi_3(x,y,z) &= \left|\frac{\partial}{\partial z}\int_\omega \mathfrak{u}_\nu \frac{d\omega}{r}\right|_i\\
&- \left\{\cos(nx)\left|\frac{\partial^2 V_1}{\partial z\,\partial n}\right|_{i+a} + \cos(ny)\left|\frac{\partial^2 V_2}{\partial z\,\partial n}\right|_{i+a} + \cos(nz)\left|\frac{\partial^2 V_3}{\partial z\,\partial n}\right|_{i+a}\right\};
\end{aligned}\right.
$$

dann ist:

$$
(27)\quad \left.\begin{array}{l} |\psi_1| \\ |\psi_2| \\ |\psi_3| \end{array}\right\} \overset{=}{<} a M(|\bar{\mathfrak{u}}|, |\bar{\mathfrak{v}}|, |\bar{\mathfrak{w}}|),
$$

wo a eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängt, $M(|\bar{\mathfrak{u}}|, |\bar{\mathfrak{v}}|, |\bar{\mathfrak{w}}|)$ eine obere Grenze der absoluten Werte von $\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}, \bar{\mathfrak{w}}$, sodaß:

$$
\left.\begin{array}{l} |\bar{\mathfrak{u}}| \\ |\bar{\mathfrak{v}}| \\ |\bar{\mathfrak{w}}| \end{array}\right\} \overset{=}{<} M(|\bar{\mathfrak{u}}|, |\bar{\mathfrak{v}}|, |\bar{\mathfrak{w}}|),
$$

und die Funktionen ψ_1, ψ_2, ψ_3 sind auf der Oberfläche ω derartig stetig, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}:

$$
(28)\quad \left\{\begin{array}{l} |\psi_1(x_2, y_2, z_2) - \psi_1(x_1, y_1, z_1)| \\ |\psi_2(x_2, y_2, z_2) - \psi_2(x_1, y_1, z_1)| \\ |\psi_3(x_2, y_2, z_2) - \psi_3(x_1, y_1, z_1)| \end{array}\right\} \overset{=}{<} \left\{\varepsilon A + \frac{c}{\varepsilon} M(|\bar{\mathfrak{u}}|, |\bar{\mathfrak{v}}|, |\bar{\mathfrak{w}}|)\right\} r_{12}^{\varpi},
$$

wenn c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängt, ε eine beliebige, im übrigen beliebig kleine positive Zahl. —

Den Beweis des Hilfssatzes 7a habe ich in meiner oben zitierten Abhandlung „Sur les équations de l'elasticité", Ann. Ec. Norm. (3) 24,

1907, S. 31—40 ausführlich gegeben*); der Beweis des Hilfssatzes 7b ist einigermaßen analog; man erkennt dies leicht, und man kann so die Beweise der beiden Hilfssätze zusammenfassen, indem man mit Hilfe der Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen die folgenden Formeln für den Fall beweist, daß die Fläche ω eine Kugel vom Radius R ist:

$$(29)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial n}\right|_{i+a} = \left|\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\limits_\omega \bar{\theta}\frac{d\omega}{r}\right|_i + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{2}{R}\cos(nx)\dfrac{\partial V}{\partial n}, \\ \left|\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\partial n}\right|_{i+a} = \left|\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\limits_\omega \bar{\theta}\frac{d\omega}{r}\right|_i + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{2}{R}\cos(ny)\dfrac{\partial V}{\partial n}, \\ \left|\dfrac{\partial^2 V}{\partial z\partial n}\right|_{i+a} = \left|\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int\limits_\omega \bar{\theta}\frac{d\omega}{r}\right|_i + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{2}{R}\cos(nz)\dfrac{\partial V}{\partial n}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich einerseits:

$$(30)\quad \psi = \bar{\theta} + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_\omega \bar{\theta}\frac{d\omega}{r}\right|_i - \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial V}{\partial n},$$

andererseits, wenn man die Formeln für V_1, für V_2 und für V_3 bildet und die so entstehenden Formeln bzw. mit

$$\cos(nx),\quad \cos(ny),\quad \cos(nz)$$

multipliziert und addiert:

$$\cos(nx)\left|\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial n}\right|_{i+a} + \cos(ny)\left|\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\partial n}\right|_{i+a} + \cos(nz)\left|\frac{\partial^2 V_3}{\partial x\partial n}\right|_{i+a}$$
$$= \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial V_1}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial V_2}{\partial x}\cos(ny) + \frac{\partial V_3}{\partial x}\cos(nz)\right\}$$
$$- \frac{2\cos(nx)}{R}\left\{\frac{\partial V_1}{\partial n}\cos(nx) + \frac{\partial V_2}{\partial n}\cos(ny) + \frac{\partial V_3}{\partial n}\cos(nz)\right\}$$
$$+ \cos(nx)\left|\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\omega \bar{\mathfrak{u}}\frac{d\omega}{r}\right|_i + \cos(ny)\left|\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\omega \bar{\mathfrak{v}}\frac{d\omega}{r}\right|_i + \cos(nz)\left|\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\omega \bar{\mathfrak{w}}\frac{d\omega}{r}\right|_i,$$

und die beiden entsprechenden Formeln; also:

$$(31)\quad \begin{cases} \psi_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\displaystyle\int\limits_\omega \bar{\mathfrak{u}}(\cos(\nu x) - \cos(nx))\frac{d\omega}{r} + \int\limits_\omega \bar{\mathfrak{v}}(\cos(\nu y) - \cos(ny))\frac{d\omega}{r}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \displaystyle\int\limits_\omega \bar{\mathfrak{w}}(\cos(\nu z) - \cos(nz))\frac{d\omega}{r}\right\} \\ \quad - \dfrac{1}{R}\left\{\dfrac{\partial V_1}{\partial x}\cos(nx) + \dfrac{\partial V_2}{\partial x}\cos(ny) + \dfrac{\partial V_3}{\partial x}\cos(nz)\right\} \\ \quad + \dfrac{2\cos(nx)}{R}\left\{\dfrac{\partial V_1}{\partial n}\cos(nx) + \dfrac{\partial V_2}{\partial n}\cos(ny) + \dfrac{\partial V_3}{\partial n}\cos(nz)\right\}, \end{cases}$$

*) Formal geht der Hilfssatz 7a in den dort bewiesenen Satz III über, wenn man bedenkt, daß

$$\bar{\theta} + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right|_{i+a} = -\left\{\bar{\theta} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right|_a\right\}.$$

analog ψ_2 und ψ_3. Bedenkt man, daß Integrale von der Form

$$\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_\omega \bar{\theta}\,\frac{d\omega}{r}\right|_i + \bar{\theta} = \frac{1}{4\pi}\left|\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_\omega \bar{\theta}\,\frac{d\omega}{r}\right|_{i+a},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\omega \bar{\mathfrak{u}}\cdot(\cos(\nu x) - \cos(nx))\,\frac{d\omega}{r}, \cdots \qquad \text{an } \omega,$$

genau wie die Integrale

$$\left|\int\limits_\omega \bar{\theta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right|_{i+a}$$

(nach Hilfssatz 1) und wie die Integrale

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial V_1}{\partial x}, \cdots$$

(nach Hilfssatz 5) die von den Funktionen ψ bzw. ψ_1, ψ_2, ψ_3 in den Formeln (21), (22) bzw. (27), (28) behaupteten Eigenschaften haben*), so erkennt man zunächst, daß die Behauptungen der Sätze 7a und 7b für den Fall richtig sind, daß die Fläche eine Kugel vom Radius R ist; die Verallgemeinerung der Sätze für beliebige, im Endlichen geschlossene, stetig gekrümmte Flächen ω folgt darauf Schritt für Schritt in derselben Weise, wie ich dies für die Funktion ψ in der oben zitierten Abhandlung „Sur les équations de l'élasticité", Ann. Ec. Norm. (3) 24, 1907, S. 33—40 gezeigt habe.

§ 3.

Hilfssatz 8. Es seien

$$u_j,\ v_j,\ w_j \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, p),$$

$p+1$ Tripel von Potentialfunktionen des Gebietes τ, und wir setzen die Stetigkeit der ersten Ableitungen dieser Funktionen derart voraus, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ in dem Abstande r_{12}:

$$(32)\quad \begin{cases} |\theta_j(x_2, y_2, z_2) - \theta_j(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr B_j r_{12}^{\varpi}; \\ \left.\begin{array}{l} |\mathfrak{u}_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}_j(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{v}_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{v}_j(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{w}_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{w}_j(x_1, y_1, z_1)| \end{array}\right\} \lesseqgtr B_j r_{12}^{\varpi}, \end{cases}$$

wo die B_j Konstanten bedeuten, und ϖ einen echten Bruch.

---

*) Ja, es kann für diese Funktionen in den für sie geltenden Hölderschen Stetigkeitsbeziehungen in den $\{-\}$ der Beziehungen (32), (28) der Summand εA fortgelassen werden.

Wir setzen:

$$(33)\qquad \begin{cases} u = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p, \\ v = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p, \\ w = \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_p w_p, \end{cases}$$

$$(34)\qquad \begin{cases} |\theta(x_2, y_2, z_2) - \theta(x_1, y_1, z_1)| \gtreqless B r_{12}^{\varpi}, \\ |\mathfrak{u}(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}(x_1, y_1, z_1)| \gtreqless B r_{12}^{\varpi}, \cdots, \end{cases}$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$ reelle Konstanten sein mögen, welche der Gleichung:

$$(35)\qquad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1$$

genügen; wir definieren die drei Potentialfunktionen u', v', w' des Gebietes τ durch die Grenzbedingungen:

$$(36)\qquad \left.\begin{cases} u' = - u + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\,\frac{d\tau}{r}, \\ v' = - v + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \mathfrak{w}\,\frac{d\tau}{r}, \\ w' = - w + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{u}\,\frac{d\tau}{r} \end{cases}\right\}\ \text{an } \omega;$$

wir können stets die Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$$

so bestimmen, daß

$$(37)\qquad \int_\tau \{\theta'^2 + \mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2\}\,d\tau \gtreqless \varepsilon_p \int_\omega \{\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2\}\,d\tau + \varepsilon_p' B^2,$$

wo ε_p und ε_p' positive Zahlen sind, welche man durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken kann, oder:

$$(38)\qquad J' \gtreqless \varepsilon_p J + \varepsilon_p' B^2,$$

wenn wir

$$(39)\qquad \begin{cases} J = \displaystyle\int_\tau \{\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2\}\,d\tau, \\ J' = \displaystyle\int_\tau \{\theta'^2 + \mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2\}\,d\tau \end{cases}$$

setzen. —

Zum Beweise teilen wir das Gebiet τ in m Teile, wo m die größte ganze Zahl $\gtreqless \frac{p}{4}$ bedeuten möge, in solcher Weise, daß die größte Entfernung zweier in ein und demselben Teilgebiete gelegener Punkte

$$r_{12} \gtrless \frac{\alpha}{\sqrt[3]{p}} \tag{40}$$

wird, wo α eine endliche Konstante vorstelle, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängt; wir bestimmen die Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$$

derart, daß die Gleichungen stattfinden:

$$\int_{\tau_i} \theta' \, d\tau = 0, \tag{41}$$

$$\int_{\tau_i} \mathfrak{u}' \, d\tau = \int_{\tau_i} \mathfrak{v}' \, d\tau = \int_{\tau_i} \mathfrak{w}' \, d\tau = 0, \tag{42}$$

für jedes der kleinen Teilgebiete τ_i; es sind dies in der Tat p oder weniger lineare und homogene Gleichungen für die $p+1$ Konstanten:

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p,$$

welche noch der Bedingung:

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1 \tag{43}$$

zu genügen haben; ihre Bestimmung ist also stets möglich.

Nach den Voraussetzungen und nach den Hilfssätzen 2 und 6 genügen die ersten Ableitungen von $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}'$ in τ derartigen Stetigkeitsbedingungen, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) von τ im Abstande r_{12}:

$$\left.\begin{array}{l} |\,\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)\,| \\ |\,\mathfrak{u}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}'(x_1, y_1, z_1)\,| \\ |\,\mathfrak{v}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{v}'(x_1, y_1, z_1)\,| \\ |\,\mathfrak{w}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{w}'(x_1, y_1, z_1)\,| \end{array}\right\} \gtrless (c_1 M + c_2 B) r_{12}^{\varepsilon}, \tag{44}$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche, positive Konstanten vorstellen, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von $\overline{\omega}$ abhängen, und wo wir mit M eine obere Grenze der absoluten Werte von

$$\theta, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$$

bezeichnen. Mit Rücksicht auf (41) und (42) ist für jeden Punkt (ξ, η, ζ) des Gebietes τ_i:

$$\left\{\begin{array}{l} \theta'(\xi, \eta, \zeta) = \dfrac{1}{\tau_i} \displaystyle\int_{\tau_i} \{\theta'(\xi, \eta, \zeta) - \theta'(x, y, z)\}\, d\tau, \\[2ex] \mathfrak{u}'(\xi, \eta, \zeta) = \dfrac{1}{\tau_i} \displaystyle\int_{\tau_i} \{\mathfrak{u}'(\xi, \eta, \zeta) - \mathfrak{u}'(x, y, z)\}\, d\tau, \cdots, \end{array}\right. \tag{45}$$

folglich nach (40) und (44):

$$\left.\begin{matrix}|\theta'|\\ |\mathfrak{u}'|\\ |\mathfrak{v}'|\\ |\mathfrak{w}'|\end{matrix}\right\} \overline{\gtrless} (c_1 M + c_2 B)\left(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{p}}\right)^{\varpi}, \tag{46}$$

somit:

$$\int_\tau \{\theta'^2 + \mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2\}\,d\tau \overline{\gtrless} (C_1 M^2 + C_2 B^2)\frac{1}{\sqrt[3]{p^{2\varpi}}}, \tag{47}$$

wo wieder C_1 und C_2 zwei endliche, positive Konstanten sind, welche lediglich von der Fläche ω und von ϖ abhängen. Nun ist, da θ, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ in dem Innengebiete τ von ω harmonische Funktionen sind, welche nach (32) einer Hölderschen Bedingung genügen*):

$$M \overline{\gtrless} \frac{c'}{\sqrt{\varrho^3}}\sqrt{\int_\tau (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\,d\tau} + B\varrho^{\varpi}, \tag{48}$$

wo c' einen endlichen Zahlenfaktor vorstellt und man unter ϱ irgend eine, im übrigen beliebig kleine Länge verstehen kann. Setzt man dies in (47) ein, so ergibt sich eine Beziehung von der Form:

$$\int_\tau \{\theta'^2 + \mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2\}\,d\tau \overline{\gtrless} \varepsilon\int_\tau \{\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2\}\,d\tau + \varepsilon' B^2, \tag{49}$$

wo man die Größen ε und ε' dadurch, daß man zunächst ϱ genügend klein und dann p genügend groß macht, unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken kann.

Hilfssatz 9. Es seien u, v, w drei Potentialfunktionen des Gebietes τ; wir setzen die Stetigkeit der ersten Ableitungen dieser Funktionen derart

---

*) Sei in der Tat (ξ, η, ζ) irgend ein Punkt der Oberfläche; wir konstruieren in demselben die innere Normale und auf derselben in einem genügend kleinen Abstande ϱ den Punkt 0 so, daß die um 0 als Zentrum mit dem Radius ϱ geschlossene Kugel ganz in dem Gebiete τ liegt, dann ist für jede Potentialfunktion φ von τ

$$\frac{4\pi}{3}\varrho^3\varphi(0) = \int \varphi\,d\tau \quad \text{(das Integral über die Kugel vom Radius } \varrho \text{ zu erstrecken),}$$

und wenn allgemein für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) von τ im Abstand r_{12}

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \overline{\gtrless} B r_{12}^{\varpi},$$

$$|\varphi(\xi, \eta, \zeta)| \overline{\gtrless} B\varrho^{\varpi} + \frac{3}{4\pi\varrho^3}\int \varphi\,d\tau.$$

Hieraus folgt leicht die obige Ungleichheitsbedingung. (Man vgl. analoge Betrachtungen, Münch. Ber. 36, S. 375—376, 1906; Krakauer Anz. 1907, S. 847).

voraus, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstande r_{12}:

$$(50) \qquad \left.\begin{array}{l} |\theta(x_2, y_2, z_2) - \theta(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{u}(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{v}(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{v}(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{w}(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{w}(x_1, y_1, z_1)| \end{array}\right\} \overline{\gtrless} B r_{12}^{\varpi},$$

wo B eine endliche Konstante und ϖ einen echten Bruch vorstellt; wir definieren die drei Potentialfunktionen u', v', w' des Gebietes τ durch die Randwerte

$$(51) \qquad \left\{\begin{array}{l} u' = - u + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\frac{d\tau}{r}, \\ v' = - v + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \mathfrak{w}\frac{d\tau}{r}, \\ w' = - w + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{u}\frac{d\tau}{r}, \end{array}\right\} \text{ an } \omega;$$

dann ist für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstande r_{12}:

$$(52) \qquad \left.\begin{array}{l} |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{u}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}'(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{v}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{v}'(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{w}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{w}'(x_1, y_1, z_1)| \end{array}\right\}$$

$$\overline{\gtrless} \left\{ \frac{c}{1+\frac{3}{\varpi}} \sqrt{\int_\tau (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2) d\tau} + \varepsilon B \right\} r_{12}^{\varpi},$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängt und von dem echten Bruche ϖ, ε eine positive Zahl, welche man beliebig klein wählen kann. —

Zum Beweise bemerken wir, daß nach (51)

$$u' + u, \quad v' + v, \quad w' + w$$

die Potentialfunktionen des Gebietes τ sind, welche an ω die Randwerte:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\frac{d\tau}{r}, \cdots$$

besitzen, und es ist

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} u'+u &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}(u'+u)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + X_1,\\ v'+v &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}(v'+v)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + X_2,\\ w'+w &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}(w'+w)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + X_3,\end{aligned}\right\}\ \text{in } \tau,$$

wobei nach den Hilfssätzen 5, 4, 2 die ersten Ableitungen

$$D_1 X_1,\quad D_1 X_2,\quad D_1 X_3$$

der Funktionen X_1, X_2, X_3 in τ derartig stetig sind, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) von τ im Abstande r_{12}:

$$(54)\qquad |D_1 X_j(x_2, y_2, z_2) - D_1 X_j(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr \frac{1}{2}\, C M r_{12}^{\Pi},\quad (j=1,2,3),$$

wo Π einen beliebigen echten Bruch darstellt, C eine endliche Konstante, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von der Wahl des echten Bruches Π abhängt. Andererseits ist im ganzen Außenraume von ω:

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\tau}\mathfrak{w}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\tau}\mathfrak{v}\frac{d\tau}{r} &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}(u'+u)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + Y_1,\\ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\tau}\mathfrak{u}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\tau}\mathfrak{w}\frac{d\tau}{r} &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}(v'+v)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + Y_2,\\ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\tau}\mathfrak{v}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\tau}\mathfrak{u}\frac{d\tau}{r} &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}(w'+w)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + Y_3,\end{aligned}\right.$$

wobei wiederum in irgend einem ganz im Endlichen gelegenen, keinen Punkt von τ in seinem Inneren enthaltenden Gebiete die ersten Ableitungen

$$D_1 Y_1,\quad D_1 Y_2,\quad D_1 Y_3$$

der Funktionen Y_1, Y_2, Y_3 derart stetig sind, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstande r_{12}:

$$(56)\qquad |D_1 Y_j(x_2, y_2, z_2) - D_1 Y_j(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr \frac{1}{2}\, C M r_{12}^{\Pi},\qquad (j=1,2,3)$$

wobei wir den Größen C und Π dieselben Werte beilegen können, wie in (54).

Da*)

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\omega}(u'+u)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right|_a = \left|\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\omega}(u'+u)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right|_i,$$

*) Vgl. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 394 (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1899).

so ergibt sich aus (54) und (55):

$$
(57)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(u'+u)}{\partial n} = -\dfrac{1}{2\pi}\left\{\left|\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{w}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_a - \left|\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{v}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_a\right\} + Z_1, \\[2ex] \dfrac{\partial(v'+v)}{\partial n} = -\dfrac{1}{2\pi}\left\{\left|\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{u}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_a - \left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{w}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_a\right\} + Z_2, \\[2ex] \dfrac{\partial(w'+w)}{\partial n} = -\dfrac{1}{2\pi}\left\{\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{v}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_a - \left|\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{u}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_a\right\} + Z_3, \end{cases}
$$

wenn wir unter Z_1, Z_2, Z_3 drei Funktionen der Stelle der Oberfläche ω verstehen, von solcher Stetigkeit, daß für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}:

$$
(58)\qquad |Z_j(x_2, y_2, z_2) - Z_j(x_1, y_1, z_1)| \gtreqless C M r_{12}^{\Pi} \qquad (j = 1, 2, 3).
$$

Da an der Oberfläche ω:

$$
u' + u - \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{w}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{v}\,\frac{d\tau}{r}\right\} = 0, \cdots,
$$

folgt:

$$
(59)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}' + \mathfrak{u} - \dfrac{1}{2\pi}\left\{4\pi\mathfrak{u} + \dfrac{\partial}{\partial x}\int\limits_\omega \mathfrak{u}_\nu\,\dfrac{d\omega}{r}\right\} \\[2ex] \quad = \left\{\dfrac{\partial}{\partial n}(w + w') - \dfrac{1}{2\pi}\left(\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n_i}\int\limits_\tau \mathfrak{v}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_i - \left|\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial n_i}\int\limits_\tau \mathfrak{u}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_i\right)\right\}\cos(ny) \\[2ex] \quad - \left\{\dfrac{\partial}{\partial n}(v + v') - \dfrac{1}{2\pi}\left(\left|\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial n_i}\int\limits_\tau \mathfrak{u}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_i - \left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n_i}\int\limits_\tau \mathfrak{w}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_i\right)\right\}\cos(nz), \cdots, \end{cases}
$$

oder mit Rücksicht auf (57):

$$
(60)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}' = -\dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{v}\,\dfrac{d\tau}{r} - \dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{u}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+a}\cos(ny) \\[2ex] \quad + \dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{u}\,\dfrac{d\tau}{r} - \dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n_a}\int\limits_\tau \mathfrak{w}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+a}\cos(nz) \\[2ex] \quad + \mathfrak{u} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_a}\int\limits_\omega \mathfrak{u}_\nu\,\dfrac{d\omega}{r} + \Xi_1, \cdots, \end{cases}
$$

wo Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 drei Funktionen der Stelle der Fläche ω darstellen, deren Stetigkeit der Bedingung genügt:

$$
(61)\qquad |\Xi_j(x_2, y_2, z_2) - \Xi_j(x_1, y_1, z_1)| \gtreqless 2 C M r_{12}^{\Pi} \qquad (j = 1, 2, 3),
$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}.

Wir können (60) auch so schreiben:

$$
(62)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}' = u + \dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial n^2}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+a} + \Xi_1 + \dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\omega \mathfrak{u}_\nu\,\dfrac{d\omega}{r}\right|_i \\[2ex] \qquad - \dfrac{1}{2\pi}\left\{\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+a}\cos(nx) + \left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+a}\cos(ny)\right. \\[2ex] \qquad\qquad \left. + \left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}\,\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+a}\cos(nz)\right\}, \cdots, \end{cases}
$$

oder unter Benützung der Hilfssätze 7a und 7b:

$$
(63)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}' = \mathsf{H}_1, \\ \mathfrak{v}' = \mathsf{H}_2, \\ \mathfrak{w}' = \mathsf{H}_3, \end{cases}
$$

wo H_1, H_2, H_3 drei Funktionen der Stelle der Fläche ω darstellen, deren Stetigkeit der Bedingung genügt:

$$
(64)\quad |\mathsf{H}_j(x_2, y_2, z_2) - \mathsf{H}_j(x_1, y_1, z_1)| \overline{\gtrless} \left(\varepsilon' B + \frac{b}{\varepsilon'} M\right) r_{12}^{\varpi}
$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}, wo b eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängt, ε' irgend eine positive Zahl, die im übrigen beliebig klein gewählt werden kann.

Um die analoge Stetigkeitsbedingung für θ' abzuleiten, schreiben wir die Gleichungen (51) in der Form:

$$
(65)\quad \left.\begin{cases} u' = u + \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta\,\dfrac{d\tau}{r} + \Phi, \\[2ex] v' = v + \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \theta\,\dfrac{d\tau}{r} + \mathrm{X}, \\[2ex] w' = w + \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \theta\,\dfrac{d\tau}{r} + \Psi, \end{cases}\right\}\ \text{an } \omega,
$$

wo Φ, X, Ψ drei Potentialfunktionen des Gebietes ω vorstellen, die der Gleichung:

$$
(66)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0
$$

genügen. In der Tat, bezeichnen wir mit Φ, X, Ψ die drei Potentialfunktionen des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$
\Phi = -2u - \frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta\,\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\,\frac{d\tau}{r}, \cdots \text{ an } \omega,
$$

so ist in dem ganzen Gebiete τ:

$$\Phi = -2u - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\frac{d\tau}{r}, \cdot \cdot,$$

und es folgt die Gleichung (66). Es sind also

$$u' - u - \Phi, \quad v' - v - \mathsf{X}, \quad w' - w - \Psi$$

Potentialfunktionen des Gebietes τ, welche an ω die Randwerte:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}, \cdot \cdot,$$

besitzen, und es ist entsprechend der Untersuchung (53)—(57):

$$(67) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial n}(u' - u - \Phi) = -\dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial n}\displaystyle\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}\right|_a + \mathsf{Z}_1, \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(v' - v - \mathsf{X}) = -\dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial n}\displaystyle\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}\right|_a + \mathsf{Z}_2, \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(w' - w - \Psi) = -\dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial n}\displaystyle\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}\right|_a + \mathsf{Z}_3, \end{cases}$$

worin wir unter $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2, \mathsf{Z}_3$ drei Funktionen der Stelle der Fläche ω verstehen, deren Stetigkeit der Bedingung genügt:

$$(68) \qquad |\mathsf{Z}_j(x_2, y_2, z_2) - \mathsf{Z}_j(x_1, y_1, z_1)| \gtreqless C M r_{12}^{\Pi}; \qquad (j = 1, 2, 3),$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}, wo Π einen beliebigen echten Bruch vorstellt, und C eine endliche, positive Zahl, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von der Wahl des echten Bruches Π abhängt.

Da an der Oberfläche ω:

$$u' - u - \Phi - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r} = 0, \cdot \cdot,$$

so ist:

$$\begin{aligned} \theta' - \theta + 2\theta = &\left\{\frac{\partial}{\partial n}(u' - u - \Phi) - \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial n}\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}\right|_i\right\}\cos(nx) \\ &+ \left\{\frac{\partial}{\partial n}(v' - v - \mathsf{X}) - \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial n}\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}\right|_i\right\}\cos(ny) \\ &+ \left\{\frac{\partial}{\partial n}(w' - w - \Psi) - \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial n}\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}\right|_i\right\}\cos(nz), \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (67):

$$(69)\quad \theta' = -\theta - \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial n^2}\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}\right|_{i+a} + Z_1 \cos(nx) + Z_2 \cos(ny) + Z_3 \cos(nz),$$

also unter Benützung des Hilfssatzes 7a:

$$(70)\qquad \theta' = \Xi,$$

wo Ξ eine Funktion der Stelle der Fläche ω vorstellt, deren Stetigkeit der Bedingung genügt:

$$(71)\qquad |\Xi(x_2, y_2, z_2) - \Xi(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr \left(\varepsilon' B + \frac{b}{\varepsilon'} M\right) r_{12}^{\varpi},$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}, wo b eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängt, ε' irgend eine positive Zahl, die im übrigen beliebig klein gewählt werden darf.

Bedenkt man noch, daß nach (48):

$$(72)\qquad M \lesseqgtr \frac{c'}{\sqrt{\varrho^3}} \sqrt{\int_\tau (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\, d\tau} + B\varrho^{\varpi}$$

wo c' einen endlichen Zahlenfaktor, ϱ irgend eine, im übrigen beliebig kleine Länge vorstellt, so kann man die Formeln (63), (64); (70), (71) auch so schreiben:

$$(73)\qquad \left.\begin{array}{l} |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{u}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}'(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{v}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{v}'(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{w}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{w}'(x_1, y_1, z_1)| \end{array}\right\}$$

$$\lesseqgtr \frac{bc'}{\varepsilon'\sqrt{\varrho^3}} \sqrt{\int_\tau (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\, d\tau} + B\left(\frac{b}{\varepsilon'}\varrho^{\varpi} + \varepsilon'\right),$$

oder, indem man

$$(74)\qquad b\varrho^{\varpi} = \varepsilon'^2 \equiv \frac{\varepsilon^2}{4}$$

setzt, auch so:

$$(75)\qquad \left.\begin{array}{l} |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{u}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}'(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{v}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{v}'(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{w}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{w}'(x_1, y_1, z_1)| \end{array}\right\}$$

$$\lesseqgtr \frac{c}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} \sqrt{\int_\tau (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\, d\tau} + \varepsilon B,$$

wo wieder c eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche ω und von ϖ abhängig ist, und ε eine beliebig kleine, positive Zahl sein kann. Das ist die Behauptung.

Hilfssatz 10. Es seien f_1, f_2, f_3 drei stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω, deren erste Ableitungen

$$D_1 f_1, \quad D_1 f_2, \quad D_1 f_3$$

den Stetigkeitsbedingungen genügen:

$$|D_1 f_j(x_2, y_2, z_2) - D_1 f_j(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr A r_{12}^{\varpi}; \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{76}$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Fläche ω im Abstande r_{12}, wo A eine endliche Konstante und ϖ einen echten Bruch vorstelle; wir konstruieren sukzessive die Potentialfunktionen des Gebietes τ:

$$u_j, \; v_j, \; w_j; \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots),$$

mit den Randwerten:

$$u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3, \tag{77a}$$

$$\left.\begin{aligned} u_j &= -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\ v_j &= -v_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{u}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\ w_j &= -w_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{u}_{j-1}\frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right\} (j = 1, 2, \cdots), \tag{77b}$$

an ω, dann ist $(j = 1, 2, \cdots)$:

$$\int_\tau (\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\, d\tau = \int_\tau (\theta_{j-1}\theta_{j+1} + \mathfrak{u}_{j-1}\mathfrak{u}_{j+1} + \mathfrak{v}_{j-1}\mathfrak{v}_{j+1} + \mathfrak{w}_{j-1}\mathfrak{w}_{j+1})\, d\tau. — \tag{78}$$

In der Tat, setzen wir $(j = 1, 2, \cdots)$:

$$\hat{u}_j = u_j + u_{j-1} - \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right\}, \cdots, \tag{79}$$

so ist:

$$\Delta \hat{u}_j = 2\left\{\frac{\partial \mathfrak{w}_{j-1}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_{j-1}}{\partial z}\right\}, \cdots \text{ in } \tau; \tag{80a}$$

$$\hat{u}_j = \hat{v}_j = \hat{w}_j = 0, \quad \text{an } \omega; \tag{80b}$$

ferner, wenn wir:

$$\chi_{j-1} = \frac{1}{4\pi}\int_\omega \mathfrak{u}_{j-1,\nu}\frac{d\omega}{r} \tag{81}$$

setzen:

(82a) $$\mathfrak{\mathring{u}}_j = \mathfrak{u}_j - \mathfrak{u}_{j-1} + 2\frac{\partial \chi_{j-1}}{\partial x},$$

(82b) $$\mathring{\theta}_j = \theta_j + \theta_{j-1}.$$

Aus (80a) und (80b) ergibt sich:

(83) $$\int_\tau \left\{\left(\frac{\partial \mathring{u}_j}{\partial x}\right)^2 {}^{*)} + \cdots + \left(\frac{\partial \mathring{v}_j}{\partial x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \mathring{w}_j}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right\} d\tau$$
$$= 2\int_\tau (\mathfrak{\mathring{u}}_j \mathfrak{u}_{j-1} + \mathfrak{\mathring{v}}_j \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{\mathring{w}}_j \mathfrak{w}_{j-1})\, d\tau,$$

und analog sowohl:

(84) $$\int_\tau \left\{\frac{\partial \mathring{u}_j}{\partial x}\frac{\partial \mathring{u}_{j+1}}{\partial x} {}^{**)} + \cdots + \frac{\partial \mathring{v}_j}{\partial x}\frac{\partial \mathring{v}_{j+1}}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \mathring{w}_j}{\partial x}\frac{\partial \mathring{w}_{j+1}}{\partial x} + \cdots\right\} d\tau$$
$$= 2\int_\tau (\mathfrak{\mathring{u}}_j \mathfrak{u}_j + \mathfrak{\mathring{v}}_j \mathfrak{v}_j + \mathfrak{\mathring{w}}_j \mathfrak{w}_j)\, d\tau,$$

als auch:

(85) $$\int_\tau \left\{\frac{\partial \mathring{u}_{j+1}}{\partial x}\frac{\partial \mathring{u}_j}{\partial x} {}^{**)} + \cdots + \frac{\partial \mathring{v}_{j+1}}{\partial x}\frac{\partial \mathring{v}_j}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \mathring{w}_{j+1}}{\partial x}\frac{\partial \mathring{w}_j}{\partial x} + \cdots\right\} d\tau$$
$$= 2\int_\tau (\mathfrak{\mathring{u}}_{j+1} \mathfrak{u}_{j-1} + \mathfrak{\mathring{v}}_{j+1} \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{\mathring{w}}_{j+1} \mathfrak{w}_{j-1})\, d\tau,$$

somit:

$$\int_\tau (\mathfrak{\mathring{u}}_j \mathfrak{u}_j + \mathfrak{\mathring{v}}_j \mathfrak{v}_j + \mathfrak{\mathring{w}}_j \mathfrak{w}_j)\, d\tau + \int_\tau (\mathfrak{\mathring{u}}_{j+1} \mathfrak{u}_{j-1} + \mathfrak{\mathring{v}}_{j+1} \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{\mathring{w}}_{j+1} \mathfrak{w}_{j-1})\, d\tau,$$

und hieraus, mit Rücksicht darauf, daß

$$\int_\tau \left(\mathfrak{u}_j \frac{\partial \chi_{j-1}}{\partial x} + \cdots\right) d\tau = -\int_\omega \chi_{j-1}\mathfrak{u}_{j,\nu}\, d\omega = -\int_{i+a} \left(\frac{\partial \chi_{j-1}}{\partial x}\frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \cdots\right) d\tau$$
$$= -\int_\omega \chi_j \mathfrak{u}_{j-1,\nu}\, d\omega = \int_\tau \left(\mathfrak{u}_{j-1}\frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \cdots\right) d\tau,$$

auch (unter Berücksichtigung von (82)):

(86) $$\int_\tau (\mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\, d\tau = \int_\tau (\mathfrak{u}_{j-1}\mathfrak{u}_{j+1} + \mathfrak{v}_{j-1}\mathfrak{v}_{j+1} + \mathfrak{w}_{j-1}\mathfrak{w}_{j+1})\, d\tau.$$

---

*) Die Punkte bedeuten die Glieder $\left(\frac{\partial \mathring{u}_j}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial \mathring{u}_j}{\partial z}\right)^2$; analog in der Folge.

**) Die Punkte bedeuten die Glieder $\frac{\partial \mathring{u}_j}{\partial y}\frac{\partial \mathring{u}_{j+1}}{\partial y}, \frac{\partial \mathring{u}_j}{\partial z}\frac{\partial \mathring{u}_{j+1}}{\partial z}$; analog in der Folge.

Wir können die Gleichungen (80a) und (80b) auch so schreiben:

$$(87)\qquad \Delta \hat{u}_j = -2\,\frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}, \;\cdots\; \text{in } \tau;$$

$$(88)\qquad \hat{u}_j = \hat{v}_j = \hat{w}_j = 0, \text{ an } \omega,$$

und wir erhalten mit Hilfe dieser Relationen:

$$(89)\qquad \int\limits_\tau \left\{\left(\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \hat{w}_j}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right\} d\tau = 2\int\limits_\tau \hat{\theta}_j \theta_{j-1}\, d\tau,$$

und analog sowohl:

$$(90)\qquad \int\limits_\tau \left\{\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x}\,\frac{\partial \hat{u}_{j+1}}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x}\,\frac{\partial \hat{v}_{j+1}}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial x}\,\frac{\partial \hat{w}_{j+1}}{\partial x} + \cdots\right\} d\tau$$
$$= 2\int\limits_\tau \hat{\theta}_j \theta_j\, d\tau,$$

als auch:

$$(91)\qquad \int\limits_\tau \left\{\frac{\partial \hat{u}_{j+1}}{\partial x}\,\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \hat{v}_{j+1}}{\partial x}\,\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \hat{w}_{j+1}}{\partial x}\,\frac{\partial \hat{w}_j}{\partial x} + \cdots\right\} d\tau$$
$$= 2\int\limits_\tau \hat{\theta}_{j+1} \theta_{j-1}\, d\tau,$$

somit (unter Berücksichtigung von (82b)):

$$(92)\qquad \int\limits_\tau \theta_j^2\, d\tau = \int\limits_\tau \theta_{j-1}\,\theta_{j+1}\, d\tau.$$

Durch Addition von (86) und (92) folgt die Behauptung.

II. Abschnitt.

Die Lösung des gestellten Problemes.

§ 1.

Zur Lösung des Problemes (1′) bilden wir sukzessive die Potentialfunktionen

$$u_j,\; v_j,\; w_j \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots),$$

des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$(93)\qquad \left\{\begin{aligned} & u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3; \\ & u_j = -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\ & v_j = -v_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{u}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\ & w_j = -w_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{u}_{j-1}\frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right\} \text{an } \omega,$$

und setzen:

$$(94)\quad \begin{cases} u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots, \\ v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \cdots, \\ w = w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \cdots; \end{cases}$$

dann sind, wie durch unmittelbare Substitution folgt, diese Funktionen u, v, w die Lösungen der gestellten Aufgabe, wenn wir die erforderlichen Konvergenzbeweise führen können.

Dies hat keine Schwierigkeit, solange $|\lambda|$ unterhalb einer gewissen Grenze liegt; um aber das Problem gleich ganz allgemein anzufassen, bedienen wir uns des folgenden erprobten Kunstgriffes: Es seien

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$$

$p+1$ reelle Konstanten, welche der Bedingung:

$$(95)\quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1$$

genügen, und über welche wir uns noch weitere Bestimmungen vorbehalten; wir stellen uns, statt der Aufgabe (1′), die Aufgabe, drei Potentialfunktionen u', v', w' des Gebietes τ zu konstruieren, welche den Bedingungen:

$$(96)\quad \left.\begin{cases} u' = \lambda\left\{-u' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r}\right\} \\ \qquad + \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p, \\ v' = \lambda\left\{-v' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{u}'\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r}\right\} \\ \qquad + \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p, \\ w' = \lambda\left\{-w' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{u}'\frac{d\tau}{r}\right\} \\ \qquad + \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_p w_p \end{cases}\right\} \text{an } \omega$$

genügen. Wir bilden sukzessive die Potentialfunktionen:

$$u_j', \ v_j', \ w_j' \qquad (j = 0, 1, 2 \cdots),$$

des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$\left.\begin{aligned} &(97)\quad u_0' = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p, \cdots, \\ &(98)\quad u_j' = -u_{j-1}' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \cdots \quad (j=1,2,\cdots), \end{aligned}\right\}\text{an } \omega,$$

und setzen

$$(99)\quad \begin{cases} u' = u_0' + \lambda u_1' + \lambda^2 u_2' + \cdots, \\ v' = v_0' + \lambda v_1' + \lambda^2 v_2' + \cdots, \\ w' = w_0' + \lambda w_1' + \lambda^2 w_2' + \cdots; \end{cases}$$

ich behaupte, wir können dann bei genügend großem p stets die $p+1$ Konstanten so wählen, daß die Funktionen (99) die Lösungen des Problems (96) darstellen, daß diese Reihen also auch alle erforderlichen Konvergenzeigenschaften haben.

Nach dem Beweise der Hilfssätze 8, 9, 10 macht der Beweis dieser Behauptung keine wesentliche Schwierigkeit mehr, er ist Schritt für Schritt derselbe, wie ich ihn für ein sehr allgemeines, eindimensionales Problem in meinem Buche „Über freie und erzwungene Schwingungen"*) Seite 43—48 und für das hier in Frage stehende Problem bei ein klein wenig spezielleren Voraussetzungen über f_1, f_2, f_3 in meiner Abhandlung „Allgemeine Lösung des biharmonischen Problemes im Raume"**) sehr ausführlich angegeben habe. Es ergibt sich bei geeigneter Wahl von

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p:$$

$$(100)\qquad \begin{Bmatrix} |\theta_j'| \gtreqless C_0 L_p^j, \\ |\mathfrak{u}_j'| \gtreqless C_0 L_p^j, \cdots \end{Bmatrix} \qquad (j=0,1,2,\cdots),$$

$$(101)\qquad \begin{Bmatrix} |\theta_j'(x_2,y_2,z_2)-\theta_j'(x_1,y_1,z_1)| \gtreqless C_0 L_p^j r_{12}^{\varpi}, \\ |\mathfrak{u}_j'(x_2,y_2,z_2)-\mathfrak{u}_j'(x_1,y_1,z_1)| \gtreqless C_0 L_p^j r_{12}^{\varpi}, \cdots \end{Bmatrix} \qquad (j=0,1,2,\cdots)$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) des Gebietes τ im Abstande r_{12}, wo C_0 eine endliche Konstante vorstellt, L_p eine positive Zahl, welche durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Die Reihen

$$(102)\qquad \begin{cases} \theta' = \theta_0' + \lambda\theta_1' + \lambda^2\theta_2' + \cdots, \\ \mathfrak{u}' = \mathfrak{u}_0' + \lambda\mathfrak{u}_1' + \lambda^2\mathfrak{u}_2' + \cdots, \cdots \end{cases}$$

sind somit bei geeigneter Wahl der

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$$

in dem ganzen Gebiete τ gleichmäßig konvergent, und die Stetigkeit der durch sie dargestellten Funktionen genügt Hölderschen Bedingungen. Für die Reihen (99) ergeben sich daraus nicht ohne weiteres die notwendigen Konvergenzeigenschaften, es ist nach (98) nur

$$(103)\qquad \begin{Bmatrix} |u_j + u_{j-1}'| \gtreqless C_0 L_p^{j-1}, \cdots \\ |D_1 u_j' + D_1 u_{j-1}'| \gtreqless C_0 L_p^{j-1} r_{12}^{\varpi}, \cdots \end{Bmatrix} \qquad (j=1,2,\cdots),$$

*) Leipzig, B. G. Teubner, 1910.

**) Krakauer Anz. 1907, S. 853—862; in dieser Abhandlung ist $\frac{3}{\Lambda}$ durch $1+\frac{3}{\varpi}$ zu ersetzen, und S. 856 Zeile 6 von unten $\varepsilon(2\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon)$ statt $2\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon$ zu schreiben.

wo A eine endliche Konstante vorstellt; daraus ersehen wir aber jedenfalls, daß wir in dieser Weise die Lösung des Problems erreichen können, drei Potentialfunktionen u_j'', v_j'', w_j'' des Gebietes τ zu konstruieren, welche den Bedingungen:

$$(104)\qquad \begin{cases} u'' = \lambda\left(-u'' + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}''\frac{d\tau}{r} - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}''\frac{d\tau}{r}\right) \\ \quad + \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{p+1} u_{p+1}, \cdots \qquad \text{an } \omega \end{cases}$$

genügen, wenn wir

$$(105)\quad \beta_0 = \alpha_0,\ \beta_1 = \alpha_0 + \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \cdots, \beta_p = \alpha_{p-1} + \alpha_p,\ \beta_{p+1} = \alpha_p$$

setzen, in der Form:

$$(106)\qquad u'' = u_0' + u_1' + \lambda(u_1' + u_2') + \lambda^2(u_2' + u_3') + \cdots, \cdots$$

Nunmehr folgt in bekannter Weise als Lösung des ursprünglichen Problems (1′):

$$(107)\qquad u = \frac{P}{D},$$

$$(108)\qquad \begin{cases} P = \begin{vmatrix} u'' & \beta_1 & \beta_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_p & \beta_{p+1} \\ u_0' + u_1' & -\lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ u_1' + u_2' & 1 & -\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p' + u_{p+1}' & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, \\ D = (-1)^{p+1}\{\beta_0\lambda^{p+1} + \beta_1\lambda^p + \cdots + \beta_p\lambda + \beta_{p+1}\}, \end{cases}$$

falls nicht λ gerade eine Wurzel der Gleichung

$$(109)\qquad D = 0$$

ist.

§ 2.

Nach diesem Hauptresultat führen uns Schritt für Schritt die nämlichen Schlußweisen, wie bei anderen analogen Untersuchungen*), zu dem Resultate, daß, wenn wir zunächst den singulären Fall

$$\lambda = -1$$

ausschließen, die Wurzeln $\lambda_\varkappa$ der Gleichung

$$D = 0,$$

---

*) Man vgl. z. B. „Freie und erzwungene Schwingungen" S. 21. An die Stelle der dort betrachteten Integrale $\int_0^1 P_j^2\,dx$ tritt hier $\int_\tau \{\Theta_\varkappa^2 + \mathfrak{U}_\varkappa^2 + \mathfrak{V}_\varkappa^2 + \mathfrak{W}_\varkappa^2\}\,d\tau$; wenn wir den Fall $\lambda = -1$ ausschließen, folgt stets aus dem Verschwinden dieses Integrales das identische Verschwinden von $U_\varkappa$, $V_\varkappa$, $W_\varkappa$.

denen Pole der Lösungen u, v, w entsprechen, stets nur einfache Pole der Lösungen sein können; ist $\lambda_\varkappa$ wirklich ein Pol der Lösungen, so gehen für $\lim \lambda = \lambda_\varkappa$

$$u(\lambda-\lambda_\varkappa), \quad v(\lambda-\lambda_\varkappa), \quad w(\lambda-\lambda_\varkappa)$$

in ein Tripel von Potentialfunktionen $U_\varkappa$, $V_\varkappa$, $W_\varkappa$ über, welche den Bedingungen:

$$(110)\quad \left.\begin{aligned} U_\varkappa &= \lambda_\varkappa \left\{ -U_\varkappa + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{W}_\varkappa \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{V}_\varkappa \frac{d\tau}{r} \right\}, \\ V_\varkappa &= \lambda_\varkappa \left\{ -V_\varkappa + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{U}_\varkappa \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \mathfrak{W}_\varkappa \frac{d\tau}{r} \right\}, \\ W_\varkappa &= \lambda_\varkappa \left\{ -W_\varkappa + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\partial x}\int\limits_\tau \mathfrak{V}_\varkappa \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{U}_\varkappa \frac{d\tau}{r} \right\}, \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega$$

genügen, wobei $U_\varkappa$, $V_\varkappa$, $W_\varkappa$ nicht gleichzeitig identisch Null sein können.

Ich habe früher solche Funktionentripel, unter Hinzunahme der Bedingungen:

$$(111)\qquad \mathfrak{U}_\varkappa \cos(nx) + \mathfrak{V}_\varkappa \cos(ny) + \mathfrak{W}_\varkappa \cos(nz) = 0, \quad \text{an } \omega,$$

$$(112)\qquad \int\limits_\tau \{ U_\varkappa \cos(\nu x) + V_\varkappa \cos(\nu y) + W_\varkappa \cos(\nu z) \}\, d\omega = 0,$$

$$(113)\qquad \int\limits_\tau (\Theta_\varkappa^2 + \mathfrak{U}_\varkappa^2 + \mathfrak{V}_\varkappa^2 + \mathfrak{W}_\varkappa^2)\, d\tau \neq 0$$

als biharmonische Funktionentripel*) des Gebietes τ bezeichnet; wir werden sogleich sehen, welche Funktionentripel man zu den biharmonischen Funktionentripeln hinzunehmen muß, um alle Funktionentripel zu erschöpfen, welche den Bedingungen (110) genügen.

Es folgt aus (110) an der Fläche ω, wenn wir, entsprechend einer bereits benützten Bezeichnung,

$$\mathfrak{U}_{\varkappa n} = \mathfrak{U}_\varkappa \cos(nx) + \mathfrak{V}_\varkappa \cos(ny) + \mathfrak{W}_\varkappa \cos(nz)$$

setzen:

$$\mathfrak{U}_{\varkappa n} = \lambda_\varkappa \left(\mathfrak{U}_{\varkappa n} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_\omega \mathfrak{U}_{\varkappa n} \frac{d\omega}{r} \right)$$

oder:

$$(114)\qquad \mathfrak{U}_{\varkappa n} = \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda_\varkappa}{1-\lambda_\varkappa}\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_\omega \mathfrak{U}_{\varkappa\nu} \frac{d\omega}{r}.$$

*) Krakauer Anz. 1907, S. 838, 863. Daselbst setzte ich das Integral (113) = 1, was erst für die Reihenentwicklungen nach den biharmonischen Tripeln in Betracht kommt.

Existieren also Funktionentripel, welche den Bedingungen (110) genügen, und für welche

$$\mathfrak{U}_{\varkappa n} \mp 0,$$

so muß

(115a) $$\psi_\varkappa = \text{const.} \frac{1}{4\pi} \int\limits_\omega \mathfrak{U}_{\varkappa \nu} \frac{d\omega}{r}$$

eine Poincarésche Fundamentalfunktion*) des Gebietes τ sein, welche an der Fläche ω die Relation

$$\left|\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial n}\right|_a - \left|\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial n}\right|_i = \text{const.}\, \mathfrak{U}_{\varkappa n} = \frac{2\lambda_\varkappa}{1-\lambda_\varkappa} \left|\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial n}\right|_i,$$

oder

(115b) $$\left|\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial n}\right|_a - \left|\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial n}\right|_i = \lambda_\varkappa \left\{\left|\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial n}\right|_a + \left|\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial n}\right|_i\right\}, \quad 1 < |\lambda_\varkappa| < +\infty,$$

erfüllt. Wir können hieraus folgern, daß die Funktionentripel:

(116) $$U_\varkappa = \frac{c_\varkappa}{4\pi} \left\{\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_\tau \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_\tau \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial y} \frac{d\tau}{r}\right\}, \cdots,$$

in denen die $c_\varkappa$ Konstanten sind, und für welche

(116') $$\mathfrak{U}_\varkappa = c_\varkappa \frac{1+\lambda_\varkappa}{2\lambda_\varkappa} \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial x}, \cdots$$

wird, den Gleichungen (110) genügen, wenn die $\psi_\varkappa$ Poincarésche Fundamentalfunktionen des Gebietes τ sind. Wir können nun auch von den gegebenen Funktionen f_1, f_2, f_3 drei Funktionen f_1', f_2', f_3' so abtrennen, daß, wenn wir unter ψ eine geeignet gewählte Potentialfunktion des Gebietes τ verstehen und

(117) $$U' = \frac{1}{4\pi} \left\{\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_\tau \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_\tau \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{d\tau}{r}\right\}, \cdots$$

setzen, U', V', W' die Lösungen des Problemes

(118) $$U' = \lambda \left(-U' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_\tau \mathfrak{W}' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_\tau \mathfrak{V}' \frac{d\tau}{r}\right\} + f_1', \cdots \text{ an } \omega$$

sind, und daß

(119) $$\left\{\frac{\partial}{\partial y}(f_3 - f_3') - \frac{\partial}{\partial z}(f_2 - f_2')\right\} \cos(nx) + \left\{\frac{\partial}{\partial z}(f_1 - f_1') - \frac{\partial}{\partial x}(f_3 - f_3')\right\} \cos(ny)$$
$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial x}(f_2 - f_2') - \frac{\partial}{\partial y}(f_1 - f_1')\right\} \cos(nz) = 0.$$

---

*) A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 5, S. 50. (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901).

Zur Bestimmung von ψ ergibt sich in der Tat aus (119):

$$\mathfrak{U}_a'(1+\lambda) - 2\lambda\left\{\mathfrak{U}_a' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_\omega \mathfrak{U}_\nu' \frac{d\omega}{r}\right\}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cos(nz),$$

oder, wenn wir

(120) $$\chi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \psi \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

setzen, sodaß

$$\mathfrak{U}' = \frac{\partial\chi}{\partial x}, \cdots$$

wird:

(121) $$(1-\lambda)\frac{\partial\chi}{\partial n} - \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_\omega \frac{\partial\chi}{\partial\nu}\frac{d\omega}{r}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cos(nz),$$

oder, wenn wir schließlich

(122) $$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \frac{\partial\chi}{\partial\nu}\frac{d\omega}{r} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \mathfrak{U}_\nu' \frac{d\omega}{r},$$

einführen:

(123) $$\frac{\partial\Phi_a}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} - \lambda\left\{\frac{\partial\Phi_a}{\partial n} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial n}\right\}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cos(nz),$$

eine Aufgabe, die in der bekannten Weise zu lösen ist, in welcher man zu der Lösung der ersten und zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie gelangt.*)

Wir können also unsere ursprüngliche Aufgabe auch so formulieren: Wir suchen drei Potentialfunktionen

$$u - U', \quad v - V', \quad w - W'$$

des Gebietes τ, welche den Bedingungen:

(124) $$u - U' = \lambda\left\{-(u-U') + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau (\mathfrak{w}-\mathfrak{W}')\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau (\mathfrak{v}-\mathfrak{V}')\frac{d\tau}{r}\right\}$$
$$+ f_1 - f_1', \cdots \text{ an } \omega$$

genügen, dann ist die Lösung des Problemes (1'):

(125) $$u = u - U' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{d\tau}{r}, \cdots.$$

*) Vgl. A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 5. (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901).

Wir haben dadurch den Vorteil gewonnen, daß die Funktionen

$$f_1 - f_1', \quad f_2 - f_2', \quad f_3 - f_3'$$

die Relation

$$(126)\quad \left\{\frac{\partial(f_3-f_3')}{\partial y} - \frac{\partial(f_2-f_2')}{\partial z}\right\}\cos(nx) + \left\{\frac{\partial(f_1-f_1')}{\partial z} - \frac{\partial(f_3-f_3')}{\partial x}\right\}\cos(ny)$$
$$+ \left\{\frac{\partial(f_2-f_2')}{\partial x} - \frac{\partial(f_1-f_1')}{\partial y}\right\}\cos(nz) = 0$$

erfüllen; es kann die Lösung eines solchen Problemes (124) auch nur zu Funktionentripeln U_x, V_x, W_x führen, welche den Bedingungen (110) genügen, und für welche

$$(127)\qquad \mathfrak{U}_x \cos(nx) + \mathfrak{V}_x \cos(ny) + \mathfrak{W}_x \cos(nz) = 0, \text{ an } \omega$$

ist.

Setzen wir für solche Funktionentripel

$$(128)\qquad \hat{u}_x = U_x - \frac{1}{4\pi}\frac{2\lambda_x}{1+\lambda_x}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{W}_x \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{dz}\int_\tau \mathfrak{V}_x \frac{d\tau}{r}\right\}, \cdots,$$

dann ist:

$$(129)\qquad \hat{u}_x = \hat{v}_x = \hat{w}_x = 0 \text{ an } \omega,$$

ferner:

$$(130)\qquad \begin{cases} \hat{\theta}_x = \Theta_x, \\ \hat{\mathfrak{u}}_x = \dfrac{1-\lambda_x}{1+\lambda_x}\mathfrak{U}_x, \cdots, \end{cases}$$

$$\Delta \hat{u}_x = \frac{2\lambda_x}{1+\lambda_x}\frac{\partial \Theta_x}{\partial x} = \frac{2\lambda_x}{1+\lambda_x}\frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial x} = \frac{2\lambda_x}{1-\lambda_x}\left\{\frac{\partial \hat{\mathfrak{w}}_x}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\mathfrak{v}}_x}{\partial z}\right\}, \cdots,$$

$$\int_\tau (\hat{\mathfrak{u}}_x^2 + \hat{\mathfrak{v}}_x^2 + \hat{\mathfrak{w}}_x^2)\, d\tau = -\frac{1-\lambda_x}{1+\lambda_x}\int_\tau \hat{\theta}_x^2\, d\tau,$$

$$\int_\tau (\mathfrak{U}_x^2 + \mathfrak{V}_x^2 + \mathfrak{W}_x^2)\, d\tau = -\frac{1-\lambda_x}{1+\lambda_x}\int_\tau \Theta_x^2\, d\tau,$$

also

$$(131)\qquad \int_\tau \{(1+\lambda_x)\Theta_x^2 + (1-\lambda_x)(\mathfrak{U}_x^2 + \mathfrak{V}_x^2 + \mathfrak{W}_x^2)\}\, d\tau = 0.$$

Hieraus folgt:

$$(132)\qquad |\lambda_x| \gtreqless 1.$$

Der Fall

$$\lambda_x = +1$$

ist leicht zu erledigen. Für $\lambda_\varkappa = +1$ würde

$$\int_\tau \Theta_\varkappa^2 \, d\tau = 0,$$

$$\Theta_\varkappa \equiv 0,$$

$$\mathfrak{U}_\varkappa = \mathfrak{V}_\varkappa = \mathfrak{W}_\varkappa \equiv 0$$

folgen; die $\lambda_\varkappa = +1$ entsprechenden Tripel müßten also von der Form sein:

$$U_\varkappa = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \cdots,$$

wo Φ eine Potentialfunktion des Gebietes wäre; es folgte dann aber auch an der Fläche ω

$$U_\varkappa = V_\varkappa = W_\varkappa \equiv 0,$$

somit

$$U_\varkappa = V_\varkappa = W_\varkappa \equiv 0$$

in dem ganzen Gebiete; der Fall

$$\lambda_\varkappa = +1$$

kann also nicht in Betracht kommen.

§ 3.

Dagegen bedarf der Fall

$$\lambda_0 = -1$$

einer ganz besonderen Behandlung. Für denselben ergibt sich aus den Gleichungen (110):

$$\int_\tau (\mathfrak{U}_0^2 + \mathfrak{V}_0^2 + \mathfrak{W}_0^2) \, d\tau = 0,$$

$$\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{V}_0 = \mathfrak{W}_0 \equiv 0, \text{ in } \tau,$$

$$\Theta_0 = \text{const. in } \tau;$$

die $\lambda_0 = -1$ entsprechenden Tripel müssen von der Form sein:

(133) $$U_0 = c \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \frac{d\tau}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \cdots,$$

wo Φ eine Potentialfunktion des Gebietes und c eine Konstante vorstellt. Alle übrigen Funktionentripel, welche den Bedingungen (110) entsprechen, erfüllen die Bedingung:

(134) $$|\lambda_\varkappa| > 1, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots).$$

Wir können nun wieder, indem wir geeignete Funktionen*) f_1^0, f_2^0, f_3^0 von f_1, f_2, f_3 abtrennen, erreichen, daß die Lösung der Aufgabe:

*) Von solcher Beschaffenheit, daß die Lösung der Aufgabe:

$$u^0 = \lambda \left\{ -u^0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \mathfrak{w}^0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \mathfrak{v}^0 \frac{d\tau}{r} \right\} + f_1^0, \cdots \text{ an } \omega$$

sofort angebbar ist.

$$(135)\quad u = \lambda\left\{-u + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\frac{d\tau}{r}\right\} + f_1 - f_1^0, \cdots \text{ an } \omega$$

nicht zu Tripeln U_0, V_0, W_0 führen kann, daß die Lösungen des Problemes (135) den Pol $\lambda = -1$ nicht besitzen.

In der Tat, erfüllen f_1, f_2, f_3 die Bedingung:

$$(136)\quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cos(nz) = 0, \text{ an } \omega,$$

auf diesen Fall können wir nach der Untersuchung des § 2 den allgemeinen Fall stets reduzieren, dann können wir stets eine mit ihren ersten Ableitungen in τ stetige Funktion φ konstruieren, mit zweiten Ableitungen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen genügt, und von solcher Art, daß

$$(137)\quad f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \text{ an } \omega;$$

ja, wir können dieser Funktion noch die Bedingung:

$$(138)\quad \Delta\Delta\varphi = 0, \text{ in } \tau$$

auferlegen. Wir kommen auf diese Aufgabe (das biharmonische Problem) noch im folgenden Abschnitte zurück; hier wollen wir aber bereits die Existenz einer solchen Funktion φ unter der Bedingung (136) beweisen. In der Tat können wir, da, wie wir gesehen haben, $\lambda = +1$ kein Pol der Lösungen des Problemes (1') ist, die Lösung für $\lambda = +1$ konstruieren, drei Potentialfunktionen des Gebietes τ

$$U, V, W,$$

mit ersten Ableitungen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen genügt, und welche die Gleichungen erfüllen:

$$(139)\quad 2U = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{W}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{V}\frac{d\tau}{r} + f_1, \cdots, \text{ an } \omega.$$

Setzt man:

$$(140)\quad \dot U = 2U - \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{W}\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{V}\frac{d\tau}{r}\right\}, \cdots,$$

so folgt:

$$(141)\quad \dot{\mathfrak{U}} = \dot{\mathfrak{V}} = \dot{\mathfrak{W}} \equiv 0, \text{ in } \tau,$$

$$(142)\quad \dot U = f_1, \quad \dot V = f_2, \quad \dot W = f_3, \text{ an } \omega.$$

Die $\dot U$, $\dot V$, $\dot W$ sind also Ableitungen einer Funktion $\varphi(x, y, z)$

$$(143)\quad \varphi(x,y,z) = \text{const.} + \int_0^{(x,y,z)} \left\{\dot U \cos(\sigma x) + \dot V \cos(\sigma y) + \dot W \cos(\sigma z)\right\} d\sigma$$

nach x, y, z, wobei das Integral rechts von irgend einem bestimmten Anfangspunkt 0 an über irgend eine stetig gekrümmte Kurve σ zu erstrecken ist, welche von 0 bis zum Punkte (x, y, z) ganz in dem Gebiete τ verläuft. Da nach (140):

$$\dot{\Theta} = \Theta$$

und

$$\Delta\Theta = 0,$$

so ergibt sich noch:

$$\Delta\Delta\varphi = 0.$$

Sei nun φ die Potentialfunktion des Gebietes τ, welche an ω die Randwerte:

$$\psi = \varphi \tag{144}$$

besitzt, und

$$c = -\frac{1}{\tau}\int\limits_\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\omega; \tag{145}$$

wir setzen

$$f_1^0 = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{c}{4\pi}\int\limits_\tau \frac{d\tau}{r} + \psi - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \frac{\partial(\varphi-\psi)}{\partial\nu}\,\frac{d\omega}{r}\right\}, \cdots, \tag{146}$$

dann behaupte ich, kann das Problem (135) nicht für seine Lösungen den Pol

$$\lambda = -1$$

haben.

In der Tat erfüllen die Potentialfunktionen u_0, v_0, w_0, welche an ω die Werte:

$$u_0 = f_1 - f_1^0, \quad v_0 = f_2 - f_2^0, \quad w_0 = f_3 - f_3^0 \tag{147}$$

haben, die Bedingung:

$$\int\limits_\omega (u_0 \cos(\nu x) + v_0 \cos(\nu y) + w_0 \cos(\nu z))\,d\omega = -\int\limits_\tau \theta_0\,d\tau = 0, \tag{148}$$

und es ist:*)

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{w}_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{v}_0 \frac{d\tau}{r}, \cdots \tag{149}$$

---

*) Denn es ist an der Oberfläche ω:

$$u_0 - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{c}{4\pi}\int\limits_\tau \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \frac{\partial(\varphi-\psi)}{\partial x}\,\frac{d\omega}{r}\right\} = \frac{\partial(\varphi-\psi)}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi-\psi)}{\partial n}\cos(nx), \cdots,$$

somit im ganzen Gebiete τ:

$$u_0 - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{c}{4\pi}\int\limits_\tau \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \frac{\partial(\varphi-\psi)}{\partial\nu}\,\frac{d\omega}{r}\right\} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau (\theta_0 - c)\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{w}_0 \frac{d\tau}{r}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{v}_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\omega \frac{\partial(\varphi-\psi)}{\partial\nu}\,\frac{d\omega}{r}, \cdots$$

woraus unmittelbar (149) folgt.

Aus den Definitionsgleichungen der Potentialfunktionen u_j, v_j, w_j $(j=1,2,\cdots)$:

$$u_j = -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \cdots \text{ an } \omega$$

ergibt sich sukzessive, unter Benutzung von (148), (149):

$$\left.\begin{aligned}&(150)\ \int_\omega (u_j\cos(\nu x) + v_j\cos(\nu y) + w_j\cos(\nu z))\,d\omega = -\int_\tau \theta_j\,d\tau = 0,\\ &(151)\ u_j = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_j\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}_j\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}_j\frac{d\tau}{r}, \cdots\end{aligned}\right\}(j=1,2,\cdots);$$

somit kann das Problem (135) auch nur zu singulären Tripeln $U_\varkappa, V_\varkappa, W_\varkappa$ führen, für welche ebenfalls:

$$(152)\quad \int_\omega (U_\varkappa\cos(\nu x) + V_\varkappa\cos(\nu y) + W_\varkappa\cos(\nu z))\,d\omega = -\int_\tau \Theta_\varkappa\,d\tau = 0,$$

$$(153)\quad U_\varkappa = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \Theta_\varkappa\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{W}_\varkappa\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{V}_\varkappa\frac{d\tau}{r}, \cdots.$$

Würde jetzt das Problem zu singulären Tripeln U_0, V_0, W_0 führen, so würde nach (133) zunächst aus

$$\int_\omega (U_0\cos(\nu x) + V_0\cos(\nu y) + W_0\cos(\nu z))\,d\omega = -\int_\tau \Theta_0\,d\tau = 0$$

das Verschwinden von c folgen, ferner aus

$$U_0 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \Theta_0\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{W}_0\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{V}_0\frac{d\tau}{r}$$

das identische Verschwinden von U_0, V_0, W_0.

Das reduzierte Problem (135) kann somit keinen Pol

$$\lambda = -1$$

für seine Lösungen haben, andererseits kann man sofort die Lösung

$$(154)\quad u^0 = \frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{c}{4\pi}\int_\tau \frac{d\tau}{r} + \psi - \frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial(\varphi-\psi)}{\partial\nu}\frac{d\omega}{r}\right\}, \cdots$$

des Problemes:

$$(155)\quad u^0 = \lambda\left(-u^0 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}^0\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}^0\frac{d\tau}{r}\right) + f_1^0, \cdots \text{ an } \omega$$

angeben; wir erkennen so, daß der besondere Fall

$$\lambda = -1$$

auch in dem allgemeinen Problem (1') keine Schwierigkeiten macht; die Lösung des allgemeinen Problemes kann für $\lambda = -1$ auch nur einen einfachen Pol haben, und wir können durch Abspaltung geeigneter Funktionen von f_1, f_2, f_3 das allgemeine Problem (1') auf ein Problem reduzieren, dessen Lösung nur Pole $\lambda_\varkappa$ mit absolut größeren Werten als eins besitzt.

Bezüglich der den Gleichungen (110) genügenden singulären Funktionentripel können wir folgendes aussagen:

Dieselben sind entweder biharmonische Funktionentripel, welche außer den Gleichungen (110) noch den Bedingungen (111), (112), (113) unterworfen werden können, mit charakteristischen Konstanten

$$|\lambda_\varkappa| > 1,$$

oder Funktionen von der Form:

$$U_\varkappa = \frac{c_\varkappa}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial z}\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial y}\frac{d\tau}{r}\right\}, \cdots, \tag{156}$$

wo die $c_\varkappa$ von Null verschiedene Konstanten, die $\psi_\varkappa$ Poincarésche Fundamentalfunktionen des Gebietes τ sind, mit charakteristischen Konstanten

$$|\lambda_\varkappa| > 1;$$

oder schließlich, es ist bei der charakteristischen Konstanten

$$\lambda_0 = -1:$$

$$U_0 = c\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \frac{d\tau}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \cdots, \tag{157}$$

wo c eine beliebige Konstante, Φ eine beliebige Potentialfunktion des Gebietes τ ist.

Durch diese allgemeine Untersuchung der singulären Funktionentripel $U_\varkappa, V_\varkappa, W_\varkappa$ sind wir nun in den Stand gesetzt, — nach bekannten Paradigmen — die allgemeinen Resultate auszusprechen, welche in dem folgenden Abschnitte kurz zusammengestellt sind.

III. Abschnitt.

Zusammenstellung der Resultate, welche sich aus den vorstehenden Untersuchungen für die Lösung des Grundproblemes der Elastizitätstheorie, für die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, des biharmonischen Problemes und der ersten Randwertaufgabe der Theorie der stationären Strömungen mit Reibung begabter Flüssigkeiten ergeben.

§ 1.

Über die Lösung des Grundproblemes der Elastizitätstheorie.

Aufgabe. Man sucht drei Potentialfunktionen u, v, w des Gebietes τ, welche die Bedingungen:

$$(158)\qquad u = \lambda\left(-u + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\frac{d\tau}{r}\right) + f_1, \cdots \text{ an } \omega$$

erfüllen.

λ ist eine gegebene Zahl, f_1, f_2, f_3 drei gegebene, mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω; die Stetigkeit der ersten Ableitungen genüge Hölderschen Bedingungen.

Man kann stets die Lösungen konstruieren, falls nicht λ einer gewissen abzählbar unendlichen Zahlenreihe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$

$$(159)\qquad \lambda_0 = -1,\quad 1 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots$$

angehört, welche nur einen Häufungspunkt im Unendlichen besitzt. Falls λ dieser Zahlenreihe nicht angehört, sind die Lösungen einzig, und die Stetigkeit der ersten Ableitungen genügt Hölderschen Bedingungen.

Ist

$$|\lambda| \lesseqgtr N,$$

wo N eine feste, von vornherein beliebig groß gewählte Zahl ist, so kann man die Lösungen in der Form darstellen:

$$(160)\qquad u = \frac{P(\lambda; x, y, z)}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)},\quad v = \frac{Q(\lambda; x, y, z)}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)},$$

$$w = \frac{R(\lambda; x, y, z)}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)},$$

wo P, Q, R für jeden der Bedingung:

$$|\lambda| \lesseqgtr N$$

genügenden Wert von λ stetige Funktionen der Stelle des Gebietes τ sind und erste Ableitungen besitzen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen

genügt, und wo $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ voneinander verschiedene Zahlen sind, welche der Bedingung

$$|\lambda_\varkappa| \leqq N, \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$$

genügen; die Zahl n ist endlich, so lange N endlich ist.

Für

$$\lambda = \lambda_\varkappa, \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

gehen die Funktionen P, Q, R in Tripel von Potentialfunktionen $U_\varkappa, V_\varkappa, W_\varkappa$ über, welche den Bedingungen:

$$(161) \quad U_\varkappa = \lambda_\varkappa \left\{ - U_\varkappa + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_\tau \mathfrak{W}_\varkappa \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_\tau \mathfrak{V}_\varkappa \frac{d\tau}{r} \right\}, \cdots \text{ an } \omega$$

genügen. Wir unterscheiden

1. Für $\lambda_0 = -1$ die Tripel:

$$(162) \qquad U_0 = c \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_\tau \frac{d\tau}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \cdots,$$

wo c eine Konstante und Φ irgend eine Potentialfunktion des Gebietes τ vorstellt, unter der Voraussetzung, daß die Stetigkeit ihrer ersten Ableitungen Hölderschen Bedingungen genügt.

2. Tripel von der Form:

$$(163) \qquad U_\varkappa = \frac{c_\varkappa}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_\tau \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_\tau \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial y} \frac{d\tau}{r} \right\}, \cdots$$

wo die $c_\varkappa$ Konstanten, die $\psi_\varkappa$ Poincarésche Fundamentalfunktionen des Gebietes τ mit charakteristischen Konstanten $\lambda_\varkappa$

$$|\lambda_\varkappa| > 1$$

sind.

3. *Biharmonische* Tripel, welche außer den Gleichungen (161) den Bedingungen:

$$(164) \qquad \mathfrak{U}_{\varkappa n} = 0, \text{ an } \omega,$$

$$(165) \qquad \int\limits_\tau \Theta_\varkappa d\tau = 0, \qquad (|\lambda_\varkappa| > 1)$$

$$(166) \qquad \int\limits_\tau \{ \Theta_\varkappa^2 + \mathfrak{U}_\varkappa^2 + \mathfrak{V}_\varkappa^2 + \mathfrak{W}_\varkappa^2 \} d\tau \neq 0$$

genügen.

Erfüllen f_1, f_2, f_3 die Gleichung:

$$(167) \quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(nz) = 0$$

— in diesem Falle kann man eine mit ihren ersten Ableitungen in τ stetige

Funktion φ mit zweiten Ableitungen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen genügt, so finden, daß

(168) $$f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \text{ —}$$

dann erfüllen auch die Funktionen P, Q, R an ω die Gleichung:

(169) $$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(nz) = 0,$$

in diesem Falle kann die Lösung des Grundproblems nicht auf singuläre Tripel der zweiten Art führen, sondern nur auf Funktionentripel U_x, V_x, W_x, für welche

(170) $$\mathfrak{U}_{xn} = 0 \text{ an } \omega.$$

Indem man von den Funktionen f_1, f_2, f_3 Funktionen von der Form:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{d\tau}{r}, \cdots$$

abspaltet, kann man bei geeigneter Wahl der Potentialfunktion Ψ das allgemeine Problem auf den soeben genannten Fall reduzieren (Reduktion auf den Fall, daß keine Wirbelfäden in der Oberfläche ω endigen).

Durch Abspaltung der Funktionen:

(171) $$\frac{\partial}{\partial x}\left\{+\frac{c}{4\pi}\int \frac{d\tau}{r} + \Phi\right\}, \cdots,$$

in denen c eine geeignete Konstante, Φ eine geeignete Potentialfunktion des Gebietes τ von f_1, f_2, f_3 ist, kann man den Pol

$$\lambda = -1$$

der Lösung ausschließen. Nach der Reduktion auf den Fall (167) kann man c und Φ leicht angeben:

(172a) $$c = +\frac{1}{\tau}\int_\omega \{f_1\cos(\nu x) + f_2\cos(\nu y) + f_3\cos(\nu z)\}\,d\omega,$$

(172b) $$\Phi = \psi - \frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r},$$

wenn ψ die Potentialfunktion des Gebietes τ mit den Randwerten

(173) $$\psi = \varphi \text{ an } \omega$$

vorstellt.

Durch diese beiden Reduktionen können wir stets das allgemeine Problem auf ein Problem:

(174a) $$u = \lambda\left\{-u + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\frac{d\tau}{r}\right\} + f_1, \cdots \text{ an } \omega$$

zurückführen, wo f_1, f_2, f_3 so beschaffen sind, daß die Potentialfunktionen u_0, v_0, w_0 mit den Randwerten:

(174b) $$u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3$$

den Gleichungen

(174c) $$\int_\tau \theta_0 \, d\tau = 0,$$

(174d) $$u_0 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}_0 \frac{d\tau}{r}, \cdots$$

genügen.

Ein solches Problem wollen wir als ein „reduziertes“ Grundproblem der Elastizitätstheorie bezeichnen.

Die Lösung eines „reduzierten Grundproblemes“ kann nur auf biharmonische Tripel führen.

Definieren wir in dem allgemeinen Falle die Potentialfunktionen

$$u_j, \; v_j, \; w_j; \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

durch die Randwerte:

$$\left.\begin{aligned} &u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3, \\ &u_j = -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \cdots, (j = 1, 2, \cdots) \end{aligned}\right\} \text{an } \omega,$$

so stellen die Reihen:

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots, \cdots$$

die Lösungen des Grundproblemes dar, solange

$$|\lambda| \lessgtr 1.$$

Die Reihen

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 + \lambda \mathfrak{u}_1 + \lambda^2 \mathfrak{u}_2 + \cdots, \cdots$$

konvergieren auch noch gleichmäßig in τ für

$$\lambda = +1 \quad \text{und} \quad \lambda = -1,$$

die Reihen:

$$u_0 \pm u_1 + u_2 \pm u_3 + \cdots, \cdots$$

und die Reihen:

$$D_1 u_0 \pm D_1 u_1 + D_1 u_2 \pm D_1 u_3 + \cdots, \cdots$$

konvergieren in τ nur dann gleichmäßig, wenn das Problem nicht den Pol

$$\lambda = -1$$

besitzt.

Dagegen konvergieren stets die Reihen

$$u_0 - (u_1 + u_0) + (u_2 + u_1) - \cdots, \cdots$$

gleichmäßig in τ und stellen Tripel von der Art (171) dar, durch deren

Abspaltung von f_1, f_2, f_3 dem Probleme (158) der Pol $\lambda = -1$ genommen werden kann. Es ergibt sich so eine Methode, die hierfür abzuspaltenden Funktionen f_1^0, f_2^0, f_3^0 zu konstruieren, ohne vorher die Reduktion auf den Fall vorzunehmen, daß keine Wirbelfäden in der Oberfläche ω endigen.

Die biharmonischen Funktionentripel erfüllen die Gleichungen:

$$(175a)\qquad \int_\tau \Theta_\iota \Theta_\varkappa \, d\tau = 0, \quad \int_\tau (\mathfrak{U}_\iota \mathfrak{U}_\varkappa + \mathfrak{V}_\iota \mathfrak{V}_\varkappa + \mathfrak{W}_\iota \mathfrak{W}_\varkappa)\, d\tau = 0, \quad \text{falls } \lambda_\iota \neq \lambda_\varkappa.$$

Schreiben wir den biharmonischen Funktionentripeln noch zur vollständigen Bestimmung die Gleichungen:

$$(175b)\qquad \int_\tau (\Theta_\varkappa^2 + \mathfrak{U}_\varkappa^2 + \mathfrak{V}_\varkappa^2 + \mathfrak{W}_\varkappa^2)\, d\tau = 1$$

vor, so gelten im Falle eines reduzierten Problemes (158) die Reihenentwicklungen nach biharmonischen Tripeln:

$$(176a)\qquad u_0 \sim \sum_1^\infty C_\varkappa U_\varkappa, \cdots,$$

$$(176b)\qquad C_\varkappa = \int_\tau (\theta_0 \Theta_\varkappa + \mathfrak{u}_0 \mathfrak{U}_\varkappa + \mathfrak{v}_0 \mathfrak{V}_\varkappa + \mathfrak{w}_0 \mathfrak{W}_\varkappa)\, d\tau, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots),$$

wobei das Zeichen $\sim$ bedeuten soll, daß wir vielleicht von den Reihen (176a) selbst nicht aussagen können, daß sie gleichmäßig in τ konvergieren und die links stehenden Funktionen darstellen, daß aber von einem endlichen j ab die Entwicklungen

$$(177)\qquad u_j = \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda^j} C_\varkappa U_\varkappa, \cdots$$

gelten.

Im Falle einer Kugel vom Radius R um den Anfangspunkt als Zentrum führen wir Polarkoordinaten r_1, θ_1, φ_1 durch die Transformationen:

$$(178)\qquad \begin{cases} x = r_1 \mu_1, \\ y = r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos \varphi_1, \quad \mu_1 = \cos \theta_1, \\ z = r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \sin \varphi_1, \end{cases}$$

ein und setzen:

$$(179)\qquad F_\varkappa(x, y, z) = r_1^\varkappa Y_j(\mu_1, \varphi_1),$$

wo Y_j eine allgemeine Kugelfunktion j^{ter} Ordnung vorstellt, dann sind die biharmonischen Funktionentripel für den Innenraum der Kugel:

$$(180)\quad \begin{cases} U_\varkappa = \alpha_\varkappa \left\{ (2\varkappa+1) x F_\varkappa - r_1^2 \dfrac{\partial F_\varkappa}{\partial x} \right\}, \\ V_\varkappa = \alpha_\varkappa \left\{ (2\varkappa+1) y F_\varkappa - r_1^2 \dfrac{\partial F_\varkappa}{\partial y} \right\}, \\ W_\varkappa = \alpha_\varkappa \left\{ (2\varkappa+1) z F_\varkappa - r_1^2 \dfrac{\partial F_\varkappa}{\partial z} \right\}, \end{cases} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots)$$

wo $\alpha_\varkappa$ eine Konstante ist, welche zur Befriedigung der Gleichung:

$$(181)\quad \int_\tau \{ \Theta_\varkappa^2 + \mathfrak{U}_\varkappa^2 + \mathfrak{V}_\varkappa^2 + \mathfrak{W}_\varkappa^2 \} \, d\tau = 1$$

zu verwenden ist.

§ 2.

Über die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie.

Aufgabe. Man sucht drei mit ihren ersten*) Ableitungen im Gebiete τ stetige Funktionen $\mathring{u}$, $\mathring{v}$, $\mathring{w}$, welche in τ den Differentialgleichungen genügen:

$$(182)\quad \left. \begin{array}{l} \Delta \mathring{u} + k \dfrac{\partial \mathring{\theta}}{\partial x} = 0, \\ \Delta \mathring{v} + k \dfrac{\partial \mathring{\theta}}{\partial y} = 0, \\ \Delta \mathring{w} + k \dfrac{\partial \mathring{\theta}}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \tau,$$

wo k eine gegebene Zahl (bei den in der theoretischen Physik in Betracht kommenden Fällen > 0) ist, und die Randwerte:

$$(183)\quad \mathring{u} = f_1, \quad \mathring{v} = f_2, \quad \mathring{w} = f_3 \quad \text{an } \omega$$

besitzen.

Vorausgesetzt wird, daß f_1, f_2, f_3 drei gegebene, mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω sind; die Stetigkeit der ersten Ableitungen genüge Hölderschen Bedingungen.

[Die Lösung soll auch auf den Fall verallgemeinert werden, daß man von f_1, f_2, f_3 lediglich weiß, daß sie selbst stetige**) Funktionen der Stelle von ω sind, während über die Ableitungen von f_1, f_2, f_3 keinerlei Voraus-

*) Wie in der Theorie der Potentialfunktionen, verlangen wir stillschweigend Stetigkeit von *allen* endlichen Ableitungen *innerhalb* τ, also in endlicher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von ω.

**) Die Verallgemeinerung auf den Fall, daß f_1, f_2, f_3 auch nur abteilungsweise stetig vorausgesetzt werden, wird nicht schwer sein, soll hier aber nicht mehr berücksichtigt werden.

setzungen gemacht werden; es ist in diesem Falle auch von den ersten Ableitungen der Lösungen $\mathring{u}$, $\mathring{v}$, $\mathring{w}$ nicht mehr zu verlangen, daß sie bis an die Oberfläche ω heran existieren und stetig sind.]

Zur Lösung dieses Problemes löse man die Aufgabe (158) und setze:

$$(184)\qquad \lambda = -\frac{k}{2+k}, \quad k = -\frac{2\lambda}{1+\lambda},$$

$$(185)\qquad \mathring{u} = (1+\lambda)\,u - \frac{\lambda}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\,\frac{d\tau}{r}\right\}, \cdots$$

dann ist — unter Ausschließung der singulären Fälle:

$$(186)\qquad \lambda = \lambda_\varkappa, \quad k = k_\varkappa = -\frac{2\lambda_\varkappa}{1+\lambda_\varkappa}, \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots) \text{ —}$$

$\mathring{u}$, $\mathring{v}$, $\mathring{w}$, die Lösung der Aufgabe (182), (183).

Im besonderen findet die Aufgabe für die in der theoretischen Physik in Betracht kommenden Fälle

$$k > 0$$

ihre vollständige Lösung; die Lösung ist einzig*).

Ist

$$(187)\qquad -2-\varepsilon > k > -2+\varepsilon,$$

wo ε eine feste, von vornherein beliebig klein gewählte Zahl ist, so kann man die Lösungen in der Form darstellen:

$$(188)\qquad \mathring{u} = \frac{\mathring{P}(k;\,x,y,z)}{(k-k_0)\,(k-k_1)\cdots(k-k_n)}, \cdots$$

wo $\mathring{P}$, $\mathring{Q}$, $\mathring{R}$ für jeden der Bedingung:

$$-2-\varepsilon > k > -2+\varepsilon$$

genügenden Wert von k stetige Funktionen der Stelle des Gebietes τ sind und erste Ableitungen besitzen, deren Stetigkeit Hölderschen Bedingungen genügt, und wo $k_0, k_1, \cdots, k_n$ voneinander verschiedene Zahlen sind, welche der Bedingung:

$$-2-\varepsilon > k_\varkappa > -2+\varepsilon, \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

genügen; die Zahl n ist endlich, solange ε von Null verschieden ist.

Für

$$k = k_\varkappa, \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$$

gehen die Funktionen $\mathring{P}$, $\mathring{Q}$, $\mathring{R}$ in Funktionentripel $\mathring{U}_\varkappa$, $\mathring{V}_\varkappa$, $\mathring{W}_\varkappa$ über, welche

*) Da aus $|\lambda_\varkappa| \overline{\gtrless} 1$, $k_\varkappa < -1$ folgt, also jedenfalls kein positives $k_\varkappa$ vorhanden ist. Die Häufungsstelle der $k_\varkappa$ ist an der Stelle (-2).

in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, den Differentialgleichungen

$$\Delta \hat{U}_\varkappa + k_\varkappa \frac{\partial \dot{\Theta}_\varkappa}{\partial x} = 0, \cdots \quad \text{in } \tau \tag{189}$$

genügen und an der Oberfläche ω verschwinden, die *Cosseratschen Funktionentripel erster Art*, welche mit den biharmonischen Funktionentripeln durch die Relationen

$$\hat{U}_\varkappa = (1 + \lambda_\varkappa) U_\varkappa - \frac{\lambda_\varkappa}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \mathfrak{W}_\varkappa \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \mathfrak{V}_\varkappa \frac{d\tau}{r} \right\}, \cdots \tag{190}$$

verbunden sind.

Die Funktionentripel, welche aus den Tripeln (162) und (163) durch die Relationen:

$$\hat{U}_\varkappa = (1 + \lambda_\varkappa) U_\varkappa - \frac{\lambda_\varkappa}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \mathfrak{W}_\varkappa \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \mathfrak{V}_\varkappa \frac{d\tau}{r} \right\}, \cdots,$$

entstehen, werden identisch Null.

Gelten für die Potentialfunktionen u_0, v_0, w_0 mit den Randwerten:

$$u_0 = f_1, \quad v_0 = f_2, \quad w_0 = f_3, \quad \text{an } \omega \tag{191}$$

im Falle eines „reduzierten Problemes“ (158) die Reihenentwicklungen:

$$u_0 = \sum_1^\infty {}_\varkappa C_\varkappa U_\varkappa, \cdots \tag{192}$$

nach biharmonischen Funktionen, sodaß:

$$u = \sum_1^\infty {}_\varkappa \frac{\lambda_\varkappa}{\lambda_\varkappa - \lambda} C_\varkappa U_\varkappa, \cdots, \tag{193}$$

dann gelten die Reihenentwicklungen:

$$\hat{u} - u_0 = \sum_1^\infty {}_\varkappa \frac{'\lambda}{\lambda_\varkappa - \lambda} C_\varkappa \hat{U}_\varkappa = \sum_1^\infty {}_\varkappa c_\varkappa \hat{U}_\varkappa, \cdots \tag{194}$$

nach Cosseratschen Funktionentripeln erster Art, wobei für diese Reihenentwicklungen die vorherige „Reduktion“ von f_1, f_2, f_3 gar nicht mehr vorausgesetzt zu werden braucht.

Schreiben wir den Cosseratschen Funktionentripeln erster Art zu ihrer vollständigen Bestimmung die Gleichung:

$$\int_\tau \{ \dot{\Theta}_\varkappa^2 + \hat{\mathfrak{U}}_\varkappa^2 + \hat{\mathfrak{V}}_\varkappa^2 + \hat{\mathfrak{W}}_\varkappa^2 \} = 1 \tag{195}$$

vor, so können wir die Koeffizienten $c_\varkappa$ der Entwicklung (194) in folgender Weise angeben:

$$c_\varkappa = \frac{k_\varkappa}{k - k_\varkappa} \int_\tau \theta_0 \dot{\Theta}_\varkappa \, d\tau. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots). \tag{196}$$

Die Cosseratschen Funktionentripel erster Art erfüllen die Gleichungen:

$$\int_\tau \dot{\Theta}_i \dot{\Theta}_\varkappa \, d\tau = \int_\tau (\dot{\mathfrak{U}}_i \dot{\mathfrak{U}}_\varkappa + \dot{\mathfrak{V}}_i \dot{\mathfrak{V}}_\varkappa + \dot{\mathfrak{W}}_i \dot{\mathfrak{W}}_\varkappa) \, d\tau = 0, \qquad (k_i \neq k_\varkappa). \tag{197}$$

Im Falle einer Kugel vom Radius R um den Anfangspunkt sind bei den Bezeichnungen (178), (179) die Cosseratschen Funktionentripel erster Art:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{U}_\varkappa &= \beta_\varkappa (r_1^2 - R^2) \frac{\partial F_\varkappa}{\partial x}, \\ \dot{V}_\varkappa &= \beta_\varkappa (r_1^2 - R^2) \frac{\partial F_\varkappa}{\partial y}, \\ \dot{W}_\varkappa &= \beta_\varkappa (r_1^2 - R^2) \frac{\partial F_\varkappa}{\partial z}, \end{aligned} \right. \tag{198}$$

$\beta_\varkappa$ eine Konstante, die zur Befriedigung der Gleichung

$$\int_\tau (\dot{\Theta}_\varkappa^2 + \dot{\mathfrak{U}}_\varkappa^2 + \dot{\mathfrak{V}}_\varkappa^2 + \dot{\mathfrak{W}}_\varkappa^2) \, d\tau = 1$$

zu verwenden ist.

[Die Verallgemeinerung der Lösung des Problemes (182), (183) auf den Fall, daß von f_1, f_2, f_3 lediglich Stetigkeit oder selbst nur abteilungsweise Stetigkeit vorausgesetzt wird, ergibt ohne jede Schwierigkeit die kleine Untersuchung in meiner Note „Sur le problème biharmonique et le problème fondamental dans la théorie de l'élasticité" Comptes Rendus, 151, S. 299, 1910.]

§ 3.

Über die Lösung des biharmonischen Problemes und die Lösung der ersten Randwertaufgabe in der Theorie der stationären Strömungen mit Reibung begabter Flüssigkeiten.

Es handelt sich hier um die Spezialfälle:

$$\lambda = +1 \quad \text{und} \quad \lambda = -1$$

des Grundproblemes (158).

Aufgabe. (*Biharmonisches Problem.*) Man sucht eine mit ihren ersten und zweiten*) Ableitungen in dem Gebiete τ stetige Funktion φ, welche in τ der Differentialgleichung:

$$\Delta\Delta\varphi = 0 \tag{199}$$

genügt, sowie den Randbedingungen:

*) Wir verlangen stillschweigend Stetigkeit von allen endlichen Ableitungen innerhalb τ, also in endlicher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von ω.

$$\left.\begin{aligned} &(200) & \varphi &= \chi, \\ &(201) & \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \chi' \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega.$$

Vorausgesetzt wird, daß χ eine gegebene mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige, χ' eine gegebene mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktion der Stelle der Fläche ω sind; die Stetigkeit der zweiten Ableitungen von χ und die Stetigkeit der ersten Ableitungen von χ' genüge Hölderschen Bedingungen.

[Die Lösung soll auch auf den Fall verallgemeinert werden, daß die Funktion χ' lediglich stetig und χ derart vorausgesetzt wird, daß eine Potentialfunktion des Gebietes τ mit den Randwerten χ existiert; es ist in diesem Falle auch von den zweiten Ableitungen der Lösung φ nicht mehr zu verlangen, daß sie bis an die Oberfläche ω heran existieren und stetig sind.]

Es ist eine kleine Vereinfachung, wenn wir von vornherein die Bedingung:

$$(202) \qquad \int_\omega \chi' d\omega = 0$$

hinzunehmen; der allgemeine Fall ist stets auf diesen Fall durch Abspaltung einer Funktion

$$\text{const.} \int_\tau \frac{d\tau}{r}$$

von φ zurückzuführen.

Wir setzen in dem allgemeinen Probleme (158):

$$(203) \qquad \lambda = +1$$

und

$$(204) \qquad \left\{\begin{aligned} f_1 &= \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) \cos(nx) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\omega \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right) \frac{d\omega}{r}, \\ f_2 &= \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) \cos(ny) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\omega \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right) \frac{d\omega}{r}, \\ f_3 &= \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) \cos(nz) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\omega \left(\chi' - \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right) \frac{d\omega}{r}, \end{aligned}\right.$$

wenn wir unter ψ die Potentialfunktion des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$(205) \qquad \psi = \chi$$

verstehen; wir haben es dann mit einem „reduzierten Problem“ (158) zu tun, und wenn wir mit u, v, w die Lösungen dieses Problemes bezeichnen und

$$(206)\qquad U = 2u - \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \mathfrak{w}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \mathfrak{v}\,\frac{d\tau}{r}\right\} = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta\,\frac{d\tau}{r},\cdots$$

setzen, so sehen wir, die Funktion:

$$(207)\qquad \Theta = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\tau \theta\,\frac{d\tau}{r}$$

erfüllt die Bedingungen:

$$(208)\qquad \Delta\Delta\Phi = 0,\ \text{ in } \tau,$$

$$(209)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi + \psi - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega\left(\chi' - \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)\frac{d\omega}{r}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\chi' - \frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\cos(nx),\cdots \text{ an } \omega;$$

es ist somit:

$$\varphi = \psi - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega\left(\chi' - \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_\tau \theta\,\frac{d\tau}{r},$$

oder

$$(210)\qquad \varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \chi'\,\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \chi\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int\limits_\tau \theta\,\frac{d\tau}{r}$$

die Lösung der gestellten Aufgabe.*)

Zur Konstruktion der Funktion θ ergibt sich die folgende Methode: Man konstruiere sukzessive die Potentialfunktionen u_j, v_j, w_j $(j=0,1,2,\cdots)$ des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$(211)\quad \begin{cases} u_0 = \left(\chi' - \dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right)\cos(nx) + \dfrac{1}{4\pi}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\limits_\omega\left(\chi' - \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)\frac{d\omega}{r},\cdots, & \text{an } \omega,\\[2ex] u_j = -u_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\limits_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\,\frac{d\tau}{r} - \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int\limits_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\,\frac{d\tau}{r},\cdots,\ (j=1,2,\cdots), & \text{an } \omega, \end{cases}$$

und setze:

$$(212)\qquad \theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \cdots.$$

Wenn die Lösung dieses Problemes die Entwicklung nach biharmonischen Tripeln:

$$(213)\qquad \theta = \sum_1^\infty C_\varkappa \Theta_\varkappa$$

zuläßt, so erhalten wir für die Lösung des biharmonischen Problemes die Entwicklung:

$$(214)\qquad \varphi = \text{const.} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \chi'\,\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \chi\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\sum_1^\infty C_\varkappa\int\limits_\tau \Theta_\varkappa\,\frac{d\tau}{r}.$$

---

*) Daß die additive Konstante Null ist, ergibt sich daraus, daß nach (209):

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\left(\Phi - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega\left(\chi' - \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)\frac{d\omega}{r}\right)\right|_a = 0,\ \text{ an } \omega.$$

[Die Verallgemeinerung der Lösung des Problems (199), (200), (201) auf den Fall, daß von χ' lediglich Stetigkeit und von χ solche Eigenschaften vorausgesetzt werden, daß nur die Existenz der Potentialfunktion ψ mit den Randwerten

$$\varphi = \chi \quad \text{an } \omega$$

gesichert ist, ergibt unmittelbar die kleine Untersuchung in meiner S. 539 genannten Note.]

Aufgabe. (*Erste Randwertaufgabe in der Theorie der stationären Strömungen mit Reibung begabter Flüssigkeiten.*) Man sucht drei mit ihren ersten Ableitungen in dem Gebiete τ stetige Funktionen u', v', w', welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen:

$$(215) \qquad \Delta u' = \Delta v' = \Delta w' = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

und an der Fläche ω die Randwerte besitzen:

$$(216) \qquad u' = f_1', \quad v' = f_2', \quad w' = f_3' \quad \text{an } \omega.$$

Vorausgesetzt wird, daß f_1, f_2, f_3 drei gegebene, mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen der Stelle der Fläche ω sind, welche der Bedingung:

$$(217) \qquad \int_\omega (f_1' \cos(\nu x) + f_2' \cos(\nu y) + f_3' \cos(\nu z))\, d\omega = 0$$

genügen; die Stetigkeit der ersten Ableitungen von f_1, f_2, f_3 genüge Hölderschen Bedingungen.

[Die Lösung soll auch auf den Fall verallgemeinert werden, daß man von f_1, f_2, f_3 lediglich weiß, daß sie selbst stetige Funktionen der Stelle von ω sind; es ist in diesem Falle auch von den ersten Ableitungen der Lösungen u', v', w' nicht mehr zu verlangen, daß sie bis an die Oberfläche ω heran existieren und stetig sind.]

Es ist eine wesentliche Vereinfachung, wenn wir von vornherein die Bedingung:

$$(218) \qquad \left(\frac{\partial f_3'}{\partial y} - \frac{\partial f_2'}{\partial z}\right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial f_1'}{\partial z} - \frac{\partial f_3'}{\partial x}\right) \cos(ny)$$
$$+ \left(\frac{\partial f_2'}{\partial x} - \frac{\partial f_1'}{\partial y}\right) \cos(nz) = 0, \quad \text{an } \omega$$

vorschreiben; der allgemeine Fall ist stets auf diesen Fall, in welchem keine Wirbelfäden in der Oberfläche ω endigen, durch Abspaltung dreier Funktionen:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\omega \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{d\tau}{r}, \cdots$$

von u', v', w' zurückzuführen, wo ψ eine geeignete Potentialfunktion des

Gebietes τ ist, welche durch die zur Lösung der ersten und zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie führenden Methoden konstruiert werden kann.

Wir setzen nun in dem allgemeinen Probleme (158):

$$\lambda = -1 \tag{219}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} f_1 = f_1' &+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \left(f_1'\cos(\nu x) + f_2'\cos(\nu y) + f_3'\cos(\nu z)\right)\frac{d\omega}{r} \\ &- \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \frac{f_2'\cos(\nu x) - f_1'\cos(\nu y)}{r}\,d\omega \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial z}\int_\omega \frac{f_1'\cos(\nu z) - f_3'\cos(\nu x)}{r}\,d\omega\right\}, \cdots; \end{aligned}\right. \tag{220}$$

wir haben es dann, wie sich dies leicht mit Hilfe der Gleichungen (217) und (218) ergibt, mit einem reduzierten Probleme (158) zu tun, und wenn wir mit u, v, w die Lösungen dieses Problemes bezeichnen und

$$U' = +\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}\,\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}\,\frac{d\tau}{r}\right\}, \cdots \tag{221}$$

setzen, so erfüllen diese Funktionen die Bedingungen:

$$\Delta\mathfrak{U}' = \Delta\mathfrak{V}' = \Delta\mathfrak{W}' = 0, \quad \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial z} = 0, \quad \text{in } \tau, \tag{222}$$

$$\left\{\begin{aligned} U' = f_1' &+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \left(f_1'\cos(\nu x) + f_2'\cos(\nu y) + f_3'\cos(\nu z)\right)\frac{d\omega}{r} \\ &- \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \left(f_2'\cos(\nu x) - f_1'\cos(\nu y)\right)\frac{d\omega}{r} \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial z}\int_\omega \left(f_1'\cos(\nu z) - f_3'\cos(\nu x)\right)\frac{d\omega}{r}\right\}, \cdots \text{ an } \omega; \end{aligned}\right. \tag{223}$$

es sind somit:

$$\begin{aligned} u' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \frac{u'_\nu}{r}\,d\omega &+ \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \frac{v'\cos(\nu x) - u'\cos(\nu y)}{r}\,d\omega \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial z}\int_\omega \frac{u'\cos(\nu z) - w'\cos(\nu x)}{r}\,d\omega\right\} + U', \cdots \end{aligned} \tag{224}$$

die Lösungen der gestellten Aufgabe.

Zur Konstruktion der Funktionen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ ergibt sich die folgende Methode:

Man konstruiere sukzessive die Potentialfunktionen

$$u_j,\ v_j,\ w_j \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$
(225)\quad \left\{\begin{aligned}
u_0 &= u' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \frac{u'_\nu}{r}\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \frac{v'\cos(\nu x) - u'\cos(\nu y)}{r}\,d\omega\right.\\
&\qquad\left. - \frac{\partial}{\partial z}\int_\omega \frac{u'\cos(\nu z) - w'\cos(\nu x)}{r}\,d\omega\right\}, \cdots\\
u_j &= -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \cdots,\quad (j=1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\}\ \text{an}\ \omega
$$

und setze:

$$
(226)\qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 - \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_3 + \cdots, \cdots.
$$

Wenn die Lösung dieses Problemes die Entwicklung nach biharmonischen Tripeln:

$$
(227)\qquad \mathfrak{u} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa}\, C_\varkappa \mathfrak{U}_\varkappa, \cdots
$$

zuläßt, so erhalten wir für die Lösung des in Frage stehenden Problemes die Entwicklungen:

$$
(228)\quad \left\{\begin{aligned}
u' &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega u'_\nu\,\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \frac{v'\cos(\nu x) - u'\cos(\nu y)}{r}\,d\omega\right.\\
&\qquad\left. - \frac{\partial}{\partial z}\int_\omega \frac{u'\cos(\nu z) - w'\cos(\nu x)}{r}\,d\omega\right\}\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa}\, C_\varkappa\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{W}_\varkappa\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{V}_\varkappa\frac{d\tau}{r}\right\}, \cdots.
\end{aligned}\right.
$$

[Die Verallgemeinerung der Lösung des Problemes (215), (216) auf den Fall, daß von f_1', f_2', f_3' außer der Bedingung:

$$
\int_\omega (f_1'\cos(\nu x) + f_2'\cos(\nu y) + f_3'\cos(\nu z))\,d\omega
$$

lediglich Stetigkeit vorausgesetzt wird, ergibt unmittelbar die kleine Untersuchung in meiner Note „Sur les mouvements stationnaires d'un liquide doué de frottement", Comptes Rendus 151, S. 50, 1910].

Über die Partitionen der ganzen Zahlen.

Von

Georg Csorba in Miskolcz (Ungarn).

Die additive Darstellung der ganzen Zahlen, d. h. die Zerlegung derselben in Summanden, ist ein nicht weniger wichtiges Kapitel der Zahlentheorie, als die multiplikative Darstellung, d. h. die Zerlegung in Faktoren. Die Frage der additiven Darstellung ist aber nur in sehr geringem Maße entwickelt, obgleich sie vermöge der analytischen Methode, welche man in der Behandlung derselben seit Euler anwendet, einen interessanten Teil der analytischen Zahlentheorie bildet. Euler hat diese Fragen mit dem Namen „Partitio numerorum" bezeichnet.*) Die Partitio numerorum hat eine wichtige Anwendung in der Invariantentheorie gefunden, wo die Cayley-Sylvestersche Arbeitsrichtung die Beschäftigung mit der Frage direkt erforderte**). Später hat man auch die Theorie der symmetrischen Funktionen mit der Anwendung der Partitionen entwickelt.***) Eine gewisse Rolle spielt endlich die Theorie der Partitionen und der damit zusammenhängenden diophantischen Gleichungen in invariantentheoretischen Arbeiten von Gordan und von Hilbert.

Sämtliche unter dem Namen „Partitio numerorum" behandelte Fragen kann man auf einen einzigen gemeinsamen Typus reduzieren, so daß es genügt, sich mit diesem einzigen zu beschäftigen. Dieser Typus ist der folgende:

Auf wie vielerlei Art kann man die Zahl A aus den Zahlen

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

durch Additionen mit Wiederholungen darstellen? Diese Frage stimmt mit der überein, wieviele *Auflösungen die unbestimmte Gleichung*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = A$$

*) Euler: „Introductio in analysin infinitorum", Caput 16.

**) Cayley: „Researches on the Partition of Numbers", Phil. Trans. 145, 1855. Sylvester: „On the Partition of Numbers", Quarterly J. M. I, 1855.

***) Mac Mahon: „Memoir on a New Theorie of Symmetric Functions", Americ. Journal of Mathem. 11, 1889.

in nicht negativen ganzen Zahlen hat? Die fragliche Zahl ist außerdem nichts anderes als der Koeffizient der Potzenz von z^A in der *Entwicklung der gebrochenen Funktion:*

$$\frac{1}{(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})\cdots(1-z^{a_n})}$$

nach zunehmenden Potenzen von z. Diese Aufgabe ist, obgleich sich mit derselben viele beschäftigten, im allgemeinen noch nicht gelöst. In der Untersuchung derselben ist am weitesten Cayley gekommen. Seine Resultate enthalten schon die Bestimmung, daß die obige Zahl der Partitionen in folgender Form darzustellen ist:

$$\varphi(A) = c_0(A) + c_1(A)A^1 + c_2(A)A^2 + \cdots + c_{n-1}(A)A^{n-1},$$

wo die Koeffizienten

$$c_i(A) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

die periodischen zahlentheoretischen Funktionen des A sind. Aber die Resultate Cayleys enthalten im wesentlichen nicht mehr als den Nachweis der *Möglichkeit* einer solchen Darstellung. Einen weiteren, erfolgreichen Schritt in der Behandlung dieser Frage finden wir nirgends in der wissenschaftlichen Fachliteratur. Einzig und allein die Untersuchungen Weihrauchs*) könnten hier erwähnt werden, die aber nur die partiellen Auflösungen einiger einfachen und speziellen Fälle enthalten.

Das Ziel der gegenwärtigen Abhandlung ist: Die Darstellung der independenten Formel im allgemeinsten Falle für die periodischen Funktionen $c(A)$ und damit die Frage der „Partitio numerorum" bedeutend zu befördern.

I.

Es sei die entwickelte Form der erzeugenden Funktion:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-z^{a_i})} = \varphi(0) + \varphi(1)z^1 + \varphi(2)z^2 + \cdots + \varphi(A)z^A + \cdots,$$

so ist die Zahl der Partitionen von A:

$$\varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-z^{a_i})}. \tag{1}$$

Bedeute λ irgendwelches gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

*) „Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei teilerfremden Koeffizienten", Zeitschrift f. Math. u. Phys. 20. „Anzahl der Lösungen für die allgemeine Gleichung ersten Grades mit vier Unbekannten", ebenda 22.

so wird

$$\frac{1-z^{\lambda}}{1-z^{a_i}} = 1 + z^{a_i} + z^{2a_i} + \cdots + z^{\left(\frac{\lambda}{a_i}-1\right)a_i},$$

und das Produkt:

$$(2)\qquad U(z) \equiv \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z^{\lambda}}{1-z^{a_i}}\right)$$

ein ganzer Ausdruck, welchen man bezeichnen kann:

$$U(z) = \sum_{M=0}^{n\lambda-1} F(M)\, z^M,$$

oder (wenn man statt M das Binom $(\nu + k\lambda)$ einführt, wo $\nu < \lambda$)

$$(3)\qquad U(z) = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\sum_{k=0}^{n-1} F(\nu + k\lambda)\, z^{\nu + k\lambda}.$$

Multiplizieren wir den Zähler des rationalen Bruches (1) mit der entwickelten Form (3) von $U(z)$, den Nenner mit der unentwickelten Form (2) desselben, so wird

$$(4)\qquad \varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\lambda-1}\sum\limits_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda)\, z^{\nu+k\lambda}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-z^{\lambda})}.$$

Damit haben wir die Aufgabe auf die Entwicklung einer solchen rationalen gebrochenen Funktion reduziert, wo die Faktoren des Nenners untereinander gleich sind, und deren Auflösung schon bekannt ist.

Nämlich

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-z^{\lambda}}\right) = \frac{1}{(1-z^{\lambda})^n} = \sum_{R=0}^{\infty}\binom{R+n-1}{n-1} z^{\lambda R}.$$

Infolgedessen

$$\varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda)\, z^{\nu+k\lambda} \sum_{R=0}^{\infty}\binom{R+n-1}{n-1} z^{\lambda R},$$

oder bei Ausführung der Multiplikation:

$$\varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \sum_{R=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda)\binom{R+n-1}{n-1} z^{\nu+\lambda(k+R)}.$$

Es sei $k + R = S$, so wird

$$\varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \sum_{S=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda)\binom{S-k+n-1}{n-1}\right] z^{\nu+\lambda S},$$

wo immer

$$S-k \geqq 0$$

ist; wenn also $S < n$ ist, so werden die Werte von k:

$$0, 1, 2, \cdots, S.$$

Es sei

$$A = \nu + \lambda S \qquad (\nu < \lambda).$$

Im Falle $A > n\lambda$ wird

$$(5) \qquad \varphi(A) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu + k\lambda) \binom{\frac{A-(\nu+k\lambda)}{\lambda}+n-1}{n-1},$$

und im Falle $A < n\lambda$ wird:

$$(6) \qquad \varphi(A) = \sum_{k=0}^{\frac{A-\nu}{\lambda}} F(\nu + k\lambda) \binom{\frac{A-(\nu+k\lambda)}{\lambda}+n-1}{n-1},$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda} \qquad (\nu < \lambda).$$

Das hier vorkommende Zeichen

$$\binom{T+n-1}{n-1}$$

bedeutet nach der Entwicklung einen solchen Ausdruck in T:

$$\binom{T+n-1}{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\{\alpha_0 T^{n-1} + \alpha_1 T^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} T^1 + \alpha_{n-1}\},$$

wo α_i im allgemeinen die symmetrische Funktion i^{ten} Grades bedeutet, welche man aus den Elementen

$$1, 2, 3, \cdots, n-1$$

komponieren kann.

Demzufolge ist:

$$\binom{\frac{A+(\nu+k\lambda)}{\lambda}+n-1}{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!} \frac{(A-(\nu+k\lambda))^m}{\lambda^m}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!} \binom{m}{s} \frac{A^{m-s}(\nu+k\lambda)^s}{\lambda^m}.$$

Wenn man das in den Ausdruck (5) substituiert, so wird

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda) \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!} \binom{m}{s} \frac{A^{m-s}(\nu+k\lambda)^s}{\lambda^m}.$$

Mit einer anderen Anordnung der Glieder:

$$\varphi(A) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!} \binom{m}{s} \frac{A^{m-s}}{\lambda^m} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda)(\nu+k\lambda)^s \right\}.$$

Es sei hier

$$(7)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}(\nu+k\lambda)^s F(\nu+k\lambda)=G_s(\lambda,\nu),$$

so wird

$$\varphi(A)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!}\binom{m}{s}G_s(\lambda;\nu)\frac{A^{m-s}}{\lambda^m},$$

oder mit einer anderen Anordnung:

$$\varphi(A)=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{m=s}^{n-1}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!}\binom{m}{s}G_s(\lambda,\nu)\frac{A^{m-s}}{\lambda^m}.$$

Führen wir nun die Substitution

$$m-s=t$$

ein, so wird:

$$\varphi(A)=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1-s}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!}\binom{t+s}{s}\frac{G_s(\lambda;\nu)}{\lambda^{t+s}}A^t.$$

Wenn wir aber die Reihenfolge der zwei Summationen vertauschen, so ist:

$$\varphi(A)=\sum_{t=0}^{n-1}\left[\sum_{s=0}^{n-1-t}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!\,\lambda^{t+s}}\binom{t+s}{s}G_s(\lambda,\nu)\right]A^t.$$

Bezeichnen wir den Klammerausdruck mit $c_t(\lambda,\nu)$, so daß

$$(8)\qquad c_t(\lambda,\nu)=\sum_{s=0}^{n-1-t}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!\,\lambda^{t+s}}\binom{t+s}{s}G_s(\lambda,\nu),$$

so ist

$$(9)\qquad \varphi(A)=\sum_{t=0}^{n-1}c_t(\lambda,\nu)A^t.$$

Diese Formel zeigt, daß die Zahl der Partitionen, d. h. der Lösungen, ein ganzer Ausdruck $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, wo die Koeffizienten von dem Reste des A in bezug auf λ abhängig sind; λ ist aber noch in hohem Maße willkürlich.

Wenn wir insbesondere für λ das kleinste gemeinsame Vielfache λ_0 der Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

eingesetzt denken, so kommt ν_0 an die Stelle des ν, wo

$$A\equiv\nu_0 \pmod{\lambda_0}\qquad\qquad(\nu_0<\lambda_0)$$

ist. In diesem Falle kann man

$$c_t(\lambda_0,\nu_0)$$

auch als Funktion des A betrachten; weil sie aber nur von dem auf den Teiler λ_0, also auf eine bestimmte Zahl bezüglichen Reste (ν_0) des A abhängt, so ist sie eine periodische Funktion des A, welche als Periode λ_0 oder einen Teiler davon hat.

Führen wir dementsprechend die Bezeichnung $c_t(A)$ für $c_t(\lambda_0, \nu_0)$ ein, so wird

$$\varphi(A) = \sum_{t=0}^{n-1} c_t(A) A^t, \tag{10}$$

wo $c_t(A)$ eine periodische Funktion ist.

Das ist die Darstellung, deren Möglichkeit auch die Forschungen Cayleys nachweisen. —

Aus der Vergleichung von (8) und (10) folgt:

$$c_t(A) = \sum_{s=0}^{n-1-t} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!\,\lambda^{t+s}} \binom{t+s}{s} G_s(\lambda;\nu),$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda} \qquad (\nu < \lambda)$$

ist.

$c_t(A)$ muß von dem willkürlichen Vielfachen λ der Zahlen

$$\alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

unabhängig sein. Da also $G_s(\lambda, \nu)$ ein ganzer Ausdruck von λ ist, so müssen in dem Ausdrucke für $c(A)$ die Koeffizienten der Potenzen

$$\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ \cdots \text{ usw.}$$

identisch verschwinden und kann auch im Koeffizient des λ^0 das von λ abhängige ν in expliziter Form nicht vorkommen.

Im Laufe der weiteren Untersuchung werden wir zeigen, daß $G_s(\lambda, \nu)$ in λ ein ganzer Ausdruck $(n-1+s)^{\text{ten}}$ Grades ist, wo die vorkommende niedrigste Potenz λ^{n-1} ist; also die Form hat:

$$G_s(\lambda;\nu) = \sum_{r=0}^{s} H_{s,n-1+r}\, \lambda^{n-1+r}.$$

Folglich ist

$$c_t(A) = \sum_{s=0}^{n-1-t} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!} \binom{t+s}{s} \sum_{r=0}^{s} H_{s,n-1+r}\, \lambda^{n-1+r-(t+s)}.$$

Da nach dem Vorhergehenden

$$n-1+r-(t+s)$$

nur den Wert Null haben kann und der größte Wert von $(t+s)$ gleich $(n-1)$ ist, kann nur die Möglichkeit

$$r = 0 \quad \text{und} \quad t+s = n-1$$

bleiben, und

$$c_t(A) = (-1)^{n-1-t}\frac{\alpha_0}{(n-1)!}\binom{n-1}{n-1-t}H_{n-1-t,\,n-1},$$

oder, — da $\alpha_0 = 1$ und

$$H_{n-1-t,\,n-1} = \text{coeff } \lambda^{n-1} \text{ in } G_{n-1-t}(\lambda, \nu)$$

ist, —

(11) $$c_t(A) = \frac{(-1)^{n-1-t}}{t!\,(n-1-t)!}\,\text{coeff } \lambda^{n-1} \text{ in } G_{n-1-t}(\lambda; \nu).$$

In anderer Form:

(12) $$c_{n-1-s}(A) = \frac{(-1)^s}{s!\,(n-1-s)!}\,\text{coeff } \lambda^{n-1} \text{ in } G_s(\lambda, \nu).$$

Die Berechnung der periodischen Koeffizienten der Funktion (10) $\varphi(A)$, welche die Zahl der Partitionen darstellt, ist also damit nach (7) auf die Entwicklung (3) des endlichen ganzen Funktionsproduktes (2):

$$U(z) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z^\lambda}{1-z^{a_i}}\right)$$

reduziert.

II.

Wenn wir die Ausrechnung von $G_s(\lambda, \nu)$ auf Grund der Definition (7):

$$G_s(\lambda, \nu) = \sum_{k=0}^{n-1}(\nu + k\lambda)^s F(\nu + k\lambda)$$

aus dem Ausdrucke (3):

$$U(z) = \sum_{\nu=1}^{\lambda-1}\sum_{k=0}^{n-1}F(\nu + k\lambda)z^{\nu+k\lambda}$$

vollenden wollen, ist offenbar nichts anderes zu tun, als auf das $U(z)$ s-mal untereinander die Polaroperation

$$z\frac{\partial U}{\partial z}$$

anzuwenden und darauf $z = \omega_r$ zu setzen, wo $\omega_r^\lambda = 1$ ist.

Dann wird nämlich

$$[\Delta^s(U)]_{z=\omega_r} = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\nu + k\lambda)^s F(\nu + k\lambda)\right]\omega_r^\nu.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß

(13) $$G_s(\lambda, \nu) = \text{coeff } \omega_r^\nu \text{ in } [\Delta^s(U)]_{z=\omega_r}$$

ist.

Da aber die binomische Gleichung $\omega_r^\lambda = 1$ λ Wurzeln hat, können wir λ solche Werte ω_r einführen, und gewinnen zur Bestimmung der Zahlen

$$G_s(\lambda, \nu) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, \lambda - 1)$$

ein lineares Gleichungssystem.

Dies ist das folgende:

$$(14)\quad \begin{aligned} G_s(\lambda, 0) + G_s(\lambda, 1)\,\omega_r^1 + \cdots + G_s(\lambda, \nu)\,\omega_r^\nu + \cdots + G_s(\lambda, \lambda - 1)\,\omega_r^{\lambda-1} \\ = [\Delta^s(U)]_{z=\omega_r} \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots, \lambda). \end{aligned}$$

Seine Lösung ist nach der Interpolationsformel von Lagrange:

$$(\mathrm{a})\qquad G_s(\lambda, \nu) = (-1)^{\lambda-1-\nu} \sum_{r=1}^{\lambda} \frac{[\Delta^s(U)]_{z=\omega_r}}{f'(\omega_r)}\, g_{\lambda-1-\nu}^{(r)},$$

wo $g_{\lambda-1-\nu}^{(r)}$ die elementare symmetrische Funktion $(\lambda - 1 - \nu)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, welche man aus den Elementen

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{r-1}, \omega_{r+1}, \cdots, \omega_\lambda$$

erzeugen kann, und

$$f(\omega) = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \cdots (\omega - \omega_\lambda)$$

ist.

Weil aber $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\lambda$ die Wurzeln der Gleichung

$$z^\lambda - 1 = 0$$

sind, so ist

$$f(\omega) = \omega^\lambda - 1,$$
$$f'(\omega) = \lambda\,\omega^{\lambda-1},$$
$$(\mathrm{b})\qquad f'(\omega_r) = \frac{\lambda}{\omega_r}\cdot$$

Wenn aber g_m die aus den Elementen

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\lambda$$

erzeugbare symmetrische Funktion m^{ten} Grades bedeutet, dann ist

$$g_m = g_m^{(r)} + \omega_r\, g_{m-1}^{(r)} \qquad (0 < m < \lambda).$$

Aber

$$g_m = 0,$$

folglich

$$g_m^{(r)} = -\,\omega_r\, g_{m-1}^{(r)}.$$

Mehrfache Anwendung derselben Überlegung ergibt:

$$g_m^{(r)} = (-1)^m\, \omega_r^m\, g_0^{(r)} = (-1)^m\, \omega_r^m.$$

Die nämliche Formel ist auch im Falle $m = 0$ gültig.

So wird

(c)
$$g_{\lambda-1-\nu}^{(r)} = (-1)^{\lambda-1-\nu}\,\omega_r^{\lambda-1-\nu} = \frac{(-1)^{\lambda-1-\nu}}{\omega_r^{\nu+1}}.$$

Wenn wir die Ausdrücke (b) und (c) in (a) substituieren, entsteht:

(15)
$$G_s(\lambda,\nu) = \frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{\lambda}\left\{\frac{[\Delta^s(U)]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}}\right\},$$

bei welcher Formel wir schon die unentwickelte Produktform (2) von $U(z)$ gebrauchen.

Substituiert man dies in den Ausdruck (12), so bekommen wir:

(16)
$$c_{n-1-s}(A) = \frac{(-1)^s}{s!\,(n-1-s)!}\ \text{coeff}\ \lambda^n\ \text{in}\ \left\{\sum_{r=1}^{\lambda}\frac{[\Delta^s(U)]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}}\right\},$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda},\quad \omega_r^{\lambda} = 1,\quad U(z) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z^{\lambda}}{1-z^{a_i}}\right) \qquad (\nu < \lambda)$$

ist.

Führen wir die vollständige Ausrechnung mit Hilfe dieser Formel erst im Falle $s = 0$ aus, so wird

$$c_{n-1}(A) = \frac{1}{(n-1)!}\ \text{coeff}\ \lambda^n\ \text{in}\ \left\{\sum_{r=1}^{\lambda}\frac{[U]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}}\right\}.$$

Bei der Substitution

$$[U]_{z=\omega_r}$$

hat ein Faktor des Produkts U:

$$u_i = \frac{1-z^{\lambda}}{1-z^{a_i}}$$

den Wert Null für sämtliche λ^{ten} Einheitswurzeln ω_r, welche nicht zugleich auch a_i^{te} Einheitswurzeln sind. Nur für solche λ^{te} Einheitswurzeln kann der Wert des u_i von Null verschieden sein, welche zugleich a_i^{te} Einheitswurzeln sind $\left(\omega_r^{a_i} = 1\right)$, und dann hat er den Wert

$$[u_i] = \frac{\lambda}{a_i},$$

wie auch aus dem Ausdrucke

$$u_i = 1 + z^{a_i} + z^{2a_i} + \cdots + z^{\left(\frac{\lambda}{a_i}-1\right)a_i}$$

folgt.

Das ganze Produkt

$$U = u_1 u_2 \cdots u_n$$

kann also nur für solche λ^{te} Einheitswurzeln von Null verschieden sein, welche jeder der binomischen Gleichungen

$$\begin{aligned} z^{a_1} - 1 &= 0, \\ z^{a_2} - 1 &= 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \ \cdot\ \cdot \\ z^{a_n} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

entsprechen.

Die gemeinsamen Wurzeln dieses Gleichungssystems liefert — wenn d der größte gemeinsame Teiler der Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

ist —, die Gleichung:

$$z^d - 1 = 0.$$

Wir können aber immer voraussetzen, daß $d = 1$ ist. Wäre es nicht der Fall, kann man die Aufgabe leicht auf eine solche transformieren.

Das Produkt $U = u_1 u_2 \cdots u_n$ kann also nur im Falle $\omega_r = 1$ von Null verschieden sein und hat dann den Wert:

$$[U]_{z=1} = \frac{\lambda^n}{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Infolge dessen ist

(17) $$c_{n-1}(A) = \frac{1}{(n-1)!\, a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Es ist nun daraus ersichtlich, daß der Koeffizient der höchsten Potenz A^{n-1} im Ausdrucke von $\varphi(A)$ eine von A unabhängige Größe sei, man könnte sagen: eine periodische Funktion mit der Periode eins.

Zur exakten Berechnung anderer Koeffizienten ist die ausführlichere Untersuchung der höheren Polaren des Produkts

$$U = u_1 u_2 \cdots u_n$$

und seiner Werte für die λ^{ten} Einheitswurzeln nötig.

III.

Aus der allgemeinen, auf die Polaren des Produkts bezüglichen Regel, deren Beweis mit dem des polynomischen Lehrsatzes analog ist, folgt:

$$\Delta^k(u_1 u_2 \cdots u_n) =$$
$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \left\{ \frac{k!}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!} \Delta^{k_1}(u_1)\, \Delta^{k_2}(u_2) \cdots \Delta^{k_n}(u_n) \right\}.$$

Unter den Lösungen der unbestimmten Gleichung

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$$

sind solche zu finden, in welchen nur m Glieder von Null verschieden, z. B.:

$$k_{i_1},\ k_{i_2},\ \cdots,\ k_{i_m}, \qquad (m = 1, 2, \cdots, k)$$

die übrigen aber gleich Null sind, z. B.:

$$k_{r_1} = k_{r_2} = \cdots = k_{r_{n-m}} = 0.$$

Hier bedeutet

$$i_1, i_2, \cdots, i_m$$

irgendwelche Kombination ohne Wiederholungen der Elemente

$$1, 2, 3, \cdots, n,$$

und

$$i_1, i_2, \cdots, i_m, \quad r_1, r_2, \cdots, r_{n-m}$$

eine Permutation derselben Elemente.

Demnach kann man den Ausdruck $\Delta^k(u_1 u_2 \cdots u_n)$ folgenderweise ordnen:

$$\Delta^k(u_1 u_2 \cdots u_n) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \tag{18}$$
$$\left\{ \frac{k!}{k_{i_1}! \, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!} \Delta^{k_{i_1}}(u_{i_1}) \Delta^{k_{i_2}}(u_{i_2}) \cdots \Delta^{k_{i_m}}(u_{i_m}) u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}} \right\}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Umformung wird nach (15):

$$\lambda G_k(\lambda, \nu) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!}{k_{i_1}! \, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!} \tag{19}$$
$$\left\{ \sum_{r=1}^{\lambda} \frac{\left[\Delta^{k_{i_1}}(u_{i_1}) \Delta^{k_{i_2}}(u_{i_2}) \cdots \Delta^{k_{i_m}}(u_{i_m}) u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}}\right]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}} \right\},$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda} \qquad (\nu < \lambda),$$
$$\omega_r^{\lambda} = 1$$

ist.

Da im allgemeinen u_s nur für a_s^{te} Einheitswurzeln von Null verschieden sein kann, verschwindet das Produkt:

$$u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}}$$

nur für solche λ^{te} Einheitswurzeln nicht, welche jeder der binomischen Gleichungen:

$$z^{r_1} - 1 = 0,$$
$$z^{r_2} - 1 = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$z^{r_{n-m}} - 1 = 0$$

genügen.

Die gemeinsamen Wurzeln dieser Gleichungen enthält die Gleichung:

$$z^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} - 1 = 0,$$

wenn

$$d_{i_1 i_2 \cdots i_m}$$

den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen

$$a_{r_1},\ a_{r_2},\ \cdots,\ a_{r_{n-m}},$$

d. h. der Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,$$

mit Ausnahme von

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_m}$$

bedeutet.

Das Produkt

$$u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}}$$

kann also nur für solche λ^{te} Einheitswurzeln von Null verschieden sein, welche zugleich $d_{i_1 i_2 \ldots i_m}{}^{\text{te}}$ Einheitswurzeln sind. Da aber $d_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ ein Teiler von λ ist, d. h. unter den λ^{ten} Einheitswurzeln sämtliche $d_{i_1 i_2 \cdots i_m}{}^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln enthalten sind, muß man das Produkt

$$u_1 u_2 \cdots u_{r_{n-m}},$$

und so in dem Ausdrucke von $\lambda G_k(\lambda, \nu)$ das ganze Glied

$$\left\{ \frac{\left[\Delta^{k_{i_1}}(u_{i_1}) \Delta^{k_{i_2}}(u_{i_2}) \cdots \Delta^{k_{i_m}}(u_{i_m}) u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}}\right]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}} \right\}$$

nur für die sämtlichen $d_{i_1 i_2 \cdots i_m}{}^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln summieren.

Für solche ist:

$$\left[u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}}\right]_{z=\omega_r} = \frac{\lambda^{n-m}}{a_{r_1} a_{r_2} \cdots a_{r_{n-m}}} = \frac{\lambda^{n-m} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m}}{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

folglich:

$$\begin{aligned} \lambda G_k(\lambda, \nu) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!\, a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} \lambda^{n-m}}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!\, a_1 a_2 \cdots a_n} \\ \left\{ \sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \frac{\left[\Delta^{k_{i_1}}(u_{i_1}) \Delta^{k_{i_2}}(u_{i_2}) \cdots \Delta^{k_{i_m}}(u_{i_m})\right]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}} \right\}, \end{aligned} \tag{20}$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda} \qquad (\nu < \lambda),$$

$$\omega_r^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} = 1.$$

Die nächste Aufgabe ist jetzt die Berechnung der Faktoren

$$\left[\Delta^{k_{i_s}}(u_{i_s})\right]_{z=\omega_r}.$$

Da

$$u_{i_s} = \sum_{\varrho=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_s}}-1} z^{\varrho a_{i_s}}$$

ist, kommt

$$\Delta^{k_{i_s}}(u_{i_s}) = \sum_{\varrho=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_s}}-1} a_{i_s}^{k_{i_s}} \varrho^{k_{i_s}} z^{\varrho a_{i_s}}.$$

Setzen wir $z = \omega_r$, so ist

$$\omega_r^{\varrho a_{i_s}} = \omega_r^{\varrho' a_{i_s}},$$

im Falle, daß

$$\varrho a_{i_s} \equiv \varrho' a_{i_s} \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}};$$

oder — weil der größte gemeinsame Teiler von a_{i_s} und von $d_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ nach der eingeführten Bezeichnung

$$d_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}$$

ist — im Falle, daß

$$\varrho - \varrho' = \frac{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{d_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}.$$

Führen wir durchgängig die Bezeichnung

$$\frac{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{d_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}} = t_s$$

ein, so wird für

$$\xi_s < t_s,$$

$$\omega_r^{\xi_s a_{i_s}} = \omega_r^{(\xi_s + t_s) a_{i_s}} = \cdots = \omega_r^{\left(\xi_s + \frac{\lambda}{a_{i_s}} - t_s\right) a_{i_s}},$$

und mit der Substitution

$$\varrho = \xi_s + u t_s:$$

$$\left[\Delta^{k_{i_s}}(u_{i_s})\right]_{z=\omega_r} = a_{i_s}^{k_{i_s}} \sum_{\xi_s=0}^{t_s-1} \sum_{u=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_s} t_s}-1} (\xi_s + u t_s)^{k_{i_s}} \omega_r^{a_{i_s} \xi_s}$$

$$= a_{i_s}^{k_{i_s}} \sum_{\xi_s=0}^{t_s-1} \sum_{u=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_s} t_s}-1} \sum_{v=0}^{k_{i_s}} \binom{k_{i_s}}{v} \xi_s^{k_{i_s}-v} u^v t_s^v \omega_r^{a_{i_s} \xi_s}$$

$$= a_{i_s}^{k_{i_s}} \sum_{\xi_s=0}^{t_s-1} \sum_{v=0}^{k_{i_s}} \left\{ \sum_{u=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_s} t_s}-1} u^v \right\} \binom{k_{i_s}}{v} t_s^v \xi_s^{k_{i_s}-v} \omega_r^{a_{i_s} \xi_s},$$

wo

$$\omega_r^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} = 1$$

ist.

Hier kann man die Summe

$$\left\{\sum_{u=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_s} t_s}-1} u^v\right\}$$

mit Anwendung der Bernoullischen Reihenentwicklungen in dieser Form darstellen:

$$\left\{\sum_{v=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_s} t_s}-1} u^v\right\} = \frac{\lambda}{a_{i_s} t_s} \sum_{h=0}^{v} A_{v,h} \frac{\lambda^h}{a_{i_s}^h t_s^h},$$

wo, im Falle $v=0$,

$$A_{00} = 1$$

ist, und im Falle $v>0$,

$$A_{v,v} = \frac{1}{v+1},$$

$$A_{v,v-1} = -\frac{1}{2},$$

$$A_{v,v-2} = \frac{1}{2}\binom{v}{1} B_1,$$

$$A_{v,v-3} = 0,$$

$$A_{v,v-4} = -\frac{1}{4}\binom{v}{3} B_3,$$

$$A_{v,v-5} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{v,v-2k} = (-1)^{k-1}\frac{1}{2k}\binom{v}{2k-1} B_{2k-1} \qquad (k>0),$$

$$A_{v,v-(2k+1)} = 0 \qquad (k>0,$$

und $B_1, B_3, B_5, \cdots$ die Bernoullischen Zahlen sind; z. B. wenn $v=2s$, $(s>0)$, wird $A_{2s,0} = (-1)^{s-1} B_{2s-1}$, wenn $v = 2s+1$, $(s>0)$, wird $A_{2s+1,0} = 0$.

Mit Substituierung des obigen Ausdruckes sind

$$[\Delta^{k_{i_s}}(u_{i_s})]_{s=\omega_r} = \frac{\lambda a_{i_s}^{k_{i_s}}}{a_{i_s} t_s} \sum_{\xi_s=0}^{t_s-1} \sum_{v=0}^{k_{i_s}} \sum_{h=0}^{v} A_{v,h} \lambda^h \frac{t_s^{v-h}}{a_{i_s}^h} \binom{k_{i_s}}{v} \xi_s^{k_{i_s}-v} \omega_{r.}^{a_{i_s}\xi_s},$$

und infolgedessen:

$$(21) \quad \lambda G_k(\lambda, v) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \cdot \frac{k!\, a_{i_1}^{k_{i_1}} a_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots a_{i_m}^{k_{i_m}} \lambda^n}{k_{i_1}! k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!\, a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$\sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \left\{ \frac{\prod_{s=1}^{m} \left[\frac{1}{t_s} \sum_{\xi_s=0}^{t_s-1} \sum_{v=0}^{k_{i_s}} \sum_{h=0}^{v} A_{vh} \frac{\lambda^h t_s^{v-h}}{a_{i_s}^h} \binom{k_{i_s}}{v} \xi_s^{k_{i_s}-v} \omega_r^{a_{i_s}\xi_s} \right]}{\omega_r^v} \right\}.$$

Da hier in dem Produkte:

$$\prod_{s=1}^{m} [\cdot\cdot]$$

die niedrigste Potenz von λ λ^0, die höchste Potenz aber $\lambda^{k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_m}} = \lambda^k$ ist, und die nachstehenden Summationen einen das λ enthaltenden Faktor nicht liefern, folgt, daß

$$\lambda\, G_k(\lambda, \nu)$$

in λ ein Ausdruck $(n+k)^{\text{ten}}$ Grades sein wird, wo die niedrigste vorkommende Potenz λ^n ist.

$$G_k(\lambda, \nu)$$

selbst wird hiernach in λ ein Ausdruck $(n-1+k)^{\text{ten}}$ Grades, wo die niedrigste vorkommende Potenz λ^{n-1} ist. Das ist die Eigenschaft, auf welche wir uns im vorhergehenden berufen haben.

In Anbetracht dessen, daß nach (12)

$$c_{n-1-k}(A) = \frac{(-1)^k}{k!\,(n-1-k)!} \text{ coeff } \lambda^n \text{ in } \lambda\, G_k(\lambda, \nu),$$

bekommen wir:

(22)
$$c_{n-1-k}(A)$$
$$= \frac{(-1)^k}{k!\,(n-1-k)!} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!\, a_{i_1}^{k_{i_1}} a_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots a_{i_m}^{k_{i_m}}}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!\, a_1 a_2 \cdots a_n}$$
$$\sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \left\{ \frac{\prod_{s=1}^{m} \left[\frac{1}{t_s} \sum_{\xi_s=0}^{t_s-1} \sum_{v=0}^{k_{i_s}} A_{v0} \binom{k_{i_s}}{v} t_s^v\, \xi_s^{k_{i_s}-v}\, \omega_r^{a_{i_s} \xi_s} \right]}{\omega_r^{\nu}} \right\}.$$

Führen wir nun statt der durchgängig benutzten

$$t_s \quad \text{und} \quad \xi_s$$

die endgültigen Bezeichnungen

$$t^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \quad \text{und} \quad \xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots, i_m}$$

ein und bezeichnen den hier vorkommenden ganzen Ausdruck von $\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ folgendermaßen:

$$f_{k_{i_s}}\left(\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) = \sum_{v=0}^{k_{i_s}} A_{v0} \binom{k_{i_s}}{v} \left(t^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right)^v \left(\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right)^{k_{i_s}-v},$$

so entsteht:

(23)
$$
\begin{aligned}
&c_{n-1-k}(A)\\
&= \frac{(-1)^k}{k!(n-1-k)!}\sum_{m=1}^{k}\ \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1\\ i_1<i_2<\cdots<i_m}}^{n}\ \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1\\ k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_m}=k}}^{k} \frac{k!\, a_{i_1}^{k_{i_1}} a_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots a_{i_m}^{k_{i_m}}}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!\, a_1 a_2 \cdots a_n \prod\limits_{s=1}^{m} t^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}\\
&\qquad \sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \left\{\frac{\prod\limits_{s=1}^{m}\left\{\sum\limits_{\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}=0}^{t^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}-1} f_{k_{i_s}}\left(\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \omega_r^{a_{i_s}\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}\right\}}{\omega_r^{\nu}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Es bleibt noch die Summation nach r auszuführen.

Die Glieder des im Ausdrucke vorkommenden Produkts

$$
P \equiv \prod_{s=1}^{m}\left\{\sum_{\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}=0}^{t^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}-1} f_{k_{i_s}}\left(\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \omega_r^{a_{i_s}\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}\right\}
$$

kann man nach der Entwicklung so anordnen:

$$
P \equiv \sum_{\cdots \xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \cdots} \prod_{s=1}^{m} f_{k_{i_s}}\left(\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \omega_r^{\sum\limits_{s=1}^{m} a_{i_s}\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}},
$$

wo

$$
0 \leqq \xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} < t^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}
$$

ist.

Damit wird:

(24)
$$
\begin{aligned}
&c_{n-1-k}(A)\\
&= \frac{(-1)^k}{k!\,(n-1-k)!}\sum_{m=1}^{k}\ \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1\\ i_1<i_2<\cdots<i_m}}^{n}\ \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1\\ k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_m}=k}}^{k} \frac{k!}{a_1 a_2 \cdots a_n} \prod_{s=1}^{m} \frac{a_{i_s}^{k_{i_s}}}{k_{i_s}!\, t^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}\\
&\qquad \sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \left\{\sum_{\cdots \xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \cdots} \prod_{s=1}^{m} f_{k_{i_s}}\left(\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \omega_r^{\sum\limits_{s=1}^{m} a_{i_s}\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}-\nu}\right\}.
\end{aligned}
$$

Hier kann die Summe

$$
\sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \omega_r^{\sum\limits_{s=1}^{m} a_{i_s}\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}-\nu}
$$

nur für solche Werte von $\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ von Null verschieden sein (und den Wert $d_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ haben), welche auch der unbestimmten Kongruenz

$$\sum_{\varepsilon=0}^{m} a_{i_\varepsilon} \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} - \nu \equiv 0 \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}$$

entsprechen.

Demzufolge ist

(25)
$$c_{n-1-k}(A)$$
$$= \frac{(-1)^k}{k!\,(n-1-k)!} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!}{a_1 a_2 \cdots a_n} \prod_{\varepsilon=1}^{m} \frac{a_{i_\varepsilon}^{k_{i_\varepsilon}} d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{k_{i_\varepsilon}!\, t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}$$
$$\sum_{\cdots \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \cdots} \prod_{\varepsilon=1}^{m} f_{k_{i_\varepsilon}}(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}),$$

wo die auf die Werte

$$\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \qquad (\varepsilon = 1, 2, \cdots, m)$$

bezügliche Summation auf sämtliche Auflösungen der unbestimmten Kongruenz

$$\sum_{\varepsilon=1}^{m} a_{i_\varepsilon} \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \equiv \nu \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}$$

sich erstreckt, welche den Bedingungen

$$0 \leqq \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} < t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \qquad (\varepsilon = 1, 2, \cdots, m)$$

entsprechen.

Da

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda}$$

und

$$\lambda \equiv 0 \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}},$$

wird

$$A \equiv \nu \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}},$$

und demzufolge kann man in der obigen Kongruenz statt ν das A schreiben und

$$c_{n-1-k}(A)$$

als eine periodische Funktion von A betrachten.

Die Endresultate unserer Betrachtungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

Wenn $d_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ *den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen* a *mit Ausnahme von*

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m},$$

und $d^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} = d_{i_1 i_2 \cdots i_{\varepsilon-1} i_{\varepsilon+1} \cdots i_m}$ *den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen* a *mit Ausnahme von*

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{\varepsilon-1}}, a_{i_{\varepsilon+1}}, \cdots, a_{i_m}$$

bedeutet, ist in der Funktion

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1-k}(A)\, A^{n-1-k},$$

die die Zahl der auf die Elemente

$$a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n$$

bezüglichen Partitionen von A ausdrückt, die allgemeine Formel für die periodischen Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\underset{k>0}{c_{n-1-k}}(A) &= \frac{(-1)^k}{(n-1-k)!\, a_1 a_2 \cdots a_n} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \frac{\prod\limits_{s=1}^{m} d^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{d^{m-1}_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \\
&\qquad \sum_{\cdots \xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \cdots} \; \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \prod_{s=1}^{m} \frac{a_{i_s}^{k_{i_s}}}{k_{i_s}!} f_{k_{i_s}}\left(\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

Darin umfaßt die über die Werte

$$\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \qquad (s = 1, 2, \cdots, m)$$

erstreckte Summation sämtliche Lösungen der unbestimmten Kongruenz

$$\sum_{s=1}^{n} a_{i_s} \xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \equiv A \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}$$

$$\left(0 \leqq \xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} < \frac{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{d^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}\right),$$

$$\left(\text{deren Zahl } \frac{d^{m-1}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{\sum\limits_{s=1}^{m} d^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \text{ ist}\right).$$

Ferner ist

$$f_{k_{i_s}}\left(\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots m}\right) = \sum_{v=0}^{k_{i_s}} A_{v0} \binom{k_{i_s}}{v} \left(\frac{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{d^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}\right)^{v} \left(\xi_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right)^{k_{i_s} - v},$$

endlich

$$\begin{aligned}
A_{00} &= 1, \\
A_{10} &= -\frac{1}{2}, \\
A_{2k,0} &= (-1)^{k-1} B_{2k-1}, && (k > 0), \\
A_{2k+1,0} &= 0, && (k > 0),
\end{aligned}$$

wo B_{2k-1} eine Bernoullische Zahl bedeutet.

IV.

Wir haben für die periodischen Funktionen $c(A)$ die gesuchte independente Formel hergestellt. Aus dem gefundenen Ausdrucke kann man den allgemeinen Typus jener elementaren periodischen Funktionen klar festsetzen, auf welche die Frage der Bestimmung der Zahl der Partitionen reduzierbar ist. Dieser ist der folgende:

$$\sum_{\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m} f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) \cdots f_m(\xi_m),$$

wo

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_m \xi_m \equiv A \pmod{d},$$

$$\left(0 \leqq \xi_i < \frac{d}{d_i}\right), \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

d_i der größte gemeinsame Teiler von a_i und d ist, weiterhin $f_1, f_2, \cdots, f_m$ ganze Ausdrücke sind.

Der letzte Typus aber, auf welchen wir im Laufe unserer Untersuchung kommen können, ist der folgende:

$$\sum_{\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \cdots \xi_m^{r_m},$$

wo

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_m \xi_m \equiv A \pmod{d},$$

und

$$\left(0 \leqq \xi_i < \frac{d}{d_i}\right), \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Diese, in Bezug auf A periodische Summenfunktion ist im allgemeinen nicht in einfacher Form ausdrückbar. Eine ausführliche Analyse der Eigenschaften dieser Funktion hat die Aufgabe weiterer Untersuchungen zu sein.

Wir wollen hier die allgemeine Formel nur noch auf einige einfachere und spezielle Fälle anwenden.

Ist $k = 0$, so ist

$$c_{n-1}(A) = \frac{1}{(n-1)!\, a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Ist $k = 1$, so bekommen wir mit der Substitution $i_1 = 1$ aus (26):

$$c_{n-2}(A) = \frac{-1}{(n-2)!\, a_1 a_2 \cdots a_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\xi_i - \frac{1}{2} d_i\right) \right\},$$

wo

$$a_i \xi_i \equiv A \pmod{d_i} \qquad (0 \leqq \xi_i < d_i)$$

ist.

So geht es weiter in den Fällen $k = 2, 3, 4, \cdots$.

Wenn jetzt $n = 2$ ist, wird die vollständige Formel ($d_1 = a_2$, $d_2 = a_1$):

$$\varphi(A) = \frac{A^1}{a_1 a_2} - \frac{A^0}{a_1 a_2} \{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 - a_1 a_2\},$$

wo

$$a_1\xi_{\xi_1} \equiv A \pmod{a_2}, \qquad (0 \leqq \xi_1 < a_2)$$
$$a_2\xi_{\xi_2} \equiv A \pmod{a_1} \qquad (0 \leqq \xi_2 < a_1)$$

ist.

Die Funktionen $c(A)$ nehmen eine einfache und interessante Form in dem speziellen Falle an, wenn jedes Elementenpaar $a_i a_k$ relativ prim, z. B. wenn jedes Element a_i eine Primzahl ist.

Dann ist

$$d_i = d_{ik} = \cdots = d_{i_1 i_2 \cdots i_{n-2}} = 1,$$
$$d_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}} = a_{i_n}.$$

Wenn wir nun noch statt A_{k0} kurz A_k schreiben, und weil

$$\xi_{i_1 i_2 \cdots i_m} = 0 \qquad (m < n-1),$$
$$f_{k_{i_s}}\left(\xi^{(s)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) = A_{k_{i_s}} \qquad (m < n-1),$$

so gestaltet sich die Formel:

$$c_{n-1-k}(A) = \frac{(-1)^k}{(n-1-k)!\, a_1 a_2 \cdots a_n} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k},$$

$$\frac{a_{i_1}^{k_{i_1}} a_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots a_{i_m}^{k_{i_m}}}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!} A_{k_{i_1}} A_{k_{i_2}} \cdots A_{k_{i_m}}.$$

Das können wir auch so schreiben:

$$c_{n-1-k}(A) = \frac{(-1)^k}{(n-1-k)!\, a_1 a_2 \cdots a_n} \sum_{k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k} \frac{A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_n}}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}.$$

Diese außerordentlich einfache Formel ist auch in dem Falle $k = 0$ anwendbar, da sie dann den bekannten Wert:

$$c_{n-1}(A) = \frac{1}{(n-1)!\, a_1 a_2 \cdots a_n}$$

liefert.

In diesem speziellen Falle sind also

$$c_1(A),\ c_2(A),\ \cdots,\ c_{n-1}(A)$$

nicht periodisch, sondern konstant. $c_0(A)$ ist aber auch hier periodisch.

Noch einfacher ist das Resultat in dem speziellen Falle, wenn

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1.$$

Dann ist

$$\underset{0 \leqq k < n}{c_{n-1-k}(A)} = \frac{(-1)^k}{(n-1-k)!} \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k \\ 0 \leqq k_i \leqq k}} \frac{A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_n}}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!}.$$

Andererseits ist in diesem Falle:

$$\varphi(A) = \binom{A+n-1}{n-1}$$

und

$$c_{n-1-k}(A) = \frac{1}{(n-1)!}\,\alpha_k,$$

wo α_k die aus den Elementen $1, 2, \cdots, n-1$ erzeugte symmetrische Funktion k^{ten} Grades bedeutet.

Aus dem Vergleiche der beiden Erzeugungen folgt:

$$\alpha_k = (-1)^k \binom{n-1}{k} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!} A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_n}.$$

Weil

$$A_0 = 1,$$

$$A_1 = -\frac{1}{2},$$

$$A_{2k} = (-1)^{k-1} B_{2k-1} \qquad (k>0),$$

$$A_{2k+1} = 0 \qquad (k>0),$$

ist das Obige nichts anderes als der Ausdruck der elementar-symmetrischen Funktion α_k durch Bernoullische Zahlen.

Wegen Anwendungen in der Invariantentheorie und in der Theorie der symmetrischen Funktionen ist ein wichtiger spezieller Fall das folgende *Euler-Cayleysche Beispiel:*

Sei

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \cdots,\ a_r = r,\ a_{r+1} = 1,\ a_{r+2} = 2,\ \cdots,\ a_n = n-r,$$

so wird

$$c_{n-1}(A) = \frac{1}{(n-1)!\,r!\,(n-r)!} \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \binom{n}{1} \binom{n}{r}.$$

Da im Falle $n \geqq 3$ der größte gemeinsame Teiler aller Kombinationsgruppen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Elemente

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-r$$

gleich 1 ist, wird

$$d_i = 1, \quad \xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

und

$$c_{n-2}(A) = \frac{1}{2!\,(n-2)!\,r!\,(n-r)!} \left\{\frac{r(r+1)}{2} + \frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{(n!)^2} \binom{n}{2} \binom{n}{r} \left\{\frac{r(r+1)}{2} + \frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right\} \qquad (n \geqq 3).$$

Da im Falle $n \geqq 5$ der größte gemeinsame Teiler aller Kombinationsgruppen $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades der Elemente

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-r$$

gleich 1 ist, wird

$$d_{ik}=1,\quad \xi_{ik}=0 \qquad (i,k=1,2,\cdots,n)$$

und

$$\begin{aligned}
c_{n-3}(A) &= \\
&= \frac{1}{(n-3)!\,r!\,(n-r)!}\left\{\frac{1}{12}(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2)\right. \\
&\qquad \left. +\frac{1}{4}\sum_{\substack{i<k \\ i,k=1,2,3,\cdots,r,1,2,\cdots,n-r}} ik\right\} \\
&= \frac{1}{(n-3)!\,r!\,(n-r)!}\left\{\frac{1}{12}(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2)\right. \\
&\qquad +\frac{1}{8}[(1+2+\cdots+r+1+2+\cdots+(n-r))^2 \\
&\qquad \left. -(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2)]\right\} \\
&= \frac{1}{(n!)^2}\binom{n}{3}\binom{n}{r}\left\{\frac{3}{4}(1+2+\cdots+r+1+2+\cdots+(n-r))^2\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{4}(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2)\right\}.
\end{aligned}$$

Wenn wir in Betracht ziehen, daß

$$1+2+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\cdots+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

wird

$$\begin{aligned}
c_{n-3}(A) = \frac{1}{(n!)^2}\binom{n}{3}\binom{n}{r}&\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{r(r+1)}{2}+\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right]^2\right. \\
&\left.-\frac{1}{4}\left[\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}+\frac{(n-r)(n-r+1)(2n-2r+1)}{6}\right]\right\} \\
&(n\geqq 5).
\end{aligned}$$

Gleichfalls in invariantentheoretischen Anwendungen pflegt der folgende Fall vorzukommen:

$$a_1=2,\ a_2=3,\ \cdots,\ a_{r-1}=r,\ a_r=1,\ a_{r+1}=2,\ \cdots,\ a_n=n-(r-1).$$

Wenden wir die Substitution

$$n=m-1$$

an, so wird

$$c_{m-2}(A)=\frac{1}{(m-2)!\,r!\,(m-r)!},$$

$$c_{m-3}(A)=\frac{1}{2!\,(m-3)!\,r!\,(m-r)!}\left\{\frac{r(r+1)}{2}-1+\frac{(m-r)(m-r+1)}{2}\right\}$$

$$(m>4),$$

$$\begin{aligned}
c_{m-4}(A)=\frac{1}{(m-4)!\,r!\,(m-r)!}&\left\{\frac{1}{8}\left[\frac{r(r+1)}{2}-1+\frac{(m-r)(m-r+1)}{2}\right]^2\right. \\
&\left.-\frac{1}{24}\left[\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}-1+\frac{(m-r)(m-r+1)(2m-2r+1)}{6}\right]\right\} \\
&(m>6),
\end{aligned}$$

usw., und die Zahl der Auflösungen der Gleichung:

$$2x_1 + 3x_2 + \cdots + rx_{r-1} + 1x_r + 2x_{r+1} + \cdots + (m-r)x_{m-1} = A$$

ist

$$\varphi(A) = c_{m-2}(A)A^{m-2} + c_{m-3}(A)A^{m-3} + c_{m-4}(A)A^{m-4} + \cdots + c_0(A).$$

Wenn wir ganz numerische Beispiele nehmen, bleibt in den Formeln in letzter Analyse der folgenderweise definierte Funktionstypus:

$$i\eta_{ik}(M) \equiv M \pmod{k} \qquad (0 \leqq \eta_{ik}(M) < k),$$

und falls i, k relativ prim sind:

$$\eta_{ik}(0) + \eta_{ik}(1) + \cdots + \eta_{ik}(k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Bezeichnen wir die Zahl der Auflösungen der Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = A$$

mit

$$\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_n; A),$$

dann bekommen wir mit Gebrauch obiger Formeln:

$$\varphi(1,1;A) = A + 1,$$

$$\varphi(1,2;A) = \frac{A + (2 - \eta_{12}(A))}{2},$$

$$\varphi(1,3;A) = \frac{A + (3 - \eta_{13}(A))}{3},$$

$$\varphi(2,3;A) = \frac{A + [6 - 3\eta_{12}(A) - 2\eta_{23}(A)]}{6},$$

$$\varphi(1,1,1;A) = \frac{A^2 + 3A + 2}{2},$$

$$\varphi(1,1,2;A) = \frac{A^2 + 4A + [4 - \eta_{12}(A)]}{4},$$

$$\varphi(1,1,3;A) = \frac{3A^2 + 15A + 22 - 4\eta_{13}(A) - 2\eta_{13}(A-1)}{18},$$

$$\varphi(1,2,2;A) = \frac{A^2 + 2(3 - \eta_{12}(A))A^1 + (8 - 5\eta_{12}(A))}{8},$$

$$\varphi(1,2,3;A) = \frac{3A^2 + 18A + [28 - 9\eta_{12}(A) - 4\eta_{13}(A) + 4\eta_{13}(A-1)]}{36},$$

$$\varphi(2,2,3;A) = \frac{3A^2 + (30 - 18\eta_{12}(A))A + 64 - 63\eta_{12}(A) - 8\eta_{23}(A) + 8\eta_{23}(A-1)}{72},$$

$$\varphi(2,3,4;A) = \frac{1}{3!\,4!}\Big\{3A^2 + 18(2 - \eta_{12}(A))A^1 + [112 - 63\eta_{12}(A) - 16\eta_{13}(A) + 16\eta_{13}(A-1) - 18\eta_{34}(A)]\Big\}.$$

Wie es scheint, machen praktische Anwendungen hauptsächlich die Entwicklung der Eigenschaften der periodischen Funktionen

$$\eta_{ik}(A)$$

notwendig.

Eine solche Eigenschaft ist:

$$\eta_{1n}(M) + \eta_{n-1,n}(M+1) = n - 1,$$

und sind i und k relativ prim:

$$\sum_{z=0}^{k-1} (\eta_{ik}(z))^r = \sum_{z=0}^{k-1} z^r.$$

Vollständigere Kenntnisse über die Eigenschaften der Fundamentalfunktion können die weitere Vereinfachung der die Zahl der Partitionen ausdrückenden, zusammengesetzten Funktionen möglich machen.

Miskolcz (Ungarn), den 31. August 1913.

Über die Invarianten der Hauptgruppe.*)

Von

Roland Weitzenböck in Graz.

Als wichtigstes Problem bei algebraisch-geometrischen Untersuchungen kann das folgende bezeichnet werden: Es ist in einem Gebiete n^{ter} Stufe [$(n-1)$-dimensionaler Raum R_{n-1}] ein geometrisches Gebilde F und eine Kollineationsgruppe G gegeben. Man soll alle diejenigen Eigenschaften von F angeben, die bei den Transformationen von G erhalten bleiben.**)

Wir wollen jetzt erklären, was wir in folgendem unter einem „geometrischen Gebilde" und einer „Eigenschaft" eines solchen verstehen werden. Hierzu wählen wir im Operationsraume R_{n-1} ein Koordinatensimplex und bezeichnen mit X_i die homogenen Koordinaten eines Punktes, mit Π_{ik} die einer Geraden (oder allgemeiner die eines linearen R_{n-3}-Komplexes), mit Π_{ikl} die einer Ebene (oder allgemeiner die eines linearen R_{n-4}-Komplexes), $\cdots$, mit U_i' die homogenen Koordinaten eines linearen R_{n-2}. Dann sei f eine *Form*, welche eine oder mehrere dieser Koordinatenreihen enthält, d. h. eine ganze rationale Funktion der $X_i, \Pi_{ik}, \Pi_{ikl}, \cdots, U_i'$, die homogen in jeder Koordinatenreihe ist, die sie enthält.

Unter einem (algebraischen) „geometrischen Gebilde" verstehen wir dann diejenige Figur im R_{n-1}, die durch Nullsetzen einer endlichen Anzahl m solcher Formen f dargestellt wird:

$$f^{(1)}=0,\ f^{(2)}=0,\ \cdots,\ f^{(m)}=0 \qquad (m \geqq 1).$$

Die Formen $f^{(i)}$ bezeichnen wir dann als „Grundformen", ihre Gesamtheit als „Grundformensystem" oder als „System der Grundformen $f^{(i)}$".

*) Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit bildeten den Inhalt eines Vortrages, den der Verf. gelegentlich der 85. Naturforscherversammlung in Wien (1913) gehalten hat.

**) Vgl. F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm Erlangen 1872; wieder abgedruckt in Math. Ann 43, S. 63—100 (1893).

Es sei nun G eine Kollineation oder auch eine Kollineationsgruppe, S die dazu gehörige Substitution bzw. Substitutionsgruppe und J eine Invariante der Grundformen bezüglich S. Eine „bei S invariante Eigenschaft“ des durch die Grundformen f gegebenen geometrischen Gebildes F ist dann erklärt durch das Verschwinden (identische Verschwinden) von Invarianten J, allenfalls auch durch Ungleichungen zwischen ihnen.

Wir heben noch hervor, daß wir unter Invariante schlechthin stets eine ganze rationale Invariante verstehen. Dies ist eine ganze rationale, allseitig-homogene Funktion der Koeffizienten der Grundformen f, welche sich nicht auf eine Konstante reduziert und die nach Ausführung einer linearen Substitution S mit einem Faktor multipliziert erscheint, der nur von den Transformationskoeffizienten von S abhängt. Allseitig-homogen soll dabei heißen: homogen in den Koeffizientenreihen jeder einzelnen der Grundformen f.

Die algebraische Einkleidung obigen Problems ergibt jetzt: Man soll alle algebraischen Invarianten des geometrischen Gebildes F bezüglich S aufsuchen.

Dieses Problem findet seine erste und wichtigste Beantwortung durch die Angabe der ganzen rationalen Invarianten J der Grundformen f bezüglich S. Hierbei ist der Begriff eines „vollständigen Invariantensystems“ von grundlegender Bedeutung. Ein vollständiges *Invarianten*system von Invarianten J der Grundformen f bezüglich S wird gebildet von ganzen rationalen Invarianten $J_1, J_2, J_3, \cdots$ der Grundformen f bezüglich S, die die Eigenschaft besitzen, daß sich durch sie jede ganze rationale Invariante der Grundformen f bezüglich S ganz und rational ausdrücken läßt. Besteht insbesondere das System $J_1, J_2, J_3, \cdots$ aus einer endlichen Anzahl von Invarianten, so heißt dieses System ein *endliches*.

Für geometrische Anwendungen ist ferner von Bedeutung der Begriff eines „vollständigen *Formen*systems“. Hierunter versteht man folgendes. Wir fügen dem System

$$\Sigma = f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(m)}$$

der Grundformen $f^{(i)}$ noch die Linearformen

$$\varphi^{(1)} = \Sigma u_i' X_i, \quad \varphi^{(2)} = \Sigma \pi_{ik}' \Pi_{ik}, \quad \varphi^{(3)} = \Sigma \pi_{ikl}' \Pi_{ikl}, \cdots, \varphi^{(n-1)} = \Sigma x_i U_i'$$

hinzu, Linearformen also, die von jeder der Koordinaten

$$X_i, \Pi_{ik}, \Pi_{ikl}, \cdots, U_i'$$

eine und nur eine Reihe enthalten.

Aus Σ entsteht nun so das erweiterte System

$$\Sigma' = f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(m)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(n-1)}.$$

Ein vollständiges *Invarianten*system der Formen von Σ' wird dann ein vollständiges *Formen*system der Grundformen f genannt.

Es fällt also der Begriff „vollständiges Formensystem" unter den eines „vollständigen Invariantensystems" in derselben Weise, wie man Kovarianten, Kontravarianten usw. mit dem Begriffe „Invarianten" umschließen kann. Warum man gerade die Formen φ mit je einer Koordinatenreihe dem Systeme der Grundformen f hinzufügt, kann hier nicht weiter ausgeführt werden.*)

§ 1.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen gehen wir von dem System

$$\Sigma = f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(m)}$$

der Grundformen f aus und nehmen als gegebene Kollineationsgruppe die allgemeine projektive Gruppe G. Die Koeffizienten der f sollen hierbei gewöhnliche komplexe Größen und voneinander unabhängig sein. Das Fundamentalproblem besteht dann in der Aufstellung eines vollständigen Invariantensystems von projektiven Invarianten der Grundformen f.

Für die Lösung dieses Problems gibt es eine allgemeingültige Methode, welche auch bei weniger einfachen Fällen ein wirkliches Hinschreiben eines vollständigen Invariantensystems gestattet. Diese Lösungsmethode beruht erstens auf einer besonderen (sogenannten symbolischen) Darstellung der Grundformen f und zweitens auf der Anwendung von drei Sätzen: dem ersten und zweiten Fundamentalsatze der symbolischen Methode und dem Endlichkeitssatze von Hilbert. Wir wollen hier kurz andeuten, wie diese drei Sätze Verwendung finden.

Das Wesentliche der symbolischen Darstellung der Grundformen f besteht darin, daß diese durch Linearformen ersetzt werden und daß dann die Theorie der Invarianten der f auf die Theorie der Invarianten dieser Linearformen hinausläuft, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt. Bezeichnen nämlich $a_i, b_i, c_i, \cdots$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ Größen oder Symbole, die den Punktkoordinaten X_i kogredient sind und $\alpha_i', \beta_i', \gamma_i', \cdots$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ Größen oder Symbole, die den R_{n-2}-Koordinaten U_i' kogredient (den X_i also kontragredient) sind, so gibt es für die Invarianten der Linearformen

$$\Sigma \alpha_i' X_i, \ \Sigma \beta_i' X_i, \ \Sigma \gamma_i' X_i, \cdots; \ \Sigma a_i U_i', \ \Sigma b_i U_i', \ \Sigma c_i U_i', \cdots$$

nur die drei Typen:

*) Vgl. hierzu A. Clebsch, Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Abhandl. d. Göttinger Ges. d. Wissensch. 17 (1872).

$$(1)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} a_1\, a_2 \cdots a_n \\ b_1\, b_2 \cdots b_n \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ q_1\, q_2 \cdots q_n \end{vmatrix} = (ab\cdots q), \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1'\, \alpha_2' \cdots \alpha_n' \\ \beta_1'\, \beta_2' \cdots \beta_n' \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \nu_1'\, \nu_2' \cdots \nu_n' \end{vmatrix} = (\alpha'\beta'\cdots\nu'), \\ (a\alpha') = a_1\alpha_1' + a_2\alpha_2' + \cdots + a_n\alpha_n'. \end{cases}$$

Man bezeichnet dann die beiden n-reihigen Determinanten $(ab\cdots pq)$ und $(\alpha'\beta'\cdots\mu'\nu')$ als „Klammerfaktoren" oder „Faktoren zweiter Art"; die Summen $(a\alpha')$ nennt man „Linearfaktoren" oder „Faktoren erster Art".

Der erste Fundamentalsatz der symbolischen Methode lautet dann:*)

Sind $a, b, c, \cdots, \alpha', \beta', \gamma', \cdots$ die Größen- oder Symbolreihen, mit denen die Grundformen f symbolisch dargestellt werden, so läßt sich jede ganze rationale projektive Invariante J dieser Grundformen aufbauen aus Faktoren erster und zweiter Art.

Durch diesen Satz werden die Bausteine (Faktoren erster und zweiter Art) für die Invarianten J geliefert und diese Bausteine lassen sich von vornherein erschöpfend angeben. Die durch die linken Seiten der Gleichungen (1) gegebene Darstellung von n-reihigen Determinanten (Faktoren zweiter Art), bzw. n-gliedrigen Summen (Faktoren erster Art) nennt man „abgekürzte Bezeichnung". Ihr Vorteil besteht erstens darin, daß nicht mehr die einzelnen Größen (Koordinaten) oder Symbole $a_1, a_2, \cdots, a_n$ explizite hingeschrieben werden, sondern daß die Gesamtheit solcher Größen (Symbole) a_i durch ein Zeichen a, die „Größenreihe a" (Symbolreihe a) ausgedrückt wird. Auf diese einfache Abstraktion gründen sich ebenso die in der Vektoranalysis und die in der Graßmannschen Ausdehnungslehre verwendeten Bezeichnungen.

Zweitens aber, und dies ist das Auschlaggebende, gestattet diese abgekürzte Bezeichnung ihre fortwährende Verwendung: man braucht nirgends auf die einzelnen $a_i, b_i, \cdots, \alpha_i', \beta_i', \cdots$ zurückzugehen, sondern arbeitet nur mit den Faktoren erster und zweiter Art selbst.

Näheres hierüber gibt der zweite Fundamentalsatz der symbolischen Methode**), den wir der größeren Deutlichkeit halber für ternäre Formen ($n = 3$) aussprechen:

Jede Identität zwischen ganzen rationalen Invarianten ist eine Folge von einfacheren Identitäten („Nullidentitäten"), die den fünf nachstehenden Typen angehören:

---

*) Vgl. meine Arbeit: Beweis des ersten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode, Wiener Ber. **122**, Abt. IIa (1913), wo sich ausführliche Literaturangaben finden.

**) Vgl. meine Arbeit: Beweis des zweiten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode, wie bei *).

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\text{I.} & (abc)(d\alpha') - (dbc)(a\alpha') + (dac)(b\alpha') - (dab)(c\alpha') \equiv 0, \\
\text{I}'. & (\alpha'\beta'\gamma')(\delta' a) - (\delta'\beta'\gamma')(\alpha' a) + (\delta'\alpha'\gamma')(\beta' a) - (\delta'\alpha'\beta')(\gamma' a) \equiv 0, \\
\text{II.} & (abc)(def) - (dbc)(aef) + (dac)(bef) - (dab)(cef) \equiv 0, \\
\text{II}'. & (\alpha'\beta'\gamma')(\delta'\varepsilon'\eta') - (\delta'\beta'\gamma')(\alpha'\varepsilon'\eta') + (\delta'\alpha'\gamma')(\beta'\varepsilon'\eta') - (\delta'\alpha'\beta')(\gamma'\varepsilon'\eta') \equiv 0, \\
\text{III.} & (abc)(\alpha'\beta'\gamma') - \begin{vmatrix} (a\alpha') & (a\beta') & (a\gamma') \\ (b\alpha') & (b\beta') & (b\gamma') \\ (c\alpha') & (c\beta') & (c\gamma') \end{vmatrix} \equiv 0.
\end{array}
\right.
$$

Durch diesen zweiten Fundamentalsatz der symbolischen Methode ist man in der Lage, bei gegebenen, symbolisch dargestellten Invarianten, die zwischen diesen bestehenden Gleichungen erschöpfend anzugeben. Diese Angabe geschieht eben deshalb in einfacher und durchsichtiger Weise, weil man nicht mit den Koeffizienten der Grundformen oder gar mit den Symbolen selbst zu rechnen braucht, sondern nur mit den Faktoren erster und zweiter Art operiert.

Für die Aufstellung eines vollständigen Invariantensystems der Grundformen f ist nun folgender Weg vorgezeichnet. Aus den Größen- und Symbolreihen, die zur symbolischen Darstellung der Grundformen f verwendet werden, baut man erstens nach dem ersten Fundamentalsatze Invarianten auf und ermittelt dann zweitens ihre gegenseitigen Beziehungen nach dem zweiten Fundamentalsatze der symbolischen Methode.

Jetzt tritt der dritte der obigen Sätze in Verwendung: der Endlichkeitssatz von Hilbert.*)

Er sagt aus, *daß ein vollständiges Invariantensystem von projektiven Invarianten endlich ist.*

Dieser Satz bietet dann von vornherein die Gewißheit, daß die beiden Tätigkeiten: erstens Aufbauen von Invarianten nach dem ersten Fundamentalsatze und zweitens Aufstellen der Relationen zwischen den so erhaltenen Invarianten nach dem zweiten Fundamentalsatze der symbolischen Methode, nicht ins Endlose verlaufen können, sondern nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbrechen müssen, indem sich keine irreduziblen Invarianten mehr ergeben. Dann eben ist man im Besitze eines vollständigen Invariantensystems.**)

---

*) Vgl. D. Hilbert, Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann. 36, S. 473—534 (1890).

**) Ein einfaches Beispiel für eine solche Ableitung findet man z. B. in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I, VIII. Abschnitt der dritten Abteilung, wo eine ternäre quadratische Form als einzige Grundform behandelt wird.

§ 2.

Das Bisherige gilt für Invarianten bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe G des Gebietes n^{ter} Stufe ($n \geqq 2$). Durch die Aufstellung eines vollständigen Invariantensystems von projektiven Invarianten gegebener Grundformen f ist die Frage nach allen jenen Ausdrücken, die bei projektiven algebraisch-geometrischen Untersuchungen der durch die f dargestellten geometrischen Gebilde auftreten können, im wesentlichen erledigt.

Wie steht es nun aber bei einer Geometrie, der nicht die allgemeine projektive Gruppe G, sondern der eine Untergruppe H von G zugrunde liegt? H soll hierbei durch eine geometrische Figur Γ definiert sein, die bei den Transformationen von H invariant bleibt.

Wir erwähnen gleich jetzt, daß wir unser Augenmerk besonders auf die *Hauptgruppe* des $(n-1)$-dimensionalen Operationsraumes richten wollen, auf diejenige Gruppe also, die der (Euklidischen) *Elementargeometrie* zugrunde liegt. Γ ist in diesem Falle das sogenannte absolute Maßgebilde (in der Ebene die „Kreispunkte", im Raum der „Kugelkreis").

Die algebraische Formulierung des Fundamentalproblems lautet jetzt: Im Gebiete n^{ter} Stufe ($n \geqq 3$) sind erstens durch das Grundformensystem

$$\Sigma = f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(m)} \qquad (m \geqq 1)$$

geometrische Gebilde F gegeben. Zweitens ist durch weitere Formen

$$\Omega = \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(h)} \qquad (h \geqq 1)$$

ein geometrisches Gebilde Γ gegeben, das eine Kollineationsgruppe H gestattet und bestimmt. Es soll ein vollständiges Invariantensystem der Grundformen f bezüglich der Gruppe H gefunden werden.

Die Lösung dieses Problems wird durch den schon verschiedenerseits*) ausgesprochenen Satz nahegelegt: Die geometrischen Eigenschaften von F bezüglich H sind projektive Eigenschaften der durch F und Γ gebildeten geometrischen Figur. Algebraisch gesprochen würde dies die Lösung geben („Adjunktionssatz"): Man vereinigt die Formen f und φ zu dem erweiterten Systeme

$$\Phi = \Sigma + \Omega = f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(m)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(h)}$$

und sucht zu den Formen von Φ ein vollständiges Invariantensystem von *projektiven* Invarianten; in diesem läßt man dann alle jene Invarianten weg, die von den Koeffizienten der f gar nicht abhängen.

So plausibel auch diese Art der Lösung wäre, so muß man sich doch davor hüten, sie als allgemein richtig anzusehen. Hierauf wurde besonders

*) Vgl. F. Klein, l. c., ferner Enzyklopädie, III AB, 4b, 31 (G. Fano).

von E. Study hingewiesen.*) Der obige Adjunktionssatz wurde eben bisher für den allgemeinen Fall nur ausgesprochen, nicht bewiesen. Es ist klar, daß jede simultane projektive Invariante der Formen f und φ, die die Koeffizienten dieser Formen tatsächlich enthält, auch eine Invariante der f bezüglich der Gruppe H ist.

Beim Beweise des Adjunktionssatzes wäre aber auch die Umkehrung des eben ausgesprochenen zu zeigen, daß nämlich auch jede Invariante der f bezüglich H entweder eine projektive Invariante der f allein oder eine projektive simultane Invariante der Formen f und φ ist.

Ein Beweis des Adjunktionssatzes liegt bisher nur für einige spezielle Fälle der Formen φ vor. So gilt er beispielsweise für den Fall, wo $\varphi^{(1)}$ eine Linearform in Punktkoordinaten ist: $\varphi^{(1)} = (l'X)$. Nimmt man dann den durch $\varphi^{(1)} = 0$ dargestellten R_{n-2} als uneigentlichen (unendlichfernen) R_{n-2}, so ist H die affine Gruppe.

Ebenso gilt der Adjunktionssatz für die beiden Fälle: α) $\varphi^{(1)} = (kU')$, β) $\varphi^{(1)} = (l'X)$, $\varphi^{(2)} = (kU')$. Im Falle β) ist H die „affine Gruppe mit festem Punkt". Es kann dann der Punkt k im R_{n-2} l' enthalten sein oder nicht.**)

Des weiteren wurde die Richtigkeit des Adjunktionssatzes bewiesen von Deruyts in der Theorie seiner „Seminvarianten".***) Das geometrische Gebilde, das durch die Formen φ in diesem Falle gegeben ist, wird dargestellt durch einen invarianten R_{n-2}, einen in diesem liegenden invarianten R_{n-3}, einen in diesem R_{n-3} liegenden invarianten R_{n-4} usw. bis zu einem invarianten Punkt, der auf einer invarianten Geraden liegt. Die Transformationen von H sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\overline{X}_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1,n-1}X_{n-1} + a_{1n}X_n,\\
\overline{X}_2 &= \phantom{a_{11}X_1 + {}} a_{22}X_2 + \cdots + a_{2,n-1}X_{n-1} + a_{2n}X_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overline{X}_{n-1} &= a_{n-1,n-1}X_{n-1} + a_{n-1,n}X_n,\\
\overline{X}_n &= a_{nn}X_n.
\end{aligned}$$

Ferner gilt der Adjunktionssatz für den Fall, wo $\varphi^{(1)} = 0$ eine quadratische Mannigfaltigkeit mit nicht verschwindender Diskriminante dar-

---

*) Vgl. E. Study, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie I, Sitz.-Ber. Ges. Wiss. Leipzig 48, S. 649—664, (1896); ferner Geometrie der Dynamen, S. 123 (1903).

**) Vgl. meine Arbeit: Die Invarianten der affinen Gruppe, Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. 22, S. 192—209 (1913).

***) Vgl. Deruyts, Essai d'une théorie générale des formes algébriques, Liège 1890, S. 52ff.

stellt, wie von E. Study gezeigt wurde.*) Nimmt man dann $\varphi^{(1)} = 0$ als absolutes Gebilde, so ist H die Gruppe der nicht-Euklidischen Bewegungen und Umlegungen.

Der Adjunktionssatz gilt schließlich auch für den Fall, daß $\varphi^{(1)} = 0$ eine quadratische Mannigfaltigkeit mit nicht verschwindender Diskriminante und $\varphi^{(2)} = 0$ einen linearen R_{n-2} darstellt.**) Wir nehmen insbesondere

$$\varphi^{(1)} = (XX) = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, \quad \varphi^{(2)} = (l'X) = X_n.$$

Dann ist H die Gruppe der Drehungen (und Spiegelungen) um den Punkt $0:0:\cdots:0:1$ (vgl. § 4). An diese letztere Tatsache knüpfen wir die folgenden Erörterungen.

§ 3.

Die Frage nach einem vollständigen Invariantensystem von projektiven Invarianten gegebener Grundformen f ist durch die drei im § 1 angeführten Sätze in die Klasse derjenigen Probleme gesunken, deren Lösung im wesentlichen nur mehr mechanische Tätigkeit erfordert.

Es entsteht nun die Frage: Kann man auch für die Elementargeometrie eine ebensolche Lösung des Fundamentalproblems geben?

Hierauf ist mit ja zu antworten. Genauer gesprochen: Bei vorgelegten Grundformen f gibt es auch für die Invarianten bezüglich der Hauptgruppe (Bewegungen, Umlegungen, Ähnlichkeitstransformationen) drei Sätze, mit deren Hilfe es gelingt, ein vollständiges Invariantensystem aufzustellen. Man ist hierdurch in die Lage versetzt, die Gesamtheit der Ausdrücke (ganze rationale Funktionen der Koordinaten, Koeffizienten usw.) zu übersehen, die bei elementargeometrischen Untersuchungen vorgelegter geometrischer Gebilde auftreten können. Die Methoden, die hier das Fundamentalproblem lösen, sollen im folgenden auseinandergesetzt werden.

Es seien $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}$ rechtwinklige Koordinaten eines Punktes des $(n-1)$-dimensionalen Operationsraumes. Wir benutzen weiterhin rechtwinklige homogene Punktkoordinaten X_i, die durch

$$\xi_i = \frac{X_i}{X_n} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

gegeben sind. $X_n = 0$ stellt dann den uneigentlichen R_{n-2} dar.

Das absolute Maßgebilde Γ definieren wir als $(n-3)$-dimensionale Schnittmannigfaltigkeit des uneigentlichen R_{n-2} $X_n = 0$ und des quadratischen R_{n-2} $\quad \Phi = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = (XX) = 0.$

*) Vgl. E. Study, Über die Invarianten der projektiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Diskriminante, Sitz.-Ber. Ges. Wiss. Leipzig 49 (1897), S. 442—461.

**) Vgl. meine Arbeit: Über Drehungsinvarianten, Denkschriften der Kais. Akad. d. Wiss. in Wien, 89 (1913).

Dies ist die Kugel mit dem Radius $i = \sqrt{-1}$ und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt.

In veränderlichen R_{n-2}-Koordinaten U_i' haben wir als Gleichung von Γ:

$$\Phi' = U_1'^2 + U_2'^2 + \cdots + U_{n-1}'^2 = (U'|U') = 0.$$

Die Transformationen der Hauptgruppe lassen Γ invariant. Wir nennen Invarianten bezüglich der Hauptgruppe kurz „*Hauptinvarianten*".

Um nun ein vollständiges Invariantensystem von Hauptinvarianten für die gegebenen Grundformen f zu finden, könnte man versuchen, den obigen Adjunktionssatz heranzuziehen, d. h. für das erweiterte System

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(m)}, \Phi'$$

ein vollständiges Invariantensystem von *projektiven* Invarianten aufzustellen.

In diesem Falle versagt aber der Adjunktionssatz, und zwar aus folgendem Grunde. Nehmen wir z. B. $n = 4$ und es sei $\varphi = \Sigma \alpha_{ik} U_i' U_k' = 0$ die Gleichung einer einfach-singulären Fläche zweiter Klasse, eines irreduziblen Kegelschnittes Γ im Raume R_3. Γ liege in der Ebene mit der Gleichung $\Sigma e_i' X_i = 0$. Das System der Grundformen bestehe aus der einzigen Linearform $f^{(1)} = \Sigma y_i U_i'$. Dann ist $J = \Sigma y_i e_i'$ sicherlich eine ganze rationale Invariante von $f^{(1)}$ bezüglich der Gruppe H, die Γ in sich überführt. $J = 0$ sagt aus, daß der Punkt y in der Ebene e' liegt. J ist aber keine *ganze rationale projektive* Invariante des erweiterten Systems $f^{(1)}$, φ; erst J^2 ist eine solche.

Wir werden uns daher bei der Frage nach einem vollständigen Invariantensystem von Hauptinvarianten der Grundformen f nach einer anderen Methode umsehen müssen. Das Ziel wird erreicht durch Zurückgehen auf die sogenannten Drehungsinvarianten.*)

§ 4.

Jene Kollineationen des R_{n-1}, die die Kugel $\Phi = (XX) = 0$ und den uneigentlichen R_{n-2} $X_n = 0$ invariant, und zwar jedes dieser Gebilde für sich invariant lassen, bilden eine gemischte, $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$-gliedrige Gruppe D, die von den Drehungen um den Koordinatenursprung und von den Spiegelungen an den Koordinatenachsen, an den Koordinatenebenen, an den Koordinatenräumen usw. gebildet wird. Die Invarianten bezüglich dieser Gruppe D nennen wir „*Drehungsinvarianten*".

Die Gruppe D ist eine Untergruppe der Gruppe B der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen und eine Untergruppe der Hauptgruppe H.

Die Invarianten bezüglich B nennen wir kurz „*Bewegungsinvarianten*".

*) Vgl. meine Arbeit: Über Drehungsinvarianten, Denkschriften der Kais. Akad. d. Wiss. in Wien, 89 (1913).

Wenn es nun gelingt, für ein System von Grundformen f ein vollständiges Invariantensystem $J_1, J_2, \cdots, J_h$ von Drehungsinvarianten anzugeben, d. h. also das Fundamentalproblem für die Gruppe D zu lösen, so gewinnt man bereits eine nähere Einsicht in die Struktur der Bewegungsinvarianten und der Hauptinvarianten. Es ist ja jede Bewegungs- und ebenso jede Hauptinvariante auch Drehungsinvariante und also eine ganze rationale Funktion der $J_1, J_2, \cdots, J_h$.

Die Theorie der Drehungsinvarianten ist nun leicht zu beherrschen. Die drei Sätze, welche hier das Fundamentalproblem lösen, lauten:

Erster Fundamentalsatz der symbolischen Methode für Drehungsinvarianten: Sind $a, b, c, \cdots$ (gestrichelte oder ungestrichelte) Symbol- oder Größenreihen, mit denen die Grundformen f symbolisch dargestellt werden, und bedeutet l' die Größenreihe $0:0:\cdots:0:1$, *so ist jede ganze rationale Drehungsinvariante der Grundformen f darstellbar durch die Faktoren*

$$(ab\cdots pl'),\ (ab),\ (al'). \tag{3}$$

Wir geben hierzu einige Erläuterungen. Wir bezeichnen stets Größen- und Symbolreihen, die den Punktkoordinaten X_i kogredient sind mit Buchstaben ohne Strich: $a, b, \cdots, x, y, \cdots$ (ungestrichelte Zeichen); Größen- und Symbolreihen, die den X_i kontragredient sind, sollen immer durch Buchstaben mit Strich: $\alpha', \beta', \cdots, u', v', \cdots, p', q', l', \cdots$ bezeichnet werden. Dann sind bei *projektiven* Invarianten in einem Faktor erster Art $(u'x)$ immer ein gestrichelter und ein ungestrichelter Buchstabe beisammen. In einem Faktor zweiter Art hingegen sind bei *projektiven* Invarianten entweder alle Buchstaben gestrichelt, wie z. B. in $(a'b'c')$, oder alle ungestrichelt, wie z. B. in $(xyzt)$.

Bei *Drehungsinvarianten* fällt nun dieses Merkmal im Aufbau der Faktoren erster und zweiter Art weg. Es kommen auch als Faktoren erster Art die Typen (ab), $(\alpha'\beta')$, $(\alpha'l')$ vor. Analog bei Faktoren zweiter Art: $(a'b'c)$, $(xyu'v')$ usw.

Was schließlich die Bezeichnung der Größenreihe $0:0:\cdots:0:1$ mit l' anbelangt, so empfiehlt sich hier dieselbe deshalb, weil man dadurch auch formal an der „abgekürzten Bezeichnung" (vgl. § 1) festhält. Wir haben dann einfach statt a_n den Linearfaktor $(l'a) = a_n$ und statt der $(n-1)$-reihigen Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 \cdots p_{n-1}$ den Klammerfaktor $(ab\cdots pl')$.

Zweiter Fundamentalsatz der symbolischen Methode für Drehungsinvarianten. Hier ergibt sich gemäß den eben gegebenen Erläuterungen zum ersten Fundamentalsatze eine Vereinfachung gegenüber dem entsprechenden Satze für projektive Invarianten. Da nämlich bei Drehungsinvarianten der formelle Unterschied zwischen ko- und kontragredient wegfällt, so lassen

sich I und I′, sowie II und II′ in (2) zu je einer Identität zusammenfassen. Wir sprechen den zweiten Fundamentalsatz der symbolischen Methode für Drehungsinvarianten wieder der Einfachheit halber für ternäre Formen aus:

Jede Identität zwischen ganzen rationalen Drehungsinvarianten ist eine Folge von einfachen Identitäten, die den nachstehenden drei Typen angehören:

$$(4)\quad \begin{cases} \text{I. } (abc)(de) - (dbc)(ae) + (dac)(be) - (dab)(ce) \equiv 0, \\ \text{II. } (abc)(\alpha\beta\gamma) - (\alpha bc)(a\beta\gamma) + (\alpha ac)(b\beta\gamma) - (\alpha ab)(c\beta\gamma) \equiv 0, \\ \text{III. } (abc)(\alpha\beta\gamma) - \begin{vmatrix} (a\alpha) & (a\beta) & (a\gamma) \\ (b\alpha) & (b\beta) & (b\gamma) \\ (c\alpha) & (c\beta) & (c\gamma) \end{vmatrix} \equiv 0. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten $a, b, c, \cdots, \alpha, \beta, \gamma, \cdots$ gestrichelte oder ungestrichelte Größen- oder Symbolreihen, mit denen die Grundformen f dargestellt werden, oder schließlich auch die Größenreihe l'.

Der dritte Satz schließlich, der zur Lösung des Fundamentalproblems bei Drehungsinvarianten verwendet wird, sagt aus, daß ein vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten *endlich* ist.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus dem Endlichkeitssatze für projektive Invarianten, indem sich hier der Adjunktionssatz anwenden läßt (vgl. § 2). Fügen wir nämlich den Grundformen f die beiden Formen $\Phi = (XX)$ und $L = (l'X)$ hinzu, so läßt sich nachweisen, daß die Drehungsinvarianten der f als projektive Invarianten der Formen f, Φ und L angesehen werden können.*)

Die obigen drei Sätze gestatten nun die Lösung des Fundamentalproblems für Drehungsinvarianten in derselben Weise wie bei den projektiven Invarianten (vgl. § 1). Man sieht auch sofort, daß zufolge des Wegfalles der formellen Unterscheidung zwischen ko- und kontragredient die Anzahl der Invarianten bedeutend zunimmt. So besteht beispielsweise für $n = 4$ ein kleinstes vollständiges Invariantensystem von projektiven Invarianten der vier Grundformen

$$f^{(1)} = \Sigma a'_{ik}\Pi_{ik}, \quad f^{(2)} = \Sigma \alpha'_{ik}\Pi_{ik}, \quad f^{(3)} = \Sigma y_i U'_i, \quad f^{(4)} = \Sigma v'_i X_i$$

(zwei lineare Strahlenkomplexe, ein Punkt und eine Ebene) aus fünf Invarianten, während ein kleinstes vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten dieser vier Grundformen bereits dreiundachtzig Invarianten aufweist.**)

---

*) Vgl. die Anmerkung auf S. 583.

**) Vgl. meine Arbeit: Drehungsinvarianten eines linearen Komplexes im R_3. Monatshefte Math. Phys. 15 (1914).

§ 5.

Wir wenden uns nun den Bewegungsinvarianten und Hauptinvarianten zu. Die nachstehenden Sätze gelten zumeist für beide Invariantenkategorien, wir sprechen sie daher der Einfachheit halber nur für Hauptinvarianten aus.

Wie schon oben bemerkt, gewinnt man durch den Besitz eines vollständigen Invariantensystems $J_1, J_2, \cdots, J_h$ von Drehungsinvarianten bereits einen Einblick in die Struktur der Hauptinvarianten, da jede Hauptinvariante K auch eine Drehungsinvariante und daher gleich einer ganzen rationalen Funktion

$$K = K(J_1, J_2, \cdots, J_h) \tag{5}$$

der J_j ist.

Dieser Ansatz legt dann die Frage nahe: Welche Beschaffenheit muß die Funktion K besitzen, damit K Hauptinvariante wird?

Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß K auch Invariante bezüglich derjenigen n-gliedrigen Gruppe M ist, deren Transformationen aus den Translationen und perspektiven Ähnlichkeitstransformationen bestehen. Die Transformationen von M sind gegeben durch:

$$\begin{cases} X_1 = \overline{X}_1 + k_1 \overline{X}_n, \\ X_2 = \overline{X}_2 + k_2 \overline{X}_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_n = \overline{X}_n + k_n \overline{X}_n, \end{cases} \qquad (k_n \neq -1). \tag{6}$$

Diese Gleichungen werden zusammengefaßt in die eine:

$$X_i = \overline{X}_i + k_i (l' \overline{X}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{7}$$

Die k_i sind hierbei n gewöhnliche komplexe Größen. Für $k_n = 0$ haben wir eine Translation, für $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 0$ eine perspektive Ähnlichkeitstransformation.

Setzen wir

$$\Delta = 1 + k_n = 1 + (l' k) \neq 0, \tag{8}$$

so lauten die aus (6) folgenden Transformationen für die R_{n-2}-Koordinaten U_i':

$$\begin{cases} U_1' \ = \Delta \overline{U}_1', \\ U_2' \ = \Delta \overline{U}_2', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ U_{n-1}' = \Delta \overline{U}_{n-1}', \\ U_n' \ = \Delta \overline{U}_n' - (k \overline{U}'), \end{cases} \qquad (\Delta = 1 + k_n \neq 0); \tag{9}$$

oder auch, zusammengefaßt:

$$U_i' = \Delta \overline{U}_i' - l_i' (k \overline{U}'), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{10}$$

Die besondere Gestalt der Gleichungen (9), sowie der Umstand, daß bei den Hauptinvarianten das absolute Gebilde Γ durch eine Gleichung in R_{n-2}-Koordinaten $\Phi' = U_1'^2 + U_2'^2 + \cdots + U_{n-1}'^2 = (U' | U') = 0$ dargestellt

wird, gestattet eine verhältnismäßig einfache Formulierung des ersten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode für Hauptinvarianten. Hierzu ist nur ein kleiner Kunstgriff notwendig, der sich auf die symbolische Darstellung der Grundformen f bezieht: Wir stellen nämlich diese f so symbolisch dar, daß dabei nur gestrichelte (den U_i' kogrediente) Größen- und Symbolreihen verwendet werden.

Bei einer Form $(a'X)$ mit Punktkoordinaten X_i ist hierbei keine weitere Änderung nötig. Dasselbe gilt bei Formen mit R_1-, R_2-, $\cdots$, R_{n-3}-Koordinaten. Bei einer Form $(\alpha U')$ mit R_{n-2}-Koordinaten hingegen haben wir die ungestrichelte Reihe α. Wir setzen hier

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha_i = (-1)^{i+1}\, \alpha_1'\, \alpha_2' \cdots \alpha_{i-1}'\, \alpha_{i+1}' \cdots \alpha_n', \\ U_i' = (-1)^{i+1}\, U_1\, U_2 \cdots U_{i-1} U_{i+1} \cdots U_n, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

wobei sowohl die α_i' als die U_k $(n-1)$-fältige Komplexsymbole sind. Dann erhalten wir

$$(12)\qquad (\alpha U') = \alpha_1 U_1' + \cdots + \alpha_n U_n' = \frac{1}{(n-1)!}(\alpha' U)^{n-1}$$

und zur symbolischen Darstellung der Reihe α sind jetzt $n-1$ Reihen α' herangezogen.

Wir haben hierdurch erreicht, daß zur symbolischen Darstellung der Grundformen f nur gestrichelte Reihen

$$(13)\qquad a',\ b',\ c',\ \cdots,\ p',\ q',\ \cdots$$

verwendet werden. Die Theorie der Hauptinvarianten von f wird so zurückgeführt auf die Theorie der Hauptinvarianten von (symbolischen) Linearformen

$$(a'X),\ (b'X),\ (c'X),\ \cdots,\ (p'X),\ (q'X),\ \cdots$$

und hierin liegt der Nutzen dieser besonderen symbolischen Darstellung der f, wie das Folgende klar machen wird.

Wir greifen jetzt wieder auf die Gleichung (5) zurück. Bei ausschließlicher Verwendung der Reihen (13) zur Darstellung der f erhalten wir statt (3) für den Aufbau der Drehungsinvarianten $J_1, J_2, \cdots$ die Faktoren:

$$(14)\qquad (a'b' \cdots p'q'),\ (a'b' \cdots p'l'),\ (a'b'),\ (a'l').$$

Es ist dann nach (5) eine Hauptinvariante K eine ganze rationale Funktion von solchen Faktoren (14):

$$(15)\qquad K = G((a'b' \cdots p'q'), (a'b' \cdots p'l'), (a'b'), (a'l')).$$

Über den besonderen Bau dieser Funktion G läßt sich nun unschwer Aufschluß gewinnen. Wir bemerken, daß die beiden Faktorentypen $(a'b' \cdots p'q')$ und $(a'b' \cdots p'l')$, nicht aber die beiden Linearfaktoren $(a'b')$ und $(a'l')$ gegenüber den Transformationen (9) die Invarianteneigenschaft besitzen.

Dieselbe Eigenschaft besitzt hingegen auch jeder Faktor

(16) $(a'|b') = a_1'b_1' + a_2'b_2' + \cdots + a'_{n-1}b'_{n-1} = (a'b') - (a'l')(b'l')$.

Es ist also z. B. die Funktion $g((a'b'), (a'l'), (b'l')) \equiv (a'b') - (a'l')(b'l')$ eine ganze rationale Funktion dieser besonderen Eigentümlichkeit, die wir auch von G in (15) verlangen: Invarianteneigenschaft gegenüber den Transformationen (9).

Ferner ist sofort klar, daß jedes Produkt von Faktoren

(17) $$(a'b' \cdots p'q'),\quad (a'b' \cdots p'l'),\quad (a'|b'),$$

dem eine nicht-symbolische Deutung zukommt, eine Hauptinvariante der f darstellt.

Umgekehrt kann man beweisen*), daß jede ganze rationale Hauptinvariante und Bewegungsinvariante sich aus diesen Faktoren (17) aufbauen läßt. Dies gibt den Satz:

Sind $a', b', c', \cdots, p', q', \cdots$ die gestrichelten Symbol- und Größenreihen, mit denen die Grundformen f symbolisch dargestellt werden, bedeutet ferner l' die Größenreihe $0 : 0 : \cdots : 0 : 1$, *so ist jede ganze rationale Hauptinvariante (und Bewegungsinvariante) darstellbar durch die Faktoren:*

(17) $$(a'b' \cdots p'q'),\quad (a'b' \cdots p'l'),\quad (a'|b').$$

Dieser Satz entspricht hier dem ersten Fundamentalsatze der symbolischen Methode für Hauptinvarianten bei Zugrundelegung der oben geschilderten besonderen symbolischen Darstellung der Grundformen.

Der Satz, welcher bei dieser Darstellung dem zweiten Fundamentalsatze der symbolischen Methode entspricht, lautet, wobei wir uns wieder auf ternäre Grundformen beschränken:**)

Jede Identität zwischen ganzen rationalen Hauptinvarianten (und Bewegungsinvarianten) ist eine Folge von einfachen Identitäten, die den drei nachstehenden Typen angehören:

(18) $$\left\{\begin{array}{l} \text{I. } (a'b'c')(d'|e') - (d'b'c')(a'|e') + (d'a'c')(b'|e') - (d'a'b')(c'|e') \equiv 0,\\ \text{II. } (a'b'c')(d'e'f') - (d'b'c')(a'e'f') + (d'a'c')(b'e'f') - (d'a'b')(c'e'f') \equiv 0,\\ \text{III. } (a'b'l')(c'd'l') - \begin{vmatrix} (a'|c') & (a'|d') \\ (b'|c') & (b'|d') \end{vmatrix} \equiv 0. \end{array}\right.$$

In I und II kann auch l' in den Klammerfaktoren stehen. Ist dies bei I der Fall, so verschwindet ein Glied wegen $(l'|e') \equiv 0$.

Schließlich gelingt der Nachweis, daß man ein vollständiges Invariantensystem $K_1, K_2, \cdots$ von Hauptinvarianten stets so auswählen kann, daß die K_i projektive Invarianten des erweiterten Systems $f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(m)}$,

*) Vgl. meine Arbeit: Über Bewegungsinvarianten, I. Mitteilung, Sitz.-Ber. Ak. Wien 122, Abt. IIa (1913).

**) Vgl. wie oben, III. Mitteilung.

$\varphi^{(1)} = (XX)$, $\varphi^{(2)} = (l'X)$ sind (vgl. § 2). Hieraus folgt dann die *Endlichkeit* für das System der K_i.*)

Mithin haben wir auch hier die gewünschten drei Sätze, die bei den projektiven Invarianten und bei den Drehungsinvarianten das Fundamentalproblem zu lösen gestatten: Aufstellen eines vollständigen Invariantensystems.

§ 6.

Die Sätze des vorigen Paragraphen geben die Lösung des Fundamentalproblems für Hauptinvarianten in derselben Weise wie diese Lösungsart in § 1 für projektive Invarianten geschildert wurde. Nur ein Unterschied macht sich hier geltend: den Hauptinvarianten liegt im allgemeinen eine andere symbolische Darstellung der Grundformen f zugrunde als die, die wir bei projektiven Invarianten verwenden. Die beiden symbolischen Darstellungen der f fallen dann und nur dann zusammen, wenn keine der Grundformen f R_{n-2}-Koordinaten enthält. Wir haben dann nämlich nur gestrichelte Symbol- und Größenreihen. Ein einfachster Fall dieser Art liegt vor, wenn die Grundformen f nur Reihen von Punktkoordinaten X_i enthalten, also insbesondere, wenn es sich um eine einzige Grundform $f = (a'X)^m$ handelt.

Es entsteht nun die Frage, in welcher Weise die im vorigen Paragraphen aufgeführten zwei Sätze abzuändern sind, wenn wir auf die ausschließliche Verwendung von gestrichelten Symbol- und Größenreihen verzichten und die Grundformen f in der üblichen symbolischen Darstellung für die Theorie der Hauptinvarianten benutzen.

Wie schon erwähnt, tritt eine solche Modifikation der obigen Sätze nur dann ein, wenn die Grundformen auch U'-Reihen enthalten. Dann haben wir nämlich bei der üblichen symbolischen Darstellung der f auch ungestrichelte Reihen $a, b, c, \cdots$, die in den Hauptinvarianten nach (11) in Symbolreihen $a', b', c', \cdots$ dargestellt erscheinen.

Um nun z. B. den ersten Satz des vorigen Paragraphen für die übliche symbolische Darstellung der f umzugestalten, müßten wir folgendermaßen verfahren. Wir müßten annehmen, daß z. B. die a_i' in den Faktoren

$$(17) \qquad (a'b'\cdots p'q'),\ (a'b'\cdots p'l'),\ (a'|b')$$

$(n-1)$-fältige Komplexsymbole sind. Dann müßten wir Produkte dieser Faktoren betrachten, die alle $n-1$ a'-Reihen enthalten. In diesen Produkten müßten wir durch identische Umformungen zu a-Reihen übergehen.

*) Diese Endlichkeit kann auch aus einem Satze von L. Maurer erschlossen werden, demzufolge sich für jede Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe ein endliches Invariantensystem ergibt. Vgl. L. Maurer, Über die Endlichkeit der Invariantensysteme, Sitz.-Ber. Ak. München 29, Heft II (1899).

Hierdurch entstehen die beiden neuen Faktortypen $(l'a)$ und (ab'). Somit kommen dann statt (17) für den Aufbau der Hauptinvarianten die Faktorentypen

$$(19) \qquad (a'b'\cdots p'q'),\ (a'b'\cdots p'l'),\ (a'|b'),\ (a'\alpha),\ (l'\alpha)$$

in Betracht.

Bei (19) müßten wir dann dieselbe Überlegung durchführen, die von (17) zu (19) geführt hat. Man würde dadurch eine neue Serie von Faktorentypen erhalten, bei der wieder ein solcher Übergang von den a' zu den a durchzuführen wäre usw. Schließlich muß man so auf eine letzte Faktorenserie kommen, die durch einen solchen Übergang einfach reproduziert wird.

Es läßt sich der eben geschilderte Prozeß unschwer einige Male wirklich ausführen. Man sieht aber dabei schon, daß die Anzahl der Faktorentypen, die dann zum Aufbau der Hauptinvarianten verwendet werden, sehr bedeutend wächst. Dies gilt in erhöhtem Grade von den Identitäten zwischen diesen Faktorentypen. Es würde bei einer solchen Behandlungsweise der Nutzen der Symbolik zu sehr abgeschwächt und man tut deshalb besser, die beiden obigen Sätze in der gegebenen Gestalt beizubehalten.*)

Will man die übliche Symbolik nicht umgehen, so kann man folgendermaßen verfahren: Man stellt ein vollständiges Invariantensystem $K_1, K_2, \cdots, K_k$ von Hauptinvarianten der Grundformen f nach den obigen Sätzen auf und geht dann bei jeder einzelnen Invariante K_i in der eben geschilderten Weise zu den Reihen $a, b, c, \cdots$ über.

Für $n = 3$, bei ternären Formen also, lohnt es sich noch den ersten und zweiten Fundamentalsatz der symbolischen Methode auch für den Fall auszusprechen, daß bei der symbolischen Darstellung der Grundformen f auch ungestrichelte Symbol- und Größenreihen verwendet werden.

Hier erhalten wir leicht statt (17) die Faktorentypen:**)

$$(20) \quad \begin{cases} (a'b'c'),\ (a'b'l'),\ (\alpha\beta\gamma),\ (a'|b'),\ (a'\alpha),\ (l'\alpha), \\ (a'|\alpha\beta) = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix},\ (\alpha\beta\,\|\,\gamma\delta) = (\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)(\gamma_1\delta_3-\gamma_3\delta_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)(\gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2). \end{cases}$$

*) Es ist mir in letzter Zeit gelungen, den 1. Fundamentalsatz der symbolischen Methode für Hauptinvarianten auch für diejenige symbolische Darstellung der Grundformen auszusprechen, bei der gestrichelte und ungestrichelte Größen- und Symbolreihen verwendet werden. Vgl. meine demnächst erscheinende Arbeit: Über Bewegungsinvarianten, VII. Mitteilung, Sitz.-Ber. Ak. Wien 1914.

**) Vgl. E. Study, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie, Leipziger Berichte 48, S. 649—664 (1896). Ferner meine Arbeit: Über Bewegungsinvarianten, III. Mitteilung, Wiener Berichte (1913).

Beim zweiten Fundamentalsatze der symbolischen Methode für Hauptinvarianten ergeben sich 34 irreduzible Identitäten, die wir aber hier nicht aufzählen wollen.*)

Um noch ein Beispiel anzuführen, sei ein kleinstes vollständiges Formensystem S von Hauptinvarianten einer ternären quadratischen Grundform

$$f = \Sigma a'_{ik} X_i X_k = (a' X)^2$$

mitgeteilt. S ist ein kleinstes vollständiges Invariantensystem der drei Grundformen

$$f = (a' X)^2, \quad \varphi^{(1)} = (x U'), \quad \varphi^{(2)} = (u' X)$$

und besteht aus 18 Invarianten.**)

Hierzu sei bemerkt, daß für f ein kleinstes vollständiges Formensystem von projektiven Invarianten aus fünf, von affinen Invarianten aus neun und von Drehungsinvarianten aus 32 Invarianten besteht.

Die 18 Invarianten von f sind gegeben durch:

Nr.	Typus	Symbolischer Ausdruck	Grad in den			Zahl
			a'_{ik}	X_i	U'_i	
1	Invarianten	$D = (a' b' c')^2$	3	0	0	3
2		$J_1 = (a' \mid a')$	1	0	0	
3		$J_2 = (a' \mid b')^2$	2	0	0	
4	Kovarianten	$f = (a' x)^2$	1	2	0	4
5		$L = (l' x)$	0	1	0	
6		$W = (x a')(a' \mid b')(b' x)$	2	2	0	
7		$S_2 = (a' b' l')(a' x)(b' \mid c')(c' x)$	3	2	0	
8	Kontravarianten	$f'' = (a' b' u')^2$	2	0	2	5
9		$\Phi'' = (u' \mid u')$	0	0	2	
10		$V_1 = (a' \mid u')^2$	1	0	2	
11		$T_1 = (a' u' l')(a' \mid u')$	1	0	2	
12		$\Omega = (a' b' u')(a' b' l')$	2	0	1	
13	Zwischenformen	$J_0 = (u' x)$	0	1	1	6
14		$V_2 = (x a')(a' \mid u')$	1	1	1	
15		$T_2 = (a' u' l')(a' x)$	1	1	1	
16		$R_1 = (a' b' u')(a' x)(b' \mid u')$	2	1	2	
17		$R_2 = (a' b' u')(a' x)(b' \mid c')(c' x)$	3	2	1	
18		$S_1 = (a' b' l')(a' x)(b' \mid u')$	2	1	1	
					Gesamtzahl:	18

Graz, im September 1913.

*) Vgl. die vorige Anmerkung.

**) Vgl. meine Arbeiten: Über Bewegungsinvarianten, IV. und V. Mitteilung, Sitz.-Ber. Ak. Wien (1913), (1914).

Über Beziehungen zwischen kubischen Raumkurven. II.*)

Von

Th. Reye in Straßburg i/E.

---

18. Bezüglich einer kubischen Raumkurve k^3, d. h. bezüglich der ∞^2 durch k^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung, ist bekanntlich einem beliebigen Punkte P ein Punkt P' konjugiert (vgl. G. d. L. II, S. 180—184).**) Er liegt mit P auf einer Bisekante b von k^3 und ist von P harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte von k^3 und b, falls diese reell sind. Auf jeder Bisekante von k^3 bilden die Paare konjugierter Punkte eine Involution, deren Doppelpunkte auf k^3 liegen. Einem auf k^3 gelegenen Punkte sind alle Punkte seiner Tangente konjugiert.

Den Punkten einer Geraden l oder Ebene φ sind bezüglich k^3 die Punkte einer Raumkurve l^3 oder Fläche F^3 dritter Ordnung konjugiert. Es gibt also ∞^4 kubische Raumkurven l^3, deren Punkte den Punkten je einer Geraden l konjugiert sind bezüglich k^3. Ist l eine Unisekante von k^3, so zerfällt l^3 in eine Tangente von k^3 und einen Kegelschnitt. Ist insbesondere l ein Schmiegungsstrahl von k^3, so zerfällt der Kegelschnitt in die Tangente und einen Schmiegungsstrahl l' von k^3. Den Punkten einer Schmiegungsebene von k^3 sind die Punkte einer kubischen Regelfläche konjugiert, welche ∞^1 Schmiegungsstrahlen von k^3 enthält (G. d. L. II S. 184).

19. Wir nennen „autokonjugiert" bezüglich der kubischen Raumkurve k^3 jede Kurve oder Fläche, deren Punkte paarweise konjugiert sind bezüglich k^3. Jede durch k^3 gehende Fläche zweiter Ordnung ist autokonjugiert bezüglich k^3 (18.). Ist eine kubische Raumkurve l^3 autokonjugiert bezüglich k^3, so liegt sie mit k^3 auf einer Regelfläche R^2 zweiter Ordnung; denn sie hat mit k^3 die ∞^1 Bisekanten gemein, die ihre in bezug auf k^3 konjugierten Punkte verbinden. Diese Bisekanten schneiden k^3 und l^3 in je zwei Punktepaaren, die, wenn sie reell sind, einander harmonisch trennen. Jede der Raumkurven k^3, l^3 ist also autokonjugiert be-

---

*) Zusatz zu der Mitteilung in den Math. Ann. 68, S. 417—421.

**) Mit „G. d. L." zitieren wir Reye, Geometrie der Lage, 4. Aufl., Bd. II u. III, Leipzig 1907—10.

züglich der anderen. In jedem Schnittpunkte von k^3 und l^3 wird eine der beiden Raumkurven von einer Geraden der Fläche R^2 berührt.

Aber gibt es denn kubische Raumkurven l^3, die bezüglich einer gegebenen k^3 autokonjugiert sind? Und wenn es solche gibt, wie bestimmt man sie?

20. Wir gelangen zu einer Beantwortung dieser Fragen mit Hilfe spezieller F^2-Gebüsche, die je sechs Punkte von k^3 zu Grundpunkten haben. Ein solches Gebüsch besteht aus den ∞^3 Flächen F^2 zweiter Ordnung, die durch sechs auf k^3 gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 gehen. Es enthält ∞^2 Kegelflächen, und deren Mittelpunkte liegen auf einer Fläche K^4 vierter Ordnung. Diese „Kernfläche" K^4 des Gebüsches ist autokonjugiert bezüglich k^3 (vgl. G. d. L. III, S. 159); sie hat die sechs Grundpunkte zu konischen Doppelpunkten und geht durch deren 15 Verbindungsstrahlen, durch k^3 und die Doppelstrahlen der zehn Ebenenpaare des Gebüsches. Konjugierte Punkte von K^4 liegen auf je einer Bisekante b der Raumkurve k^3 und sind durch die Schnittpunkte von b und k^3 harmonisch getrennt, falls diese reell sind. Die Bisekante b schneidet alsdann K^4 in vier harmonischen Punkten. Daraus folgt (G. d. L. III, S. 160), daß die Kernfläche K^4 von den Tangenten der Raumkurve k^3 oskuliert wird, also k^3 zur Haupttangentenkurve hat. — Das F^2-Gebüsch ist durch k^3 und eine beliebige seiner ∞^3 Flächen bestimmt, seine Grundpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind die sechs Schnittpunkte von k^3 mit dieser Fläche; sie können paarweise konjugiert-imaginär sein, auch können zwei oder mehrere von ihnen zusammenfallen.

21. Die durch k^3 und die zwei Bisekanten $\overline{34}$, $\overline{56}$ gelegte Regelfläche R^2 zweiter Ordnung schneidet die Kernfläche K^4 in k^3, $\overline{34}$, $\overline{56}$ und einer kubischen Raumkurve l^3. Diese l^3 ist zugleich mit K^4 und R^2 autokonjugiert bezüglich der Raumkurve k^3. Sie schneidet k^3 in den zwei Doppelpunkten 1, 2 von K^4 und in den Berührungspunkten A, B der auf R^2 liegenden zwei Tangenten von k^3; diese oskulieren ja K^4 in A und B, sie können aber imaginär sein. In den Punkten 1, 2 berührt die Raumkurve l^3 zwei der ∞^1 auf R^2 liegenden Bisekanten von k^3 (19.). Sie ist durch die vier Punkte 1, 2, A, B und diese Tangenten eindeutig bestimmt.

22. Die Grundpunkte 1, 2 des F^2-Gebüsches können auf k^3 je ∞^1 Lagen annehmen; auf der durch k^3 gelegten Fläche R^2 zweiter Ordnung gibt es deshalb ∞^2 kubische Raumkurven l^3, die bezüglich der Raumkurve k^3 autokonjugiert sind.*) Durch einen Punkt P von R^2 und den

*) Die Raumkurve l^3 ändert auf R^2 ihre Lage nicht, wenn die Punktepaare 3, 4 und 5, 6 mit zwei anderen vertauscht werden, in denen k^3 von zwei ihrer ∞^1 auf R^2 liegenden Bisekanten geschnitten wird. Sie ändert sich aber mit der Lage der Punkte 1, 2.

ihm konjugierten P' gehen ∞^1 von ihnen. Sie bilden auf R^2 einen Kurvenbüschel und schneiden die ∞^1 auf R^2 liegenden Bisekanten von k^3 in Paaren konjugierter Punkte. Zwei Paare bezüglich k^3 konjugierter Punkte P, P' und Q, Q', die auf R^2, nicht aber auf derselben Bisekante liegen, können durch eine der autokonjugierten Raumkurven l^3 verbunden werden; diese geht durch die Berührungspunkte A, B der zwei auf R^2 enthaltenen Tangenten von k^3.

Ohne Benutzung der Punkte A, B, die ja imaginär sein können, bestimmen wir diese Raumkurve l^3 wie folgt. Auf R^2 gehen durch P, P', Q und Q' ∞^1 kubische Raumkurven; sie schneiden eine auf R^2 liegende Bisekante b von k^3 in den Punktepaaren einer Involution. Diese hat mit der Involution der bezüglich k^3 konjugierten Punkte von b ein Punktepaar R, R' gemein, welches mit P, P' und Q, Q' auf jener autokonjugierten Raumkurve l^3 liegt und sie bestimmt.

23. Bezüglich einer kubischen Raumkurve k^3 sind ∞^4 andere l^3 autokonjugiert. Jede der ∞^2 Regelflächen R^2 zweiter Ordnung, die durch k^3 gehen, enthält ∞^2 von ihnen. Durch zwei Punkte P, Q, die nicht auf derselben Bisekante von k^3 liegen, und die ihnen konjugierten P', Q' geht eine der Raumkurven l^3 (22.). Durch vier Punkte von k^3 gehen sechs von ihnen; sie liegen auf je einer der sechs Flächen zweiter Ordnung, welche k^3 mit den Tangenten von je zwei der vier Punkte verbinden (21.). Die Kernfläche K^4 jedes speziellen F^2-Gebüsches, das sechs reelle Punkte von k^3 zu Grundpunkten hat, enthält 45 der bezüglich k^3 autokonjugierten Raumkurven l^3.

24. Einer Regelfläche R^2 zweiten Grades, die zwei für einander autokonjugierte kubische Raumkurven k^3, l^3 enthält, sind längs der Kurven zwei kubische Ebenengewinde $\varkappa^3$, λ^3 umbeschrieben. Diese sind bzw. zu k^3, l^3 polar bezüglich R^2, sie haben die ∞^1 auf R^2 gelegenen Bisekanten von k^3 und l^3 zu gemeinsamen Biplanaren und bestehen aus den Schmiegungsebenen von zwei anderen kubischen Raumkurven. Die in je einer der Biplanaren sich schneidenden Ebenen von λ^3 (oder $\varkappa^3$) sind konjugiert in bezug auf $\varkappa^3$ (bzw. λ^3), also harmonisch getrennt durch zwei Ebenen dieses anderen Gewindes, falls letztere reell sind. Deshalb nennen wir jedes der kubischen Ebenengewinde $\varkappa^3$, λ^3 „autokonjugiert“ bezüglich des anderen.

25. Bezüglich eines kubischen Ebenengewindes $\varkappa^3$ sind ∞^4 andere λ^3 autokonjugiert. Jeder Regelfläche R^2 zweiten Grades, die von $\varkappa^3$ eine Schar Biplanaren enthält, sind ∞^2 dieser λ^3 umbeschrieben (22.). Sie schicken durch jede der Biplanaren Ebenenpaare einer Involution, deren Doppelebenen in dem Gewinde $\varkappa^3$ liegen. Die Involution ist symmetrisch bezüglich einer jeden ihrer zwei Doppelebenen, wenn diese sich rechtwinklig

schneiden. Nun kann aber das Ebenengewinde $\varkappa^3$ der Fläche R^2 so umbeschrieben sein, daß sich in jeder seiner ∞^1 Biplanaren auf R^2 zwei seiner Ebenen rechtwinklig schneiden; es möge in diesem Falle „orthogonal-involutorisch“ heißen. Die ∞^2 der R^2 umbeschriebenen Ebenengewinde λ^3 schicken dann durch jede der ∞^1 Biplanaren Paare von Ebenen, deren Flächenwinkel von zwei Ebenen des Gewindes $\varkappa^3$ gehälftet werden. Eine Konstruktion des orthogonal-involutorischen Ebenengewindes ergibt sich aus folgenden Erwägungen.

26. Die Schnittgeraden von je zwei zueinander normalen Ebenen eines kubischen Ebenengewindes liegen auf einer Regelfläche sechsten Grades*); im Falle unseres orthogonal-involutorischen Gewindes $\varkappa^3$ aber zerfällt diese Fläche in R^2 und eine Fläche vierten Grades. Die in den Biplanaren auf R^2 sich rechtwinklig schneidenden Ebenen von $\varkappa^3$ sind in einem geschart involutorischen Raume Σ einander zugeordnet (G. d. L. II, S. 174); sie und die übrigen ∞^2 Paare normaler, in Σ einander zugeordneter Ebenen umhüllen ein gleichseitiges Paraboloid Π^2 (G. d. L. II, S. 289). Das biquadratische Gewinde der gemeinsamen Berührungsebenen von R^2 und Π^2 enthält demnach alle Ebenen des Gewindes $\varkappa^3$ und zerfällt in $\varkappa^3$ und einen orthogonal-involutorischen Ebenenbüschel erster Ordnung, dessen Achse v eine Fokalachse von Σ ist und auf R^2 und Π^2 liegt.

27. Der involutorische Raum Σ ist eindeutig bestimmt durch seine Fokalachse v und die sie enthaltende Regelfläche R^2 zweiten Grades. Denn die Strahlen der einen Regelschar von R^2 sind in Σ so gepaart, daß sie aus v durch die Ebenenpaare einer orthogonalen Ebeneninvolution projiziert werden, die andere Regelschar aber besteht aus Doppelstrahlen von Σ. Die Strahleninvolution der ersteren Schar wird aus den von v verschiedenen Strahlen der letzteren Schar durch ∞^1 in Σ enthaltene Ebeneninvolutionen projiziert; die ∞^1 Paare normaler Ebenen dieser Involutionen bilden das orthogonal-involutorische Gewinde $\varkappa^3$.

Da die Achse v auf R^2 verschiedene ∞^1 Lagen haben kann, so lassen sich der Regelfläche R^2 zweiten Grades ∞^1 orthogonal-involutorische kubische Ebenengewinde umbeschreiben. Unter den ∞^{12} kubischen Ebenengewinden gibt es demnach ∞^{10} orthogonal-involutorische. —

28. Hier mögen einige Bemerkungen folgen über kubische Raumkurven k^3, l^3, von denen eine auf der Tangentenfläche der anderen liegt. Die Tangenten von k^3 sind auf einer abwickelbaren Fläche T^4 vierter Ordnung gelegen (G. d. L. II, S. 198); sie und die Schmiegungsstrahlen von k^3 sind sich selbst zugeordnet durch die Nullkorrelation ν, von welcher k^3 eine kubische Nullkurve ist. Durch ν ist jeder durch k^3 gehenden Regel-

*) Heinr. Krüger, Die Fokaleigenschaften der kubischen Raumkurven (Inaug.-Diss.), Breslau 1885.

fläche R^2 zweiten Grades eine Fläche R_1^2 zweiten Grades zugeordnet. Eine Tangente von k^3 nun berührt nicht nur zugleich R^2, sondern, da sie sich selbst zugeordnet ist, auch R_1^2; ihr Berührungspunkt mit R_1^2 (oder R^2) ist durch ν der sie enthaltenden Berührungsebene von R^2 (bzw. R_1^2) zugeordnet. In den Punkten von k^3 aber wird die Fläche R^2 von den Ebenen eines kubischen Ebenengewindes $\varkappa^3$ berührt, das zu der kubischen Raumkurve k^3 polar ist in bezug auf R^2. Diesem Gewinde $\varkappa^3$ ist durch die Nullkorrelation ν eine kubische Raumkurve l^3 auf R_1^2 zugeordnet, und jede Ebene von $\varkappa^3$ schneidet l^3 in ihrem Nullpunkte, dem Berührungspunkte von R_1^2 mit einer Tangente von k^3. Die Fläche R_1^2 zweiten Grades berührt also jede Tangente von k^3 in einem Punkte von l^3, sie berührt folglich die Tangentenfläche T^4 von k^3 längs der kubischen Raumkurve l^3.

29. Die durch k^3 gelegte Regelfläche R^2 zweiten Grades enthält die Tangenten a, b zweier reeller oder imaginärer Punkte A, B von k^3; ihre Berührungsebenen α, β in A und B sind Schmiegungsebenen von k^3 und schneiden R^2 bzw. in a, b und je einem Schmiegungsstrahle von k^3. Die Flächen R^2, R_1^2 gehen beide durch a, b und diese zwei Schmiegungsstrahlen (28.), sie berühren sich also in A und B. Mit k^3 hat deshalb die Raumkurve l^3 die Punkte A, B, deren Tangenten a, b und deren Schmiegungsebenen α, β gemein (28.). Die Fläche R_1^2 und die Tangentenfläche T^4 von k^3 berühren sich längs der kubischen Raumkurve l^3 und schneiden sich in deren zwei Tangenten a, b.

30. Die Berührungsebenen von R^2 in den Punkten von k^3 bilden, wie gesagt, ein kubisches Ebenengewinde $\varkappa^3$; sie sind also die Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve l_1^3 und umhüllen deren Tangentenfläche T_1^4 (G. d. L. II, S. 177). Durch die Nullkorrelation ν, von welcher k^3 eine kubische Nullkurve ist, sind die Raumkurven l^3, l_1^3 projektiv so aufeinander bezogen, daß jedem Punkte der einen die Schmiegungsebene des entsprechenden Punktes der anderen als Nullebene zugeordnet ist. Die homologen Punkte von l^3 und l_1^3 liegen also auf je einem gemeinsamen Schmiegungsstrahle dieser Raumkurven. Die drei Raumkurven k^3, l^3, l_1^3 sind projektiv und zu dem Ebenengewinde $\varkappa^3$ perspektiv; ihre homologen Punkte liegen in je einer Schmiegungsebene von l_1^3, und ihre homologen Schmiegungsebenen schneiden sich in je einem Punkte von l^3. Die Tangenten von k^3 verbinden je zwei homologe Punkte von k^3 und l^3, durch sie gehen je zwei homologe Schmiegungsebenen von k^3 und l_1^3.

31. Die Tangentenflächen T^4 von k^3 und T_1^4 von l_1^3 sind zueinander polar bezüglich der Fläche R^2 und haben mit R^2 und R_1^2 die zwei Strahlen a, b gemein. Je zwei in bezug auf R^2 polare Tangenten von k^3 und l_1^3 schneiden sich in einem Punkte von k^3 und berühren in ihm die Fläche R^2.

Die Tangentenfläche T_1^4 von l_1^3 berührt demnach die Fläche R^2 längs der Raumkurve k^3, und l_1^3 steht zu k^3 in derselben invarianten Beziehung wie k^3 zu l^3. Die Tangenten von l_1^3 verbinden je zwei homologe Punkte von l_1^3 und k^3. Die Raumkurven l_1^3, k^3 sind projektiv so aufeinander bezogen, daß die Schmiegungsebene jedes Punktes der einen den entsprechenden Punkt der anderen zum Pol hat bezüglich R^2. Die drei kubischen Raumkurven l_1^3, k^3, l^3 berühren einander und die Strahlen a, b in zwei Punkten A, B, sie haben die Tangentialebenen α, β von R^2 in A und B zu gemeinsamen Schmiegungsebenen (vgl. 29.).

32. Durch eine kubische Raumkurve k^3 gehen die Tangentenflächen von ∞^2 anderen kubischen Raumkurven l_1^3, sie berühren längs der Kurve k^3 je eine der ∞^2 durch k^3 gehenden Regelflächen R^2 zweiten Grades (31.). Die Tangentenfläche T^4 von k^3 enthält ∞^2 andere kubische Raumkurven l^3, sie berührt längs jeder von ihnen eine Fläche R_1^2 zweiten Grades (29.). Die ∞^2 Flächen R_1^2 sind je einer durch k^3 gehenden Fläche R^2 zugeordnet durch die Nullkorrelation ν (28.). Die ∞^2 Raumkurven l^3 und l_1^3 sind auf k^3 und aufeinander projektiv bezogen, so daß homologe Punkte der l^3 auf je einer Tangente von k^3 liegen, und homologe Schmiegungsebenen der l_1^3 sich in je einer Tangente von k^3 schneiden (30.).

Die Nullkorrelation ν ordnet jedem Punkte von k^3 seine Schmiegungsebene zu, sie transformiert homologe Punkte, Tangenten, Schmiegungsebenen der ∞^2 Raumkurven l_1^3 in homologe Schmiegungsebenen, Tangenten, Punkte der l^3 (30.). Homologe Tangenten der Raumkurven l_1^3 schneiden sich in je einem Punkte von k^3 (31.); homologe Tangenten der l^3 liegen in je einer Schmiegungsebene von k^3. Die Pole einer Schmiegungsebene φ von k^3 bezüglich der ∞^2 durch k^3 gehenden Flächen R^2 sind homologe Punkte der Raumkurven l_1^3 (31.); sie sind je einem Punkte von φ konjugiert bezüglich k^3 und liegen auf einer kubischen Regelfläche, die ∞^1 Schmiegungsstrahlen von k^3 enthält (18.). Ihnen sind ∞^2 homologe Schmiegungsebenen der Raumkurve l^3 durch ν zugeordnet, und diese umhüllen dieselbe kubische Regelfläche.

Straßburg, den 7. März 1914.

Berichtigung

zu dem Aufsatze von H. S. Carslaw: „The Scattering of Sound Waves by a Cone", Math. Ann. 75, S. 133—147.

In § 6, S. 141—142, lies überall γ statt y und y.